



ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЗАРЯДОВ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

В.Б. Байбурин, А.О. Мантуров, А.В. Юдин

Проведено численное исследование модели поведения зарядов в скрещенных полях при изменении параметров возмущающего поля, циклотронной частоты, начальных скоростей в условиях пространственно-однородного и радиально-неоднородного магнитного поля. На основе расчета показателей Ляпунова определены области существования регулярного и хаотического поведения системы, получены карты показателей Ляпунова, исследована трансформация фурье-спектров.

Особенности движения зарядов в скрещенных электрическом и магнитном полях являются предметом анализа во многих областях математической физики [1-3 и др.]: физике замагниченной плазмы, астрофизике, теории электронных приборов и др. Характер траекторий заряженных частиц, по существу, определяет параметры (энергетические, шумовые, частотные) многих электронных устройств ускорителей, генераторов и усилителей М-типа, магнитных ловушек и др. (см., например, [4-6]). В связи с этим особое значение приобретают малоисследованные задачи анализа условий возникновения хаотических режимов динамической системы «заряд в скрещенных электромагнитных полях». Решение таких задач, с одной стороны, представляется необходимым для углубленного понимания механизма физических процессов в отмеченных выше устройствах, а с другой, имеет самостоятельный интерес как малоизученный объект теории динамических систем.

1. Случай пространственно-однородного магнитного поля. В известных работах [7, 8] при рассмотрении системы «заряд - скрещенные электромагнитные поля» уравнения движения, как правило, сводятся к одномерному уравнению возмущенного линейного осциллятора. Однако в таком случае остается неясным характер «реальных» траекторий зарядов, являющихся в ортогональных электрическом и магнитном полях принципиально двумерными, а также вид областей хаотичности непосредственно в пространстве физических параметров (частота, амплитуда возмущающего поля, начальные скорости и др.).

Мы считаем целесообразным описать области хаотичности в подобных системах с учетом большего числа фазовых переменных (в том числе, двух пространственных координат) и другого вида возмущения (в частности, зависящего от координаты y), включив в рассмотрение динамических режимов также расчет «реальных» траекторий движения заряда.

В прямоугольной системе координат (x, y) применительно к схеме на рис. 1

уравнения движения заряда в скрещенных полях можно представить в следующем виде (см., например, [4-6]):

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= f_x(\omega, x, y, t) + \Omega dy/dt, \\ d^2y/dt^2 &= -\Omega dx/dt, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f_x(\omega, x, y, t)$ - функция, соответствующая возмущению за счет переменного электрического поля, имеющего компоненту вдоль оси x ; ω - частота возмущающего электрического поля; Ω - циклотронная частота. Уравнениям (1) можно поставить в соответствие четырехмерное фазовое пространство с фазовыми переменными $x, y, v_x=dx/dt, v_y=dy/dt$, где, в частности, фазовым переменными x, y соответствуют «реальные» координаты заряда в плоскости (x, y) .

Для численного решения уравнений движения и определения величин фазовых переменных использовался неявный метод, изложенный в работе [9]. В расчетах принималось, что возмущающая функция имеет вид $f_x(x, y, t) = F_{0x} \sin \cos \omega t$, что соответствует плоской стоячей волне.

Как следует из уравнений (1), параметрами, влияющими на характер фазовых траекторий рассматриваемой системы, являются частота ω и амплитуда возмущения F_{0x} , циклотронная частота Ω , а также начальные скорости заряда v_{0x}, v_{0y} .

С физической точки зрения представляется удобным разделить эти параметры на группу, назовем ее условно, «энергетических» параметров (F_{0x}, v_{0x}, v_{0y}), и группу частотных параметров (ω, Ω).

На рис. 2 представлены области существования хаотических и регулярных траекторий зарядов в плоскости энергетических параметров. На рис. 3 указанные области представлены в плоскости частотных параметров (ω, Ω). Эти области («ляпуновское пространство» [10]) получены на основе расчета [11] показателей Ляпунова и окрашены в различные оттенки серого цвета. При этом белый цвет соответствует регулярным траекториям (показатель Ляпунова меньше нуля),

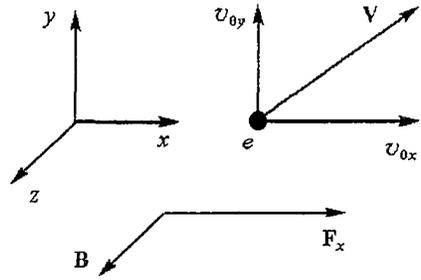


Рис. 1. Постановка моделируемой задачи. Отмечена прямоугольная система координат (x, y, z) , направление вектора индукции магнитного поля \mathbf{B} , вектора электрического возмущающего поля \mathbf{F}_x

