



ДВУМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО РОТАТОРА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ЗАТУХАНИЯ, ВОЗБУЖДАЕМОГО ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УДАРАМИ

Г.П. Быстрой, С.И. Студенок

Обсуждается получение разностных эволюционных уравнений для нелинейного ротатора с запаздыванием, возбуждаемого периодическими ударами. Тип нелинейности задается первыми элементарными катастрофами (складкой и сборкой), а время между ударами сравнимо с временем релаксации ротатора. Для установленных отображений найдены показатели Ляпунова, зависящие от двух и более параметров; построены бифуркационные диаграммы и определены некоторые характерные бифуркационные значения управляющих параметров при переходе к хаосу. Найденные отображения могут служить также модельными уравнениями для анализа фазовых переходов и I и II рода с хаотической динамикой параметра порядка.

Введение

Аналитический анализ нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующих даже сравнительно простым динамическим системам, в большинстве случаев бывает очень сложным. Тем не менее, существует возможность сведения некоторых неавтономных систем к отображениям через сечение Пуанкаре. В свою очередь, анализ отображений позволяет получить определенную качественную и количественную информацию о системе, что реализуется, в том числе на широко известных отображениях - логистическом, Хенона, Чирикова и т. д. Последние можно получить при рассмотрении задачи о нелинейном ротаторе с постоянным коэффициентом затухания, возбуждаемом периодическими ударами [1].

Отображения Пуанкаре иногда помогают отличить друг от друга движения качественно различающихся типов, например, периодические, квазипериодические и хаотические. В данной работе в рамках двух первых элементарных катастроф (складки и сборки [2]) обсуждается получение разностных эволюционных уравнений для ОДУ второго порядка с δ -образной правой частью для динамических систем с нелинейным коэффициентом затухания. Вид коэффициента затухания определяется в рамках так называемых задач с последствием в различных отраслях знания [3]. Элементарные катастрофы складки и сборки определяют тип нелинейности ротатора, который, вообще говоря, может быть любым в зависимости от специфики решаемой задачи. Природа толчков, задаваемых δ -функцией, в каждой такой задаче также может быть различной. Например, при фазовых превращениях в системе «пар - жидкость» это могут быть

испаряющиеся молекулы, покидающие поверхность раздела за очень малое время и изменяющие параметр порядка; при турбулентном течении жидкости - образующиеся с определенной периодичностью вихри и т.д.

1. Переход от потоков к отображениям

В монографии [1] рассмотрена динамическая система, описывающая динамику нелинейного ротатора с постоянным коэффициентом затухания Γ и δ -образной правой частью, характеризующей периодические удары в системе:

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = Kf(x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT), \quad k - \text{целое число.} \quad (1)$$

Здесь T - период времени между ударами; $Kf(x)$ - амплитуда удара, $K = \text{const}$; δ - дельта-функция Дирака. Определив соответствующим образом функцию $f(x)$ и постоянные Γ и K , путем интегрирования уравнения (1) на конечном временном промежутке можно получить широко известные отображения: логистическое, Хенона, Чирикова и т.д [1].

Рассмотрим ту же динамическую систему, но с коэффициентом затухания, являющимся кусочно-постоянной функцией времени: $\Gamma = \Gamma(t) > 0$. Это значит, что на временных интервалах $(k+1)T - \epsilon > t > kT - \epsilon$, где ϵ - бесконечно малая положительная величина, $\Gamma(t)$ принимает постоянное значение, равное Γ_k . В точках $t = kT$ функция $\Gamma(t)$ терпит разрывы первого рода, являясь непрерывной справа. Ниже будет показано, что в ряде задач с последствием такая постановка не лишена физического смысла; вероятно, первый, кто на это обратил внимание, был Г.З. Гершуни [4].

