



КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ГЕНЕРАТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ ПОД ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ: СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА, ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Е.С. Мчедлова, Л.В. Красичков

Предложена радиофизическая модель генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента. Проведены экспериментальные исследования поведения предложенной модели генератора Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием. Построены карты динамических режимов генератора на плоскости управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) в натурном эксперименте. Проведены численные исследования особенностей поведения генератора. В ходе натурального и численного экспериментов показано, что переход к хаосу в генераторе происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. Показано, что структура языков синхронизации имеет вид, характерный для бифуркационной ситуации типа crossroad area.

Введение

Классическим примером автоколебательных систем является генератор Ван дер Поля. Такая система уже более семидесяти лет с момента ее появления является основной модельной автоколебательной системой с одной степенью свободы [1-3]. Классической радиотехнической реализацией данной системы является генератор на триоде с колебательным контуром в цепи сетки [2,3]. Математической моделью такой системы является обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с кубической нелинейностью, называемое уравнением Ван дер Поля.

Большой интерес представляет исследование особенностей поведения генератора Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием и, в частности, синхронизации колебаний и возникновения динамического хаоса (см., например, [4-7]).

Исследования неавтономного генератора Ван дер Поля предпринимались многими авторами. Так, еще в 1927 году Ван дер Поль и Ван дер Марк [1] при исследовании поведения генератора в режиме релаксационных колебаний под внешним воздействием обнаружили, что при изменении собственной частоты воздействия в системе возникают субгармонические колебания, кратные частоте воздействия. Кроме того, данные авторы заметили возникновение «нерегулярного

шума» перед переходом от одного субгармонического режима к другому. Пожалуй, это было одним из первых наблюдений хаотических колебаний в радиотехнической системе. Позднее, в 1945 году, Картрайт и Литлвуд [8], анализируя уравнение Ван дер Поля, показали, что при большом значении параметра нелинейности существуют сингулярные решения. В 1949 году Левинсон [9], аналитически анализируя уравнение Ван дер Поля, заменил кубическую нелинейность кусочно-линейной и доказал, что уравнение имеет сингулярные решения и в этом случае.

Однако до настоящего времени остаются трудности, связанные с созданием модели генератора Ван дер Поля под внешним периодическим воздействием, которая в натурном эксперименте демонстрировала бы переход к хаосу и допускала проведение адекватного численного моделирования. На пути создания таких моделей достаточно эффективным является построение кусочно-линейных моделей [10,11]. Так, в работе [11] на основе численного эксперимента показано, что в кусочно-линейной модели генератора Ван дер Поля под внешним периодическим воздействием возможен переход от периодических колебаний к хаотическим, причем переход к хаосу происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода.

В данной работе приводятся результаты натурального эксперимента по исследованию поведения модели генератора Ван дер Поля с симметричной кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента.

1. Реализация генератора в натурном и численном эксперименте

В классическом случае неавтономный генератор Ван дер Поля описывается уравнением

$$d^2x/dt^2 - \varepsilon(1-x^2)dx/dt + x = a\cos\omega t, \quad (1)$$

где x - переменная состояния, ε - параметр нелинейности, a - амплитуда внешнего воздействия, ω - частота внешнего воздействия.

Для построения радиофизической реализации генератора Ван дер Поля, которая адекватно описывалась бы уравнением (1), можно использовать последовательный контур. Тогда схема генератора представляет собой последовательное соединение генератора синусоидальных колебаний, катушки индуктивности, конденсатора, резистора и нелинейного элемента с S-образной вольт-амперной характеристикой (ВАХ) (рис. 1). На схеме обозначен нелинейный

