



## ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С УСЕЧЕНИЕМ ПО ВЕЛИЧИНЕ

*Ю.А. Брюханов*

Рассмотрены свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии в фильтрах нижних и верхних частот. Использовано представление чисел с фиксированной запятой в дополнительном коде. Для исследования процессов применен метод одномерных точечных отображений. Динамические режимы характеризуются вероятностными диаграммами. Получены выражения для наиболее вероятных колебаний на выходе фильтров при произвольном количестве уровней квантования. Предложенная методика может использоваться для исследования эффектов квантования в цифровых фильтрах нижних и верхних частот первого порядка (рекурсивных, рекурсивно-нерекурсивных) с представлением чисел в прямом, обратном или дополнительном кодах с округлением или усечением.

Принципиальным отличием цифровых фильтров от аналоговых является конечная точность выполнения арифметических операций и задания параметров фильтра, обусловленная ограниченным числом используемых двоичных разрядов. Вследствие этого цифровая колебательная система в общем случае является существенно нелинейной, в ней возникают нежелательные явления, называемые эффектами квантования [1,2]. При достаточно большом количестве разрядов эти эффекты незначительны и для анализа их влияния используется линейная модель поведения системы. Если количество разрядов невелико (это необходимо для повышения быстродействия), а также при постоянном воздействии или при синусоидальном, дискретизированном с частотой, кратной частоте синусоиды, линейная модель неприменима.

Рассмотрим свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии  $A$  в цифровых фильтрах нижних и верхних частот, реализуемых на базе рекурсивных цепей первого порядка, при произвольном количестве двоичных разрядов, то есть уровней квантования  $L$ , в представлении результатов сложения. Предполагается, что числа представляются с фиксированной запятой, параметр фильтра  $a$  задается без ошибки, квантование осуществляется с усечением по величине, переменные представляются в форме чисел, выравненных справа (то есть в виде целых чисел), а сумматор без учета квантования имеет характеристику с насыщением.

Усечение по величине реализуется для двоичных чисел, представляемых в дополнительном коде. При этом количество уровней квантования - четное число, а характеристика квантователя с учетом насыщения выражается функцией

$$f(\phi) = \begin{cases} [\phi] & \text{при } 0 \leq \phi < N_1, \\ N_1 & \text{при } \phi \geq N_1, \\ [\phi+N]-N & \text{при } -N_1 \leq \phi < 0, \\ -N & \text{при } \phi \leq -N_1, \end{cases}$$

где  $[\cdot]$  - целая часть числа,  $N_1=N-1$ ,  $N=L/2$ . В случае  $\phi \geq 0$  участки характеристики, соответствующие значениям  $[\phi]$ , обозначим 0, I, II, ...,  $N_1$ , а для  $\phi < 0$  участки, обозначенные -I, -II, ..., -N, соответствуют величинам  $[\phi + N] - N$ .

Колебания в рассматриваемых фильтрах описываются разностным уравнением

$$x(n+1) = f(ax(n) + A).$$

При использовании целочисленной арифметики шаг квантования равен единице,  $A$  - целое число.

Введем  $y(n)=x(n+1)$ . Процессы исследуем на плоскости состояний  $(x, y)$  методом точечных отображений [3]. При этом функция последования имеет вид  $y=f(ax+A)$ . Исследование колебаний сводится к нахождению последовательности точечных отображений  $F$  отрезка  $x \in [-N, N_1]$  в себя. Имеем в виду, что вследствие квантования в системе первого порядка возможны  $L$  состояний. В общем случае в зависимости от начального состояния  $x(0)$  в системе возможны различные установившиеся движения. Поскольку все  $L$  возможных начальных состояний независимы, равновероятны, введем понятие вероятности  $P$  установившегося движения  $B$  в виде соотношения  $P(B)=m/L$ , где  $m$  - количество начальных состояний, соответствующих этому движению. Параметр фильтра  $a$  выбирается в области устойчивости без учета эффектов квантования, то есть  $0 < |a| < 1$ . Считая количество уровней квантования произвольным, рассмотрим свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии.