Введя новую переменную $y = \dot{x}$, уравнение (1) можно представить в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений (НДУ) 1-го порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\Gamma(t)y + Kf(x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (2)$$

Решение системы уравнений (2) будем искать на некотором конечном интервале времени $(k+1)T - \epsilon > t > kT - \epsilon$. Тогда для переменных $(x_k, y_k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x(kT - \epsilon), y(kT - \epsilon))$ находим

$$y(t) = y_k \exp[-\Gamma_k(t - kT)] + K \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) \int_{kT - \epsilon}^t \exp[-\Gamma_k(t - t')] \delta(t' - mT) dt', \quad (3)$$

$$x(t) = x_k + y_k / \Gamma_k + y(t) / \Gamma_k + K \sum_{m=0}^{\infty} f(x_m) \int_{kT - \epsilon}^t \delta(t' - mT) \exp[-\Gamma_k(kT - t')] / \Gamma_k dt'. \quad (4)$$

Решения (3), (4) являются общими для разных интервалов времени (для разных k). При таком подходе все движение разбивается на конечные этапы (разности), каждый из которых соответствует такой области изменения переменных, где исследуемая система с достаточной точностью описывается НДУ, которое может быть проинтегрировано на этом этапе.

Возьмем функции (3), (4) в точке $t = (k+1)T - \epsilon$ и, устремляя ϵ к нулю, находим

$$x_{k+1} = x_k + [1 - \exp(-\Gamma_k T)] [y_k + Kf(x_k)] / \Gamma_k, \quad y_{k+1} = \exp(-\Gamma_k T) [y_k + Kf(x_k)]. \quad (5)$$

Таким образом, в результате стробирования переменных исходная система ДУ (2) свелась к новому двумерному отображению (5), отличному от приведенного в работе [1]. Ограничимся теперь классом динамических систем, для которых выполняется следующее тождество: $[1 - \exp(-\Gamma_k T)] [y_k + Kf(x_k)] = T \cdot Kf(x_k)$.

Несложно показать, что двумерное отображение (5) в этом случае преобразуется к виду

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot Kf(x_k) / \Gamma_k, \quad y_{k+1} = y_k + (1 - T) \cdot Kf(x_k). \quad (6)$$

Моделирование запаздывания. Период стробирования и время релаксации. Для дальнейшего анализа двумерного отображения (6) осталось определить функции Γ_k и $Kf(x_k)$. Следует отметить, что в классической задаче с ротатором [1] амплитуда удара $Kf(x)$ и переменная x определены для одного и того же момента времени. Изменение состояния после удара для физической системы должно сопровождаться изменением функции распределения, а установление нового равновесного распределения всегда требует конечного времени. Такой процесс в термодинамике называется релаксацией, а время установления равновесия - временем релаксации. Описываемый реальный процесс можно считать почти равновесным, если его характерное время, в данном случае T , велико по сравнению с временем релаксации τ . Когда же T сравнимо с τ , следует учитывать влияние релаксации [5]. Поэтому рассмотрим теперь класс задач, в которых переменная $x(t)$ определена для момента времени t , а амплитуда удара $Kf(t-\tau)$ - для момента времени $t-\tau$. Раскладывая, следуя [4], в ряд Тейлора функцию $Kf(t-\tau)$ по τ и ограничиваясь двумя членами разложения, при таком моделировании запаздывания получаем

$$\ddot{x} + \Gamma(x)\dot{x} = Kf(x) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (7)$$

$$\Gamma(x) = 1 + \tau Kdf(x)/dx. \quad (8)$$

Таким образом, задание различных типов нелинейности $Kf(x)$, имеющих физический смысл, однозначно определяет коэффициент затухания $\Gamma(x(t))$ в неравновесных задачах и приводит к новым каноническим отображениям, каждое из которых может быть получено для катастроф типа

складки: $Kf(x) = -(x + a), \quad \Gamma(\tau, x) = 1 - \tau 2x;$

сборки: $Kf(x) = -(x^3 + ax + b), \quad \Gamma(\tau, x) = 1 - \tau(3x^2 + a);$

ласточкин хвост $Kf(x) = -(x^4 + ax^2 + bx + c), \quad \Gamma(\tau, x) = 1 - \tau(4x^3 + 2ax + b)$ и т.д.