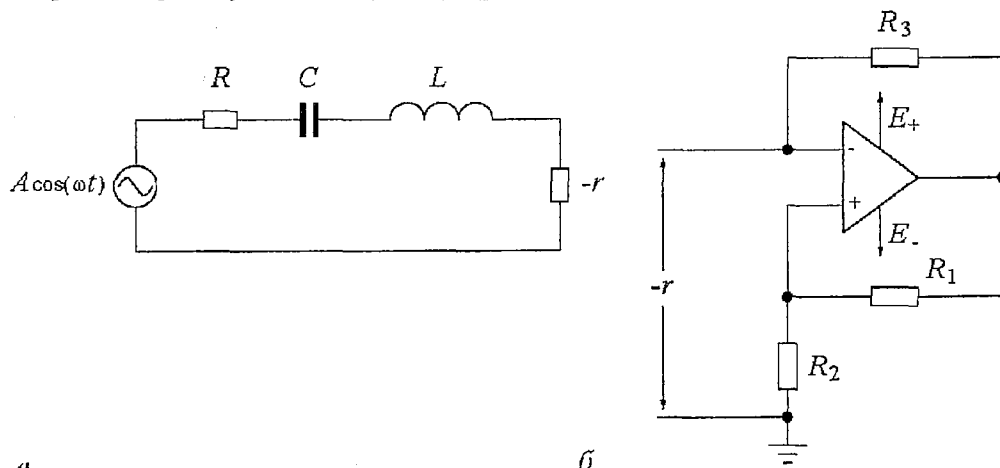


Рис. 1. Принципиальная схема генератора Ван дер Поля под внешним воздействием (а) и принципиальная схема нелинейного элемента с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой (б)

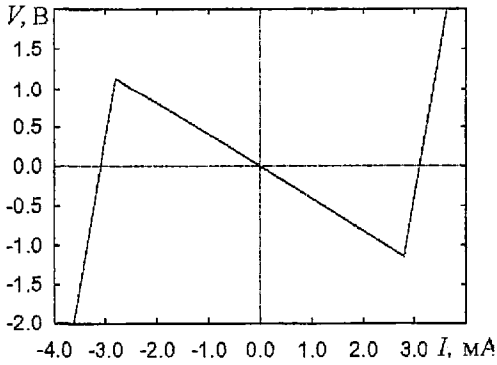


Рис. 2. Кусочно-линейная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента

составляло $R_- = -407$ Ом на участке ВАХ с отрицательным наклоном и $R_+ = 3800$ Ом там, где наклон характеристики положителен.

Пользуясь законом Кирхгофа, для приведенной на рис. 1, а модели генератора Ван дер Поля можно записать:

$$\begin{aligned} Ldl/dt + V_C + RI + V(I) &= A \cos \omega t, \\ dV_C/dt &= IC, \end{aligned} \quad (2)$$

где Ldl/dt - напряжение на индуктивности; RI - падение напряжения на резисторе; V_C - напряжение на емкости; $V(I)$ - функция, описывающая кусочно-линейную ВАХ S-типа нелинейного элемента «r»; A - амплитуда внешнего воздействия; ω - частота внешнего воздействия. Вводя безразмерные переменные $\tau = \omega_0 t$, $x = I/I_0$, $y = V/V_0$, $f(x) = V(I)/V_0$, $\Omega = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$, $\varepsilon = (V_0/I_0)(C/L)^{1/2}$, $A_0 = (A/I_0)(C/L)^{1/2}$, $G = R(C/L)^{1/2}$, можно окончательно записать

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= -Gx - \varepsilon y - \varepsilon f(x) + A_0 \cos \Omega \tau, \\ dy/d\tau &= (1/\varepsilon)x, \end{aligned} \quad (3)$$

где I_0, V_0 - значения тока и напряжения в экстремуме ВАХ.

Тогда, если нелинейность в уравнении (3) задается функцией $f(x) = 1/3x^3 - x$, то слагаемое $-Gx$ можно исключить с помощью перенормировки и получить уравнение (1). Таким образом, схема рис. 1, а и соответствующее ей уравнение адекватно описывают классический генератор Ван дер Поля под внешним воздействием (1).

2. Натурный эксперимент по исследованию поведения генератора

Для систем, находящихся под внешним воздействием, как правило, исследуют явление синхронизации собственных колебаний генератора внешней вынуждающей силой на плоскости управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия). Наиболее часто используется следующая схема классификации режимов: 1:1, 1:2, 1:3 и т.д. Данное обозначение режимов синхронизации ($m:n$) показывает отношение собственной частоты колебаний генератора (m) к частоте внешнего воздействия (n). Существуют так называемые основные режимы синхронизации, такие как 1:1, 1:2, 1:3, 3:1, 2:1 и т.д. Между ними расположены более сложные многопетлевые режимы высших порядков, такие как 2:5, 3:5, 2:3, 7:2, 5:2 и т.д. Все это режимы с рациональным соотношением частот.