Как и в [4], плоскость состояний разобьем на области соответственно участкам характеристики сумматора (квантователя). Обозначим эти области так же, как и соответствующие участки. Граница областей  $[\phi]$ ,  $[\phi]+1$  выражается зависимостью  $x=([\phi]+1-A)/a$ . Сама граница принадлежит области  $[\phi]+1$ .

### Свободные колебания ( $A=0$ )

В зависимости от знака и величины параметра  $a$  графики функции последования и биссектрисы  $y=x$  могут пересекаться в одной или нескольких точках.

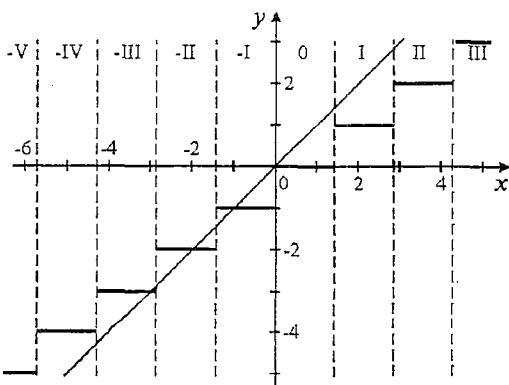


Рис. 1. Диаграмма Ламерея автономного фильтра нижних частот при  $L=12$ ,  $a=0.7$

Пусть  $a > 0$  (цепь является фильтром нижних частот). При  $0 < a < 1$  для границы областей 0, I имеем  $x > 1$ , поэтому для  $x \geq 0$  единственной точкой пересечения графика функции последования и биссектрисы является начало координат, соответствующее состоянию покоя, обозначаемое далее  $T=0$ . В это состояние система переходит из всех точек  $[x] \in [1; N_1]$ . При отрицательных значениях  $x$  картина сложнее. Здесь всегда существует точка пересечения при  $x = -1$ . Возможны и другие точки в зависимости от величины  $a$ . В качестве иллюстрации на рис. 1. показана диа-

грамма Ламерея с обозначенными на ней областями плоскости состояний для  $L=12$ ,  $a=0.7$ . Здесь график функции последования пересекается с биссектрисой при  $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$ . При старте из точек  $[x] \in [-6, -3]$  в фильтре возникают колебания с периодом  $T=1$  и амплитудой  $X=-3$ . Это состояние далее обозначается  $T=1(-3)$ . Если стартовыми точками являются  $x=-2$  и  $x=-1$ , то имеем движения  $T=1(-2)$  и  $T=1(-1)$ , соответственно. Колебания при стартовых точках  $[x] \geq 0$  описаны выше. Соответственно вероятность колебания  $T=1(-3)$  равна  $1/3$ . Ниже это обозначается  $P(-3)=1/3$ . Вероятности других возможных движений  $P(-2)=P(-1)=1/12$ ,  $P(0)=1/2$ . Рассмотрение колебаний при  $a \in (0; 1)$  позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 2. При  $0 < a \leq 1/2$  в фильтре существуют равновероятные установившиеся колебания  $T=0$  и  $T=1(-1)$ . С увеличением параметра  $a$  наиболее вероятным становится движение  $T=0$  (с вероятностью  $P(0)=1/2$ ), а вместе с ним существуют колебания других амплитуд  $X \in [-N, -1]$ . Эти закономерности сохраняются для любого значения  $L$ .

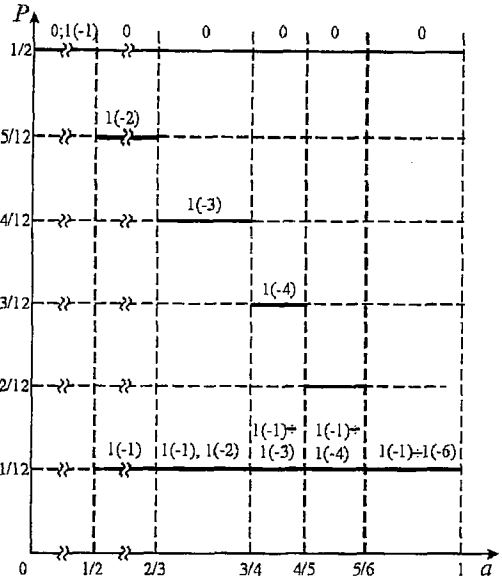


Рис. 2. Вероятностная диаграмма автономного фильтра нижних частот при  $L=12$

Пусть  $a < 0$  (цепь является фильтром верхних частот). При этом график функции последования пересекается с биссектрисой только в начале координат. Следовательно, при любых  $L$  единственным состоянием равновесия системы является состояние покоя  $T=0$ .