Выбор соответствующего типа катастрофы определяется спецификой решаемой задачи [2, 6]. Сборка характеризует семейство функций четвертой степени $F(x, a, b) = x^4/4 + ax^2/2 + bx$, зависящих от двух параметров, и геометрию соответствующего кубического уравнения $\nabla F(x) = -Kf(x)$. Так, например, для сборки $F(x, a, b)$ имеет два минимума (две устойчивые фазы), что позволяет использовать его при описании фазовых переходов. В качестве примеров рассмотрим первые два типа катастроф, складку и сборку, для которых отображение (6) с учетом вышесказанного имеет, соответственно, вид (9), (10) и (11), (12):

$$x_{k+1} = x_k - T(x_k^2 + a)/(1 - \tau 2x_k), \quad (9)$$

$$y_{k+1} = y_k + (T - 1)(x_k^2 + a), \quad (10)$$

$$x_{k+1} = x_k - T(x_k^3 + ax_k + b)/[1 - \tau(3x_k^2 + a)], \quad (11)$$

$$y_{k+1} = y_k + (T - 1)(x_k^3 + ax_k + b). \quad (12)$$

Отображение (9), далее называемое отображением складки, содержит три управляющих параметра - T , a , τ ; отображение (11), называемое далее отображением сборки, содержит четыре управляющих параметра - T , a , b , τ . Для обоих отображений взяты в качестве сплайнов стробированные значения G_k нелинейных коэффициентов затухания $\Gamma(\tau, x)$. При $T=1$ двумерные отображения становятся одномерными, что существенно облегчает их анализ.

Хаос при фазовых переходах. Двумерные отображения (9),(10) и (11),(12) дают в широком интервале значений параметров хаотические решения, отличающиеся по некоторым своим свойствам от соответствующих решений известных отображений [1]. Согласно элементарной теории катастроф при наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением, в том числе и границы перехода к хаосу, не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности.

В качестве примера на рис. 1 приведена динамика переменной x_k для рассматриваемых типов нелинейности: катастрофы типа складки и сборки. Рис. 1, б свидетельствует о том, что найдена простая модель для катастрофы сборки в виде отображения (11), в которой при $b=0$ реализуются неравновесные фазовые переходы первого рода между фазами Φ_1 и Φ_2 ; наличие ограниченных хаотических решений позволяет говорить о найденной детерминированной модели «гомофазных» флуктуаций (флуктуаций вблизи уровней Φ_1 и Φ_2). Наряду с ними, однако, фиксируются такие флуктуации описываемой переменной, которые выходят за пределы, совместимые с исходной фазой, то есть соответствуют образованию зародышей какой-либо другой фазы. Подобные флуктуации называют «гетерофазными» (переходы между уровнями Φ_1 и Φ_2). Такой анализ становится возможным вплоть до критической точки фазового перехода II рода, которая дает предельное двухфазное состояние как трижды вырожденную критическую точку ($a=b=0$). Таким образом, отображение (11) позволяет описывать неравновесные фазовые переходы первого рода - переходы между двумя устойчивыми состояниями Φ_1 и Φ_2 . В этом смысле переменную x_k можно трактовать для данного отображения как некоторый параметр порядка, физический смысл которого устанавливается при решении конкретных задач [6, 7]. В отличие от катастрофы сборки складка имеет всего одну устойчивую неподвижную точку - одно устойчивое состояние x_0 .

Детерминированный стохастический резонанс. Явление попеременного захвата траектории двумя закритическими состояниями без источников случайного шума, которое наблюдается на рис. 1, б, может быть идентифицировано как детерминированный стохастический резонанс [8]. Для него характерно непериодическое (хаотическое) пребывание в окрестности каждой из фаз, и сам

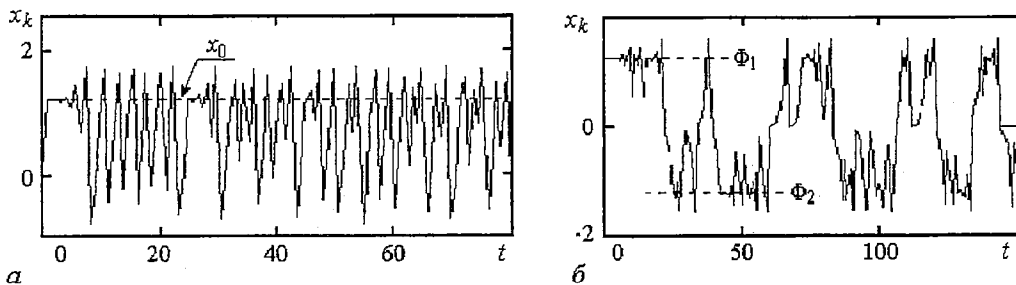


Рис. 1. Хаотическая динамика параметра порядка x_k во времени: а - для отображения складки (расчет по (9) при $T=0.8$, $a=-1.5$, $\tau=0.15263$); б - для отображения сборки (расчет по (11) при $a=-1.5$, $b=0$, $T=1$, $\tau=0.033082$)