Кроме того, существуют области, для которых это соотношение иррационально - области квазипериодических колебаний.

Экспериментальное исследование поведения неавтономного генератора Ван дер Поля сводится к построению границ различных режимов синхронизации на плоскости управляющих параметров. При проведении экспериментальных исследований в данной работе были выбраны следующие значения номиналов элементов схемы рис. 1, а: $R=92.2$ Ом, $C=45.3$ нФ, $L=2.07$ мГн.

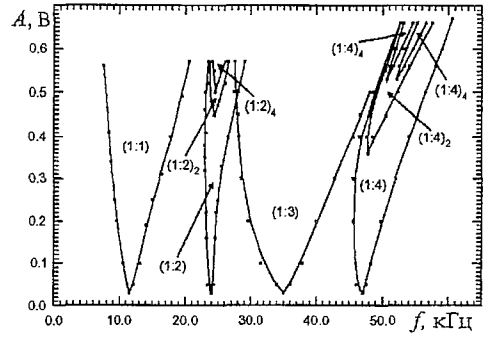


Рис. 3. Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) для генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента - натуральный эксперимент

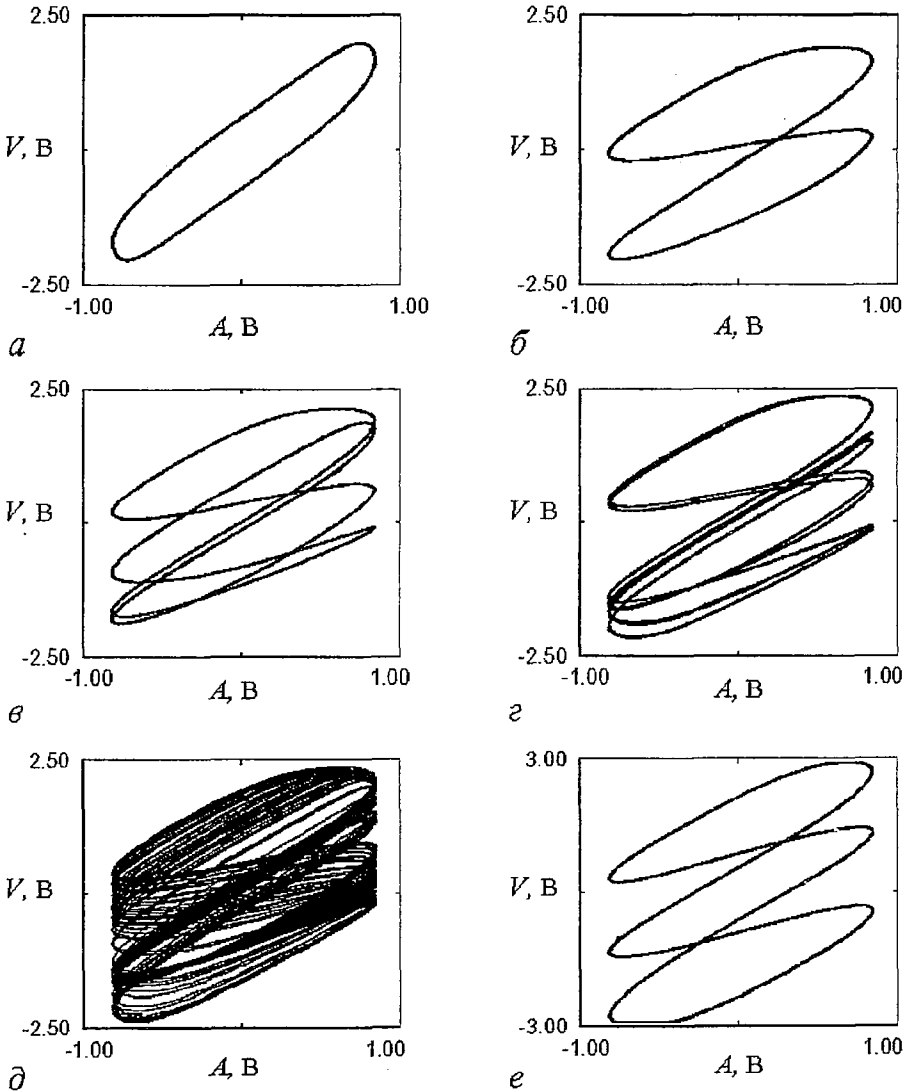


Рис. 4. Проекция фазовых портретов при $A=0.55$ и $f_0=12.0$ кГц (1:1) (а), $f_0=23.2$ кГц (1:2) (б), $f_0=23.7$ кГц (1:2)₂ (в), $f_0=24.1$ кГц (1:2)₄ (г), $f_0=24.3$ кГц (1:2)_С (д), $f_0=32.7$ кГц (1:3) (е) для характерных динамических режимов, изображенных на плоскости параметров рис. 3

Границы режимов определялись по качественному изменению топологии фазового портрета при изменении одного или одновременно двух управляющих параметров. Необходимость изменения двух параметров связана с неоднозначностью или мультистабильностью поведения генератора. Такая неоднозначность поведения проявляется как наличие гистерезисных границ различных колебательных режимов. Кроме того, можно предположить существование таких областей, попасть в которые можно только при изменении двух параметров одновременно.

При построении динамических режимов системы на плоскости управляющих параметров был принят следующий способ изображения. Различные режимы представлялись в виде языков синхронизации, при этом листы синхронизации более высоких порядков располагаются под листами более низких порядков. Например, язык синхронизации 1:2 может частично располагаться под языком синхронизации 1:1. Области удвоения периода обозначались подстрочными индексами (например, $(1:2)_2$, $(1:2)_4$).