### Постоянное воздействие

При постоянном внешнем воздействии  $A$  график функции последования пересекает ось ординат в точке  $y=A$ , при этом  $\phi = A$ . Рассмотрим случай  $A > 0$ .

Пусть  $a > 0$ . При  $A=1$  для всех значений  $0 < a < 1$  для границы областей I, II имеем  $x > 1$ , поэтому наименьшее значение абсциссы точки пересечения графика функции последования и биссектрисы всегда равно 1, и наиболее вероятным установившимся движением является  $T=1(1)$ . Рассмотрим случай  $A=2$ . Диаграмма Ламерея для  $L=12$ ,  $a=7/11$  показана на рис. 3, а. Здесь график функции последования пересекается с биссектрисой при  $x \in \{3, 4, 5\}$ . Следовательно, при старте из точек  $[x] \in [-6; 3]$  в

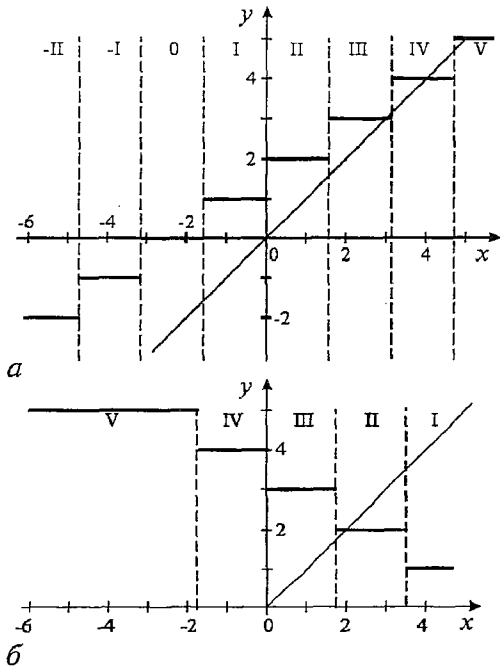


Рис. 3. Диаграммы Ламерея для  $L=12$ : а -  $A=2$ ,  $a=7/11$ ; б -  $A=4$ ,  $a=-4/7$

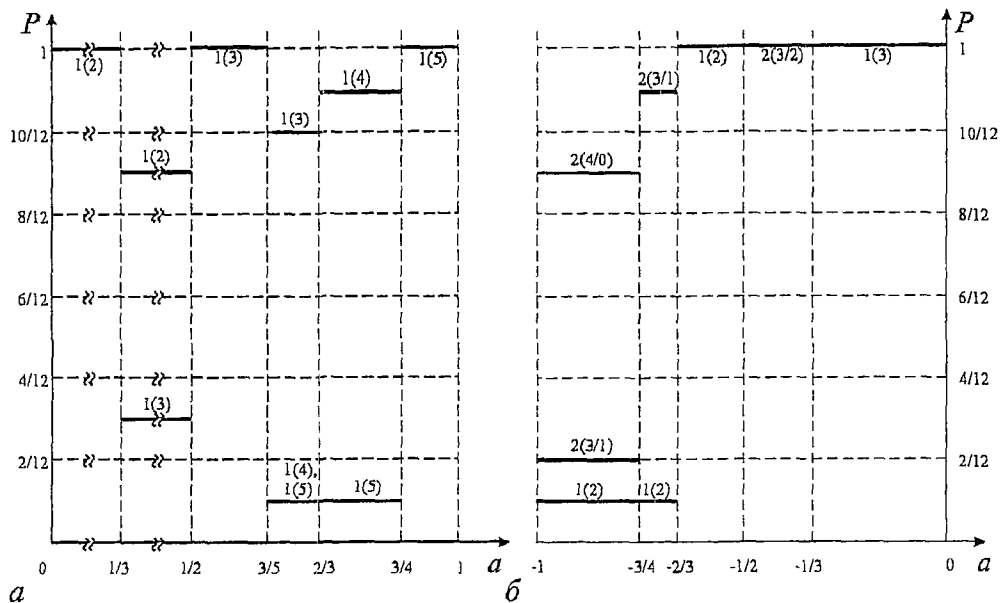


Рис. 4. Вероятностные диаграммы для  $L = 12$ : а - фильтра нижних частот при  $a=7/11, A=2$ ; б - фильтра верхних частот при  $a=-4/7, A=4$