переход между которыми, в соответствии с теорией Ландау, является фазовым переходом I рода. Стохастический резонанс (СР) является одним из ярких примеров проявления бистабильности нелинейных систем, для которой характерно явление стохастической синхронизации как захвата мгновенной фазы периодической силой [8,9]. Напомним, что термин «стохастический резонанс» - понятие более широкое, чем детерминированный стохастический резонанс - был введен в 1981-1982 гг. на основе исследований модели бистабильного осциллятора, предложенной для описания периодичности в наступлении ледниковых периодов на Земле. Модель описывала движение частицы в симметричном двухъямном потенциале под действием периодической силы в условиях большого трения. Устойчивые положения частицы с маловыраженной хаотической динамикой соответствовали ледниковому периоду и нормальному климату Земли. Периодическая сила соответствовала колебаниям эксцентриситета орбиты Земли.

Термин «резонанс» имеет здесь, однако, нестандартный смысл; согласно [8] он отражает немонотонную («резонансную») зависимость отклика бистабильного элемента на внешнее воздействие.

Эффект СР определяет группу явлений, при которых отклик нелинейной системы на слабый внешний сигнал заметно усиливается с ростом интенсивности шума в системе. В 1983 г. эффект был исследован в триггере Шмитта; впоследствии эффект СР был обнаружен и исследован во многих бистабильных системах: в кольцевом лазере, в магнитных системах, в системах с электронным парамагнитным резонансом, в экспериментах с броуновскими частицами, в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках, в сверхпроводящих квантовых интерферометрах, в химических системах и т.д. В работе [8] можно найти достаточно полную библиографию по этому вопросу. Важно, что двумерное отображение (11), (12) дает математическую модель неперидического (хаотического) пребывания любой из этих систем в окрестности каждой из фаз; сам же переход между ними является фазовым переходом I рода.

2. Бифуркационные диаграммы. Показатели Ляпунова

Для описания перехода от циклического поведения переменной к хаотическому при изменении управляющих параметров отображений (9), (11) были использованы бифуркационные диаграммы, которые для переменных x_k и y_k могут быть построены в зависимости от параметров a , T , τ для катастрофы складки и параметров a , T , τ , b для катастрофы сборки. В качестве примера приведем только две из них. Для рассматриваемых катастроф на рис. 2, 3 представлены бифуркационные диаграммы и соответствующие им показатели Ляпунова λ . Значения λ определялись по формуле

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{k=1}^N \ln |d\varphi(x_k)/dx_k|, \quad x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

где N - число итераций по x_k .

Отображение складки (9) имеет две неподвижные точки, одна из которых $x_0 = (-a)^{1/2}$ устойчива, а другая всюду неустойчива. В отличие от (9) отображение сборки (11) имеет при $a < 0$ и $b = 0$ две устойчивые равновесные точки $\Phi_{1,2} = \pm(-a)^{1/2}$ и одну неустойчивую - $\Phi_0 = 0$. Эти точки обуславливают существование трех равновесных решений, одно из которых является неустойчивым. Изначальная принадлежность к той или иной устойчивой фазе в катастрофе сборки определяется, согласно модели, начальными условиями.

Непрерывное изменение управляющих параметров приводит к каскаду бифуркаций, которые проявляются в виде ветвлений на бифуркационной диаграм-

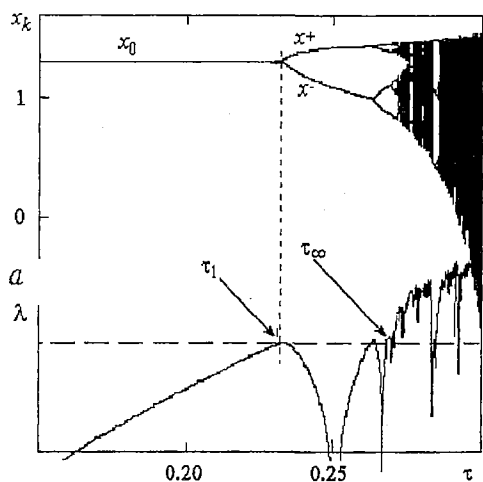


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (а) для переменной x_k отображения складки и его показатель Ляпунова (б) при $T=0.3$, $a=-1.3$