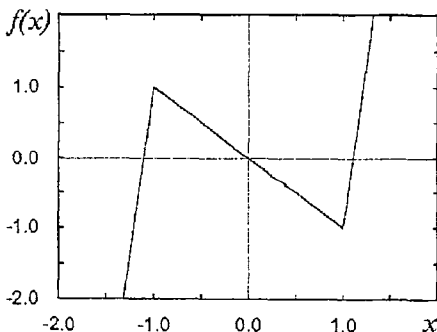
Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) для генератора Ван дер Поля (см. рис. 1) с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента (см. рис. 2) представлена на рис. 3. Проекция фазовых портретов для характерных динамических режимов, изображенных на плоскости параметров, представлены на рис. 4, где по оси абсцисс отображается амплитуда внешнего воздействия, по оси ординат - амплитуда напряжения в точке соединения емкости C и индуктивности L .

В области $f \sim 30$ кГц, $A \sim 0.6$ (см. рис. 3) наблюдается перекрытие языков синхронизации (1:2) и (1:3). Хаотические режимы со странным аттрактором наблюдаются внутри языков синхронизации (1:2) и (1:4) в областях $(1:2)_2$, $(1:2)_4$. Как видно из рис. 3, внутренняя структура языка синхронизации (1:4) имеет вид, характерный для бифуркационной ситуации типа *crossroad area* [14].

3. Исследование поведения генератора в численном эксперименте

При проведении численного моделирования поведения неавтономного генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента [9] использовались уравнения генератора, записанные в безразмерном виде (3). Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента (см. рис. 2) приводилась к безразмерному виду (рис. 5). В аналитическом виде кусочно-линейную ВАХ можно описать уравнением

$$f(x) = \begin{cases} 9.52x + 10.52, & x < -1.0, \\ -1.0x, & -1.0 \leq x \leq 1.0, \\ 9.52x - 10.52, & x > 1.0. \end{cases} \quad (4)$$



Исходя из значений нормировочных множителей ($I_0=2.8$ мА, $V_0=1.14$ В) и номиналов элементов схемы рассчитывались параметры системы (3) ($G=0.43$, $\epsilon=1.87$).

Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего

Рис. 5. Нормированная кусочно-линейная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента, описываемая уравнением (4)

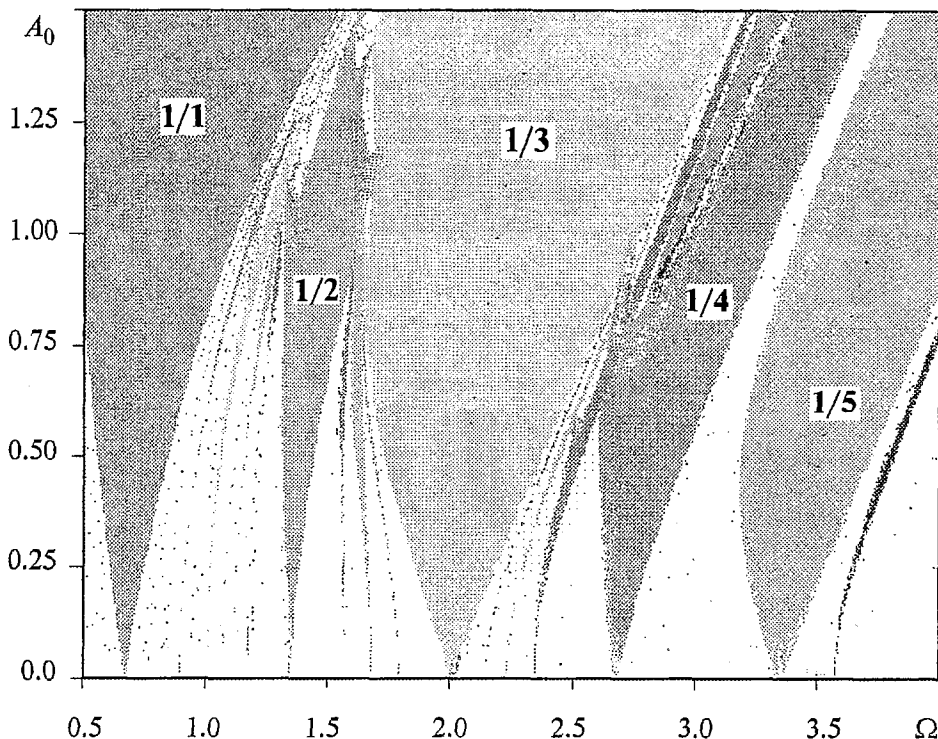


Рис. 6. Плоскость управляющих параметров (амплитуда - частота внешнего воздействия) для генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента - численный эксперимент

воздействия) для системы (3) с кусочно-линейной ВАХ нелинейного элемента (4), полученная в численном эксперименте, представлена на рис. 6. При построении плоскости параметров интегрирование системы (3), (4) осуществлялось методом Рунге - Кутты 4-го порядка. Шаг интегрирования $h=0.05$. Определение режима синхронизации проводилось по сечению Пуанкаре (точки в сечении выбирались через период внешнего воздействия).

На рис. 6 видны характерные для системы языки синхронизации. Внутри языков синхронизации 1:2 и 1:4 наблюдается переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода. Кроме того, внутреннее устройство языков синхронизации 1:2 и 1:4 позволяет сделать вывод о том, что реализуется ситуация типа *crossroad area*.

Сравнение плоскостей параметров, полученных в натурном и численном экспериментах (рис. 3 и 6), говорит о качественном соответствии результатов экспериментов. Кроме того, если с помощью нормировочных коэффициентов, введенных в разделе 1, пересчитать границы областей синхронизации, полученных экспериментально, то можно отметить и количественное совпадение результатов натурального эксперимента и численного моделирования.

Заключение

В данной работе предложена радиофизическая реализация модели генератора Ван дер Поля с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента, приводятся результаты натурального эксперимента по исследованию поведения модели данного генератора под внешним гармоническим воздействием. Проведены исследования поведения генератора на плоскости

управляющих параметров (частота - амплитуда внешнего воздействия). Особое внимание уделялось выявлению областей на плоскости управляющих параметров, в которых наблюдается хаотическое поведение, а также исследованиям внутренней структуры таких областей. Показано, что внутри языков синхронизации 1:2 и 1:4 (отношение собственной частоты колебаний генератора к частоте внешнего воздействия) переход к хаосу осуществляется через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Компьютерное моделирование поведения генератора Ван дер Поля проводилось для системы уравнений, записанной исходя из экспериментальной реализации модели при значениях параметров, используемых в натурном эксперименте. Сравнение карт динамических режимов, полученных в результате численного и радиофизического эксперимента, показало не только качественное, но и количественное соответствие границ областей синхронизации и хаоса. Область на плоскости управляющих параметров, находящаяся внутри языков синхронизации 1:2 и 1:4, где наблюдается переход к хаосу, имеет вид, характерный для бифуркационной ситуации типа *crossroad area*.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 02-02-16351, 00-15-96673, КЦФЕ МО РФ, грант № E00-3.5-196, и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF), грант REC-006.