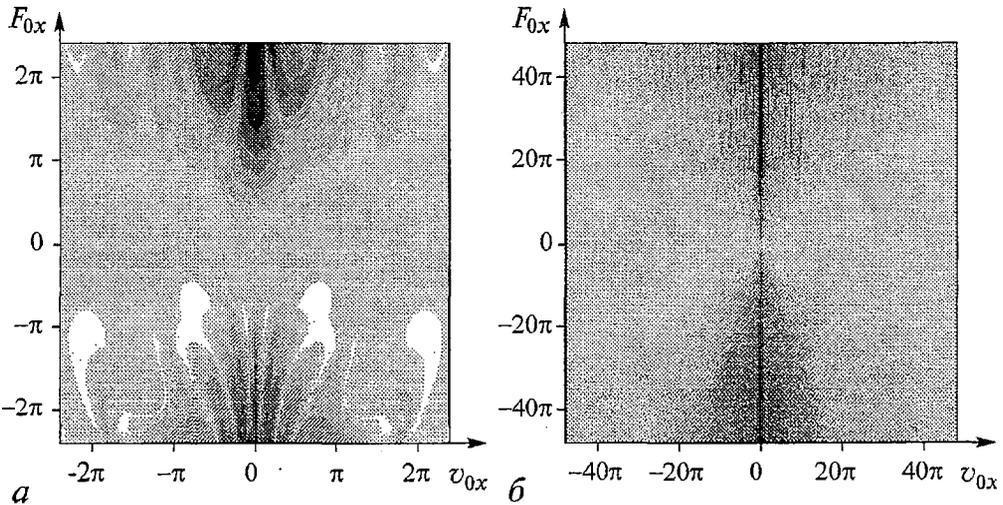


Рис. 2. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (F_{0x}, v_{0x}) : а - увеличенный масштаб, б - уменьшенный масштаб; $\omega=0.5, \Omega=2, v_{0y}=0, x_0=y_0=\pi$

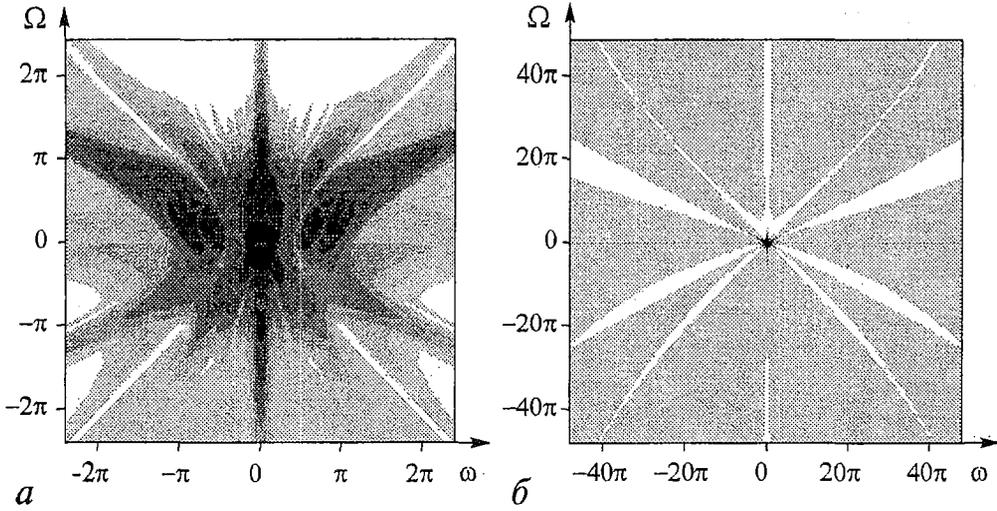


Рис. 3. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (Ω, ω) : *a* - увеличенный масштаб, *б* - уменьшенный масштаб; $F_{0x}=2\pi, v_{0x}=v_{0y}=0, x_0=y_0=\pi$

градации темного цвета соответствуют различным положительным значениям показателя по мере роста его величины.

На рис. 2 показаны в разных масштабах типичные картины областей хаотичности и регулярного поведения при различных значениях величин F_{0x} и начальной скорости v_{0x} . Видно, что эти области имеют сложную структуру, детали которой лучше видны при увеличенном масштабе (рис. 2, *a*).

На рис. 3 представлены характерные конфигурации областей хаотичности и устойчивости, определяемые заданием множества пар значений теперь уже частотных параметров. Эти области также имеют сложную структуру.

Рис. 4 отражает влияние на области хаотичности начальных скоростей и координат. Видно, что эти области имеют вихреобразную периодическую структуру.