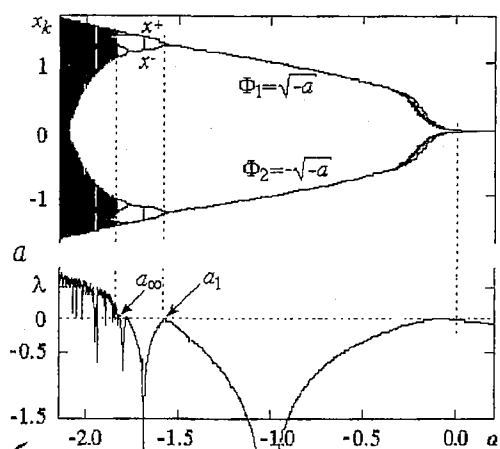


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма (а) для переменной x_k отображения сборки и его показатель Ляпунова (б) при $T=0.35$, $\tau=0.14$

ме (рис. 2, а, 3, а) и сопровождаются удвоением периода, связанным с субгармонической неустойчивостью. Каждое из ветвлений соответствует потере устойчивости одной из неподвижных точек и образованию двух устойчивых. Первое ветвление, связанное с потерей устойчивости точки равновесия, для складки имеет место при $\tau_1 \approx 0.23$, для сборки - при $a_1 \approx -1.55$. При этом система распадается на две новые фазы, которые соответствуют двум устойчивым точкам: x^+ и x^- . Теперь каждая последующая итерация переводит систему из одной фазы в другую. Таким образом, аттрактор с периодом 1 сменяется аттрактором с периодом 2 [10].

Выше критических значений $\tau_\infty \approx 0.266$ и $a_\infty \approx -1.85$ в системах начинается область так называемого детерминированного хаоса, где параметр порядка ведет себя хаотически. Расчет всех точек бифуркаций ренормгрупповым методом, как это выполнялось для логистического отображения [11], затруднен вследствие сложности полученных отображений. Из рис. 2, а, 3, а видно, что в области хаоса имеются участки с периодической динамикой параметра порядка - окна детерминированности (светлые полосы), соответствующие отрицательным показателям Ляпунова (рис. 2, б, 3, б).

В отличие от логистического отображения, в котором имеется всего один управляющий параметр, исследуемые отображения (9), (11) являются многопараметрическими; для таких систем важно знать характер их поведения в зависимости сразу от нескольких управляющих параметров. Этот вопрос является также интересным с точки зрения управления хаосом - темы популярной в последнее время. При наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности.

Наглядное представление о таком поведении, а также о сложной структуре областей хаоса и регулярного движения можно получить при помощи трехмерных диаграмм, отражающих зависимость показателя Ляпунова от двух параметров (рис. 4, 5). В плоскости управляющих параметров всех трех диаграмм изображены некоторые контурные графики из линий равного уровня для различных значений λ . Аномальные пики в области регулярного движения ($\lambda < 0$) соответствуют различным режимам периодического движения, характеризующимся периодом, амплитудой и т.д. В области хаотического движения ($\lambda > 0$) имеющиеся пики, уходящие в область отрицательного λ , соответствуют окнам детерминированного поведения.

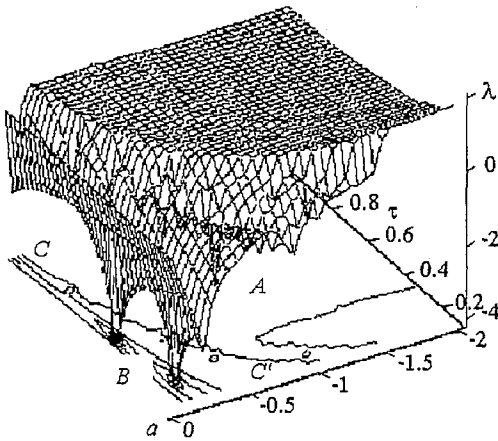


Рис. 4. Двухпараметрическая зависимость показателя Ляпунова $\lambda(\tau, a)$ для отображения складки при $T=1$; в области хаоса $\lambda(\tau, a) > 0$; A - область хаоса; B - область регулярного движения; CC' - граничная кривая перехода к хаосу