Библиографический список

1. *Van der Pol B., Van der Mark J.* Frequency demultiplication // *Nature*. 1927. Vol. 120, № 3019. P. 363-364.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний // М.: Физматгиз, 1959.
3. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн // М.: Наука, 1984.
4. *Kennedy M.P., Chua L.O.* Van der Pol and chaos // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1986. Vol. 33, № 10. P. 974-980.
5. *Ueda Y., Akamatsu N.* Chaotically transitional phenomena in the forced negative-resistance oscillator // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1981. Vol. 28, № 3. P. 217-223.
6. *Qin G.R., Gong D.C., Wen X.D.* Rich bifurcational behaviour of the driven Van der Pol oscillator // *Phys. Lett. A*. 1989. Vol. 141, № 8,9. P. 412-416.
7. *Parlitz U., Lauterborn W.* Period doubling cascades and devil's staircases of the driven Van der Pol oscillator // *Phys. Rev. A*. 1987. Vol. 36, № 3. P. 1428-1434.
8. *Cartwright M.L., Littlewood J.E.* On non-linear differential equations of the second order: The equation $y+k(1-y^2)y+y=blkc\cos(\lambda t+a)$, k large // *J. London Math. Soc.* 1945. Vol. 20. P. 180-189.
9. *Levinson N.* A second order differential equation with singular solutions // *Ann. Math.* 1949. Vol. 50. P.127-153.
10. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The double scroll // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. 1985. Vol. 32, № 8. P. 798-818.
11. *Mchedlova E.S.* Chaotic oscillations in the piece-wise linear approximation of the driven Van der Pol equation // In: the Proceedings of the 5th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES-97) (Moscow, Russia, June 26-27, 1997), Moscow: 1997. P. 449-452.
12. *Тутце У., Шенк К.* Полупроводниковая схемотехника. М.: Мир. 1982.
13. *Chua L.O., Desoer C., Kuh E.* Linear and nonlinear circuits. McGraw-Hill Book Company. 1987.

14. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3, 4. С. 17-35.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 31.07.02
после переработки 29.09.02

THE PIECEWISE-LINEAR MODEL OF THE VAN DER POL OSCILLATOR UNDER EXTERNAL PERIODIC FORCE: COMPLEX DYNAMICS, PECULIARITIES OF BEHAVIOUR AT THE PARAMETER PLANE

E.S. Mchedlova and L.V. Krasichkov

The electronic model of Van der Pol oscillator with piecewise-linear current-voltage characteristics of nonlinear element is proposed. Experimental investigations of behaviour of the Van der Pol oscillator under external sinusoidal force were carried out. The parameter plane (external force amplitude - frequency) for the dynamical regimes of the oscillator was experimentally plotted. Numerical simulations of peculiarities of the oscillator model were carried out. In natural and numerical experiments it was shown that transition to chaos in the oscillator takes place through the period doubling cascade. It was revealed that the internal structure of the synchronization tongues looks typically as for the crossroad area.



Мчедлова Елена Сумбатовна - окончила Саратовский государственный университет (1993). Кандидат физико-математических наук (1996). Доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика распределенных систем, компьютерное моделирование в физике и биологии, методы анализа динамических систем. Автор ряда работ по построению и исследованию моделей структурированных потоков со сверхизлучением, изучению взаимодействий в больших ансамблях связанных автоколебательных систем, в том числе книги «Введение в теорию самоорганизации открытых систем» (М.: Физматлит, 2002, совместно с Д.И. Трубецковым и Л.В. Красичковым). E-mail: esm@cas.ssu.runnet.ru



Красичков Леонид Валерьевич - окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиопизика. Работал в Научно-исследовательском институте механики и физики СГУ. Доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, количественные характеристики сложнопериодического и хаотического поведения динамических систем, преобразование хаотических колебаний цепями и средами. Автор и соавтор более 50 научных публикаций, в том числе книги «Введение в теорию самоорганизации открытых систем» (М.: Физматлит, 2002, совместно с Д.И. Трубецковым и Е.С. Мчедловой).