цепи устанавливается колебание  $T=1(3)$ . При старте из точек  $x \in \{4, 5\}$  имеем, соответственно, движения  $T=1(4), T=1(5)$ . Вероятности колебаний  $P(3)=10/12, P(4)=P(5)=1/12$ . Рассмотрение движений при  $a \in (0, 1)$  позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 4, а.

Анализ колебаний для ряда значений  $L$  и  $A$  позволил определить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений величины  $x=X$ . При  $A=1$  на выходе фильтра всегда имеем  $T=1(1)$ . Если внешнее воздействие удовлетворяет условию  $1 < A < N_1$ , то в фильтре нижних частот устанавливается наиболее вероятное движение  $T=1(X)$ , где  $A \leq X < N_1$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X-1$  принадлежат области  $X$ . Это означает выполнение условия

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X - 1) + A < X + 1,$$

откуда следует

$$(X - A)/(X - 1) \leq a < (X + 1 - A)/X.$$

В случае  $X=N_1$  необходимо, чтобы точка  $x=N_1-1$  на диаграмме Ламерея принадлежала области  $N_1$ . Это означает, что

$$a \geq (N_1 - A)/(N_1 - 1);$$

верхним значением этого диапазона является  $a < 1$ . Заметим, что при этом движение  $T=1(N_1)$  является единственным. При  $A=N_1, a \in (0, 1)$  на выходе фильтра имеем единственное установившееся колебание  $T=1(N_1)$ .

Полученные закономерности позволяют найти зависимость  $X(a)$  для любых  $L$  и  $A$ . Эту зависимость можно сравнить с идеальной при  $L = \infty$ , которая установлена в [5].

Пусть  $a < 0$ . При  $A=1$  для всех значений  $L$  и  $-1 < a < 0$  график функции последования не пересекается с биссектрисой, точки  $x=0$  и  $x=1$  на диаграмме Ламерея принадлежат соответственно областям I и 0, в фильтре возникают только паразитные колебания с периодом  $T=2$  и мгновенными значениями  $x \in \{0, 1\}$ . Ниже это обозначается  $T=2(1/0)$ . При  $A > 1$  картина меняется. Рассмотрим случай  $A=4$ . В качестве примера на рис. 3, б приведена диаграмма Ламерея для  $L=12, a=-4/7$ . Здесь

график функции последования пересекается с биссектрисой в единственной точке при  $x=2$ . Это означает, что при старте из точек  $[x] \in [-6; 5]$  в фильтре устанавливаются колебания  $T=1(2)$ . При других значениях параметра  $a$  может возникать движение  $T=1(3)$ , а также паразитные колебания с периодом  $T=2$  и различными мгновенными значениями. Рассмотрение движений при  $a \in (-1; 0)$  позволяет построить бифуркационную и вероятностную диаграммы. Последняя показана на рис. 4, б.

Анализ колебаний для ряда значений  $A > 1$  и  $L$  позволил установить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений величины  $X$ . В общем случае произвольного  $1 < A \leq N_1$  на выходе фильтра верхних частот имеем  $T=1(X)$ , где  $1 < X < A$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X-1$  или точки  $X$  и  $X+1$  принадлежат области  $X$ . Это означает выполнение условия

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X - 1) + A < X + 1$$

или

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X + 1) + A < X + 1.$$

Откуда следует

$$(X - A)/X \leq a < (X + 1 - A)/(X - 1) \quad (1)$$

или

$$(X - A)/(X + 1) \leq a < (X + 1 - A)/X. \quad (2)$$

В этом же диапазоне значений  $A$  на выходе фильтра имеем  $T=1(1)$ , если выполняется (2). Другим по сравнению с определяемыми (1) и (2) областям параметра  $a < 0$  соответствуют наиболее вероятные паразитные колебания с периодом  $T=2$ .