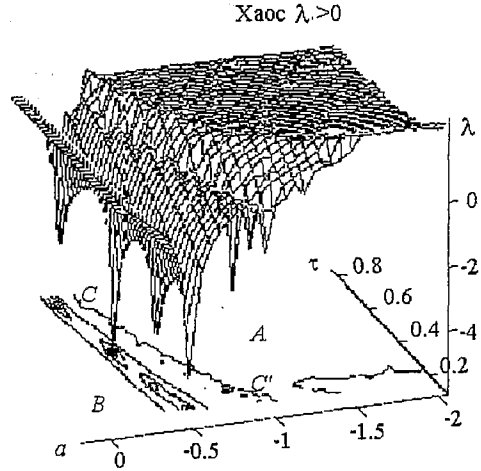


Рис. 5. Двухпараметрическая зависимость показателя Ляпунова $\lambda(\tau, a)$ для отображения сборки при $T=1$; в области хаоса $\lambda(\tau, a) > 0$; A - область хаоса; B - область регулярного движения; CC' - граничная кривая перехода к хаосу

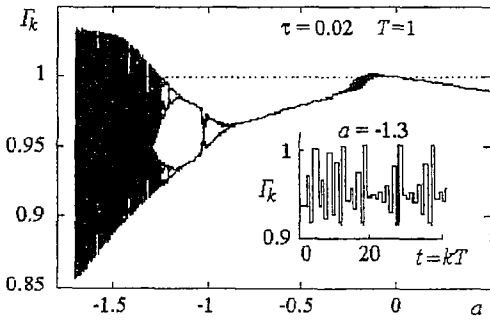


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для коэффициента затухания Γ_k отображения сборки; для каждого временного интервала коэффициент затухания является кусочно-постоянной функцией

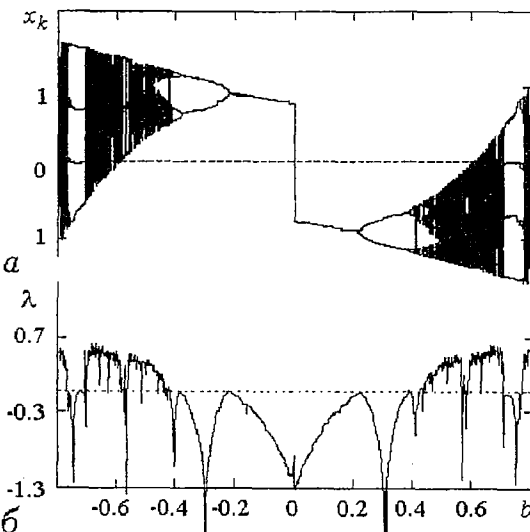


Рис. 7. a - Бифуркационная диаграмма для переменной x_k (b) отображения сборки; б - его показатель Ляпунова $\lambda(b)$; $T=1, \tau=0.02; a=-0.6$

зависимость показателя Ляпунова $\lambda(a,b)$ для отображения (11) также указывает на сложную структуру периодических движений (рис. 8); в области хаоса $\lambda > 0$. Приведенный на рис. 7 показатель Ляпунова соответствует отдельно взятому сечению при $a = -0.6$ трехмерной поверхности, представленной на рис. 8. С увеличением параметра a хаос исчезает и имеют место регулярные процессы с различными отрицательными значениями показателей Ляпунова. На нижней плоскости области регулярного и хаотического поведения разделяются ломаной кривой.

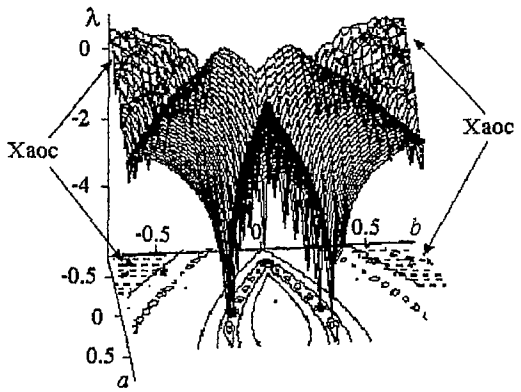


Рис. 8. Двухпараметрическая зависимость показателя Ляпунова $\lambda(a,b)$ для отображения сборки при $T=1$, $\tau=0.02$, $a=-0.6$; в области хаоса $\lambda > 0$

Другие физические задачи. Найденное отображение (11) при $T=1$ представляет интерес не только в задаче с ротатором. Оно может быть применено также к ряду других физических задач, наиболее важными из которых являются:

- описание хаотической нелинейной динамики заземленной с обоих концов вязкоупругой цилиндрической балки с последствием, обтекаемой развитым турбулентным потоком жидкости или газа. При таком обтекании с балки начинают срывать с определенной периодичностью T турбулентные вихри, срыв которых и играет роль «ударов» в системе. Частота отрыва вихрей определяется формулой $\omega = 0.22v/(2\pi D)$, где v - скорость набегающего потока, D - диаметр балки, коэффициент 0.22 представляет собой число Струхалия для данного типа обтекаемой конструкции. «Удары», направленные по движению потока, приводят в такой системе к изменению переменной x - смещению средней части стержня. Параметры a и b однозначно определяются геометрией системы [12];

- описание хаотической динамики плотности тонкого поверхностного слоя жидкости единичного объема на границе раздела жидкость - пар. Роль периодических «ударов» в такой системе играют акты испарения и конденсации молекул. Степень неравновесия задается различными значениями соотношения времени между ударами и временем релаксации. Переменная x характеризует отклонение в приведенном виде плотности рассматриваемого поверхностного слоя от средней плотности парожидкостной системы. Параметр $a(T)$ зависит явно от температуры, на линии равновесия фаз $b=0$ [7, 13]. Для системы с фазовыми переходами I и II рода разработаны алгоритмы построения бифуркационных диаграмм с переходом к хаосу, показателей Ляпунова и энтропии Колмогорова;

- описание при химических реакциях динамики концентраций компонентов, вступающих в реакцию. Процесс вступления веществ в химическую реакцию моделируется в такой задаче как мгновенные «удары», которые приводят к изменению параметра порядка (переменной x), характеризующего отклонение концентрации промежуточного продукта реакции от некоторой средней концентрации. Параметры a и b являются явными функциями приведенных температуры T^* и давления P^* .

Выводы

Для нелинейного ротатора с запаздыванием, возбуждаемого периодическими ударами, получены разностные эволюционные уравнения - отображения. Тип нелинейности задается первыми элементарными катастрофами (складкой и

сборкой), а время между ударами сравнимо с временем релаксации ротатора. Каждое из этих новых отображений является простой системой, допускающей численные решения. Вместе с тем, нелинейная динамика систем, описываемых этими отображениями в пространстве управляющих параметров, достаточно сложна. Это подтверждается не только анализом бифуркационных диаграмм, но и анализом двух- или трехпараметрических показателей Ляпунова для изученных отображений. Развитие такого подхода направлено на изучение качественных изменений и особенностей проявления хаоса в различных нелинейных системах при изменении управляющих параметров. При наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности.

С одной стороны, важный результат заключается в том, что найдена простая модель отображения (отображение сборки), в которой реализуются фазовые переходы первого и второго рода (по Л.Ландау) и описываются релаксационные процессы; данное отображение, например, может служить для системы «пар - жидкость» детерминированной моделью так называемых «гомофазных» флуктуаций, о необходимости описания которых говорилось Я.Френкелем [14]. Наряду с ними, однако, необходимо принимать во внимание такие флуктуации описываемой переменной, которые выходят за пределы, совместимые с исходной фазой. Подобные флуктуации принято называть «гетерофазными» [14]. Такой анализ становится возможным вплоть до критической точки II рода, которая дает предельное двухфазное состояние как трижды вырожденную (с точки зрения теории катастроф) критическую точку. В окрестности этой точки могут также быть изучены свойства хаотической динамики. Моделируемые при этом флуктуации выступают не как результат шумов, а как продолжение нелинейных свойств системы, обуславливающих детерминированный хаос.

С другой стороны, явление попеременного захвата траектории двумя закритическими состояниями без источников случайного шума может быть идентифицировано как детерминированный стохастический резонанс. Для него характерно непериодическое (хаотическое) пребывание в окрестности каждой из фаз при наличии периодических δ -«ударов» по системе. Тем самым, полученное отображение может быть предложено для описания этого интересного физического явления.

Численное моделирование позволяет продемонстрировать изменение динамического поведения системы в зависимости от знака и величины каждого из управляющих параметров, показать механизм перехода от регулярного движения к хаотическому. Для полученных отображений построены бифуркационные диаграммы и найдены показатели Ляпунова. В плоскости управляющих параметров всех трех диаграмм изображены контурные графики из линий равного уровня для различных значений λ . Аномальные пики в области регулярного движения ($\lambda < 0$) соответствуют различным режимам движения, характеризующимся периодом, амплитудой и т.д. В области хаотического движения ($\lambda > 0$) пики, уходящие в область отрицательного λ , соответствуют так называемым окнам детерминированного поведения. Данный подход использован автором при решении конкретных физических задач.

Линию обобщений можно продолжить: можно построить и исследовать отображения для семейства функций пятой степени, зависящих от трех параметров, далее можно перейти к семействам функций более высоких степеней, а затем к семействам функций двух, трех и более переменных, как это делается в элементарной теории катастроф. Цель таких исследований при решении

различных задач, моделирующих реальные процессы, - изучение качественных трансформаций при переходе к хаосу и изменении управляющих параметров.

Библиографический список

1. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. С. 25.
2. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Т.1-2. М.: Мир, 1984.
3. *Колмановский В.Б.* Уравнения с последействием и математическое моделирование // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 4. С. 122.
4. *Гершуни Г.З.* Гидродинамическая неустойчивость. Изотермические течения // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 2. С. 99.
5. *Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964.
6. *Быстрой Г.П.* Детерминированный хаос в нелинейных задачах теплофизики // Материалы II Всероссийской научной internet-конференции «Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках», апрель-май 2001 / Гл. ред. серии проф. А.А. Арзамасцев. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2001, вып. 7. С. 3.
7. *Быстрой Г.П., Моисеева О.Н.* Развитие количественных методов теории фазовых переходов первого рода и критических явлений в системе жидкость - пар // Сб. Метастабильные состояния и фазовые переходы. № 3. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999. С.151.
8. *Анищенко В.С., Нейман А. Б., Мосс Ф. и др.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 8.
9. *Климонтович Ю.Л.* Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? // УФН. 1999. Т. 169, № 1. С.39.
10. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 222 с.
11. *Feigenbaum M.J.* Universal Behavior in Nonlinear Systems. Los Alamos Sci. 1980. P.4.
12. *Быстрой Г.П.* О механизме возникновения хаотических режимов в динамике конструкций (на примере выпуклой балки) // Сб. научн. труд. XXX Уральского семинара «Неоднородные конструкции». Миасс: УрО РАН, 2000. С.85.
13. *Быстрой Г.П., Иванова С.И.* Математическое моделирование неравновесных фазовых переходов и хаотическая термодинамика испарения и конденсации в системе «жидкость - пар» // Материалы II Всероссийской научной internet-конференции «Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках», апрель-май 2001 / Гл. ред. серии проф. А.А. Арзамасцев. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2001, вып. 7. С. 10.
14. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. М.: Изд-во АН СССР, 1945.

Уральский государственный
университет им. А.М. Горького

Поступила в редакцию 13.12.2001
после доработки 27.03.2002

TWO-DIMENSIONAL MAPPINGS FOR NONLINEAR ROTATOR WITH A PIECEWISE-CONSTANT DECAY FACTOR RAISED BY PERIODIC SHOCKS

G.P. Bystrai, S.I. Studenok

The deriving of difference evolutionary equations for a nonlinear rotator with a piecewise-constant decay factor raised by periodic shocks is considered. The type of nonlinearity is set by the first partial catastrophes («crimp» and «assembly»), and the time between shocks is comparable with relaxation time of a rotator. For set mappings the Lyapunov exponents, depending from two and more parameters are found; the bifurcation diagrams are constructed and some reference bifurcation values of control parameters, are spotted at transition to chaos. Obtained mappings including model equations can serve for the analysis of the first and the second type phase transitions with random dynamics of an order parameter.



Быстрый Геннадий Павлович - родился в 1947 году, окончил физико-технический факультет Уральского политехнического института (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1975). Профессор Уральского государственного университета (УрГУ). Зав. отделом теплофизики НИИ ФПМ при УрГУ. Область научных интересов - нелинейная термодинамика, применение нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор многих статей и нескольких монографий по направлениям, указанным выше. Читаемые курсы: физика открытых систем, нелинейная динамика, термодинамика необратимых процессов, экономическая синергетика.



Студенок Сергей Игоревич - родился в 1978 году, окончил физический факультет и магистратуру Уральского государственного университета (2001). Аспирант. Имеет несколько публикаций по нелинейной динамике.