Типичный вид хаотических и регулярных траекторий в плоскости координат представлен на рис. 5. Из рис. 5, *a* видно, что в хаотическом режиме траектории зарядов, стартующих при практически совпадающих начальных условиях, с течением времени быстро расходятся, для них показатель Ляпунова положителен.

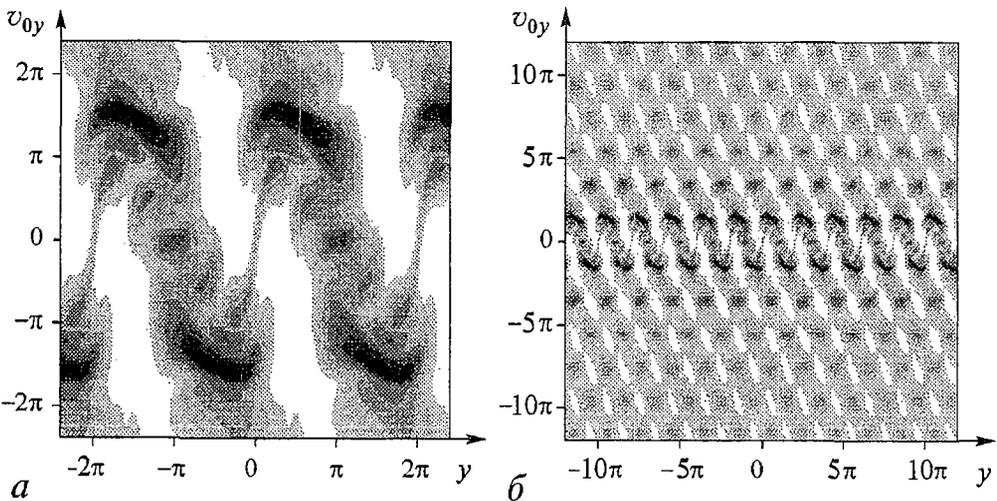


Рис. 4. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (v_{0y}, y_0) : *a* - увеличенный масштаб, *б* - уменьшенный масштаб; $F_{0x}=2, \omega=1.5, \Omega=2, v_{0x}=0, x_0=\pi$

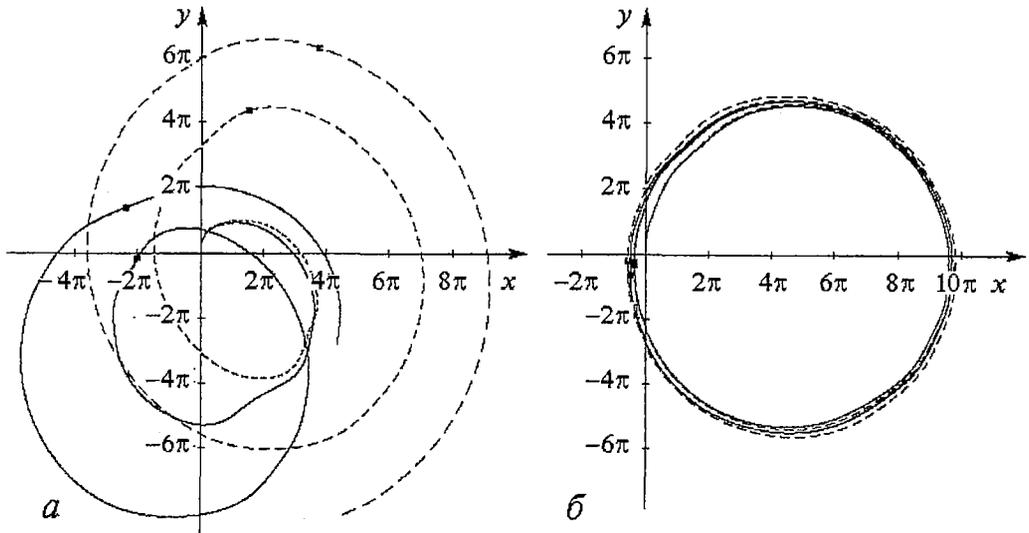


Рис. 5. Типичные траектории зарядов: *а* - для области хаотических режимов, $F_{0x}=1$, $\omega=\Omega=0.3$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=3\pi/4$, $x_0=y_0=0$; *б* - для области устойчивого поведения, $F_{0x}=1$, $\omega=\Omega=0.3$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=1.5\pi$, $x_0=y_0=0$

Пример регулярных траекторий представлен на рис. 5, б, где две траектории, имеющие ту же незначительную разницу в начальных условиях, по существу, совпадают, для них показатель Ляпунова меньше нуля.

На рис. 6 представлены спектры мощности колебаний, возбуждаемых в