Полученные закономерности позволяют установить зависимость  $X(a)$  для произвольных  $L$  и  $A$ . Эту зависимость можно сравнить с идеальной при  $L = \infty$ , которая рассчитывается с помощью методики, разработанной в [5].

Рассмотрим случай  $A < 0$ . Воспользовавшись методикой, описанной выше, получаем следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся колебаний при произвольных  $L$  и  $A$ .

При  $a > 0$ ,  $-N+1 < A < 0$  на выходе фильтра имеем колебание  $T=1(X)$ , где  $-N < X < A$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X+1$  принадлежат области  $X$ . Это означает выполнение условия

$$X \leq aX + A < X + 1 \cap X \leq a(X + 1) + A < X + 1,$$

откуда следует

$$(X + 1 - A)/(X + 1) < a \leq (X - A)/X.$$

В этом же диапазоне значений  $A$  в случае  $X = -N$  необходимо, чтобы точка  $X+1$  принадлежала области  $-N$ . Это означает, что

$$a > (-N + 1 - A)/(-N + 1);$$

верхней границей этого диапазона является  $a < 1$ . При  $A \in \{-N, -N+1\}$  имеем единственное установившееся движение  $T=1(-N)$ .

Если  $a < 0$ ,  $A = -1$ , то на выходе фильтра всегда существует единственное колебание  $T=1(-1)$ , так как на плоскости состояний для границы областей  $-1, 0$  имеем  $x < -1$ , и единственная точка пересечения графика функции последования и биссектрисы соответствует  $x = -1$ . Для  $-N \leq A < -1$  в фильтре верхних частот имеем наиболее вероятное установившееся колебание  $T=1(X)$ , где  $A \leq X < -1$ , если на диаграмме Ламерея точки  $X$  и  $X-1$  или точки  $X$  и  $X+1$  принадлежат области  $X$ .

Результирующие соотношения получаются из (1), (2) только заменой знаков  $\geq$  и  $<$  на  $\leq$  и  $>$ , соответственно.

Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием. Полученные закономерности нетрудно распространить на случай, когда переменные представляются в форме чисел с выравниванием слева (то есть в виде дробных чисел). Для этого достаточно ввести новую переменную  $\bar{x} = xq$ , где  $q=1/N$  - шаг квантования.

### Заключение

Рассмотрены цифровые фильтры нижних и верхних частот, реализуемые на базе рекурсивной цепи первого порядка, с произвольным количеством уровней квантования с усечением по величине результатов сложения, когда сумматор без учета эффектов квантования имеет характеристику с насыщением. Для характеристики нелинейных динамических режимов предложены вероятностные диаграммы. Методом точечных отображений исследованы автономный режим и колебания при постоянном внешнем воздействии двух знаков. Получены выражения для расчетов наиболее вероятных установившихся режимов. Результаты могут быть использованы при создании систем передачи информации с цифровой обработкой сигналов. Предложенная методика может использоваться для исследования эффектов квантования в цифровых фильтрах нижних и верхних частот первого порядка (рекурсивных, рекурсивно-нерекурсивных) с представлением чисел в прямом, обратном или дополнительном кодах с округлением или усечением.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования России.*

### Библиографический список

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Каппелини В., Константинодис А. Дж., Эмилиан П. Цифровые фильтры и их применение. М.: Энергоатомиздат, 1983.
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
4. Брюханов Ю.А. Переходные процессы в рекурсивной системе второго порядка с нелинейностью насыщения // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 28.
5. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 4. С. 29.

Ярославский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.02.02  
после доработки 20.09.02

## QUANTIZATION EFFECTS IN DIGITAL FIRST ORDER RECURSIVE FILTERS WITH VALUES TRUNCATION

*Yu.A. Bryuhanov*

Free oscillation and oscillation under a constant level input signal in low-frequency and high-frequency filters are considered. We use fixed point numbers in additional code. The method of one-dimensional point mapping is applied. Dynamical regimes are characterized by probabilistic diagrams. Expressions for most probably oscillation in the filter's output with arbitrary numbers of quantization levels are defined. Given methods may be used for quantization effects investigation in the first-order digital filters with representation of the numbers in direct, inverse and additional code with rounding and truncation.



*Брюханов Юрий Александрович* - родился в Красноярске (1941), окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Область научных интересов - нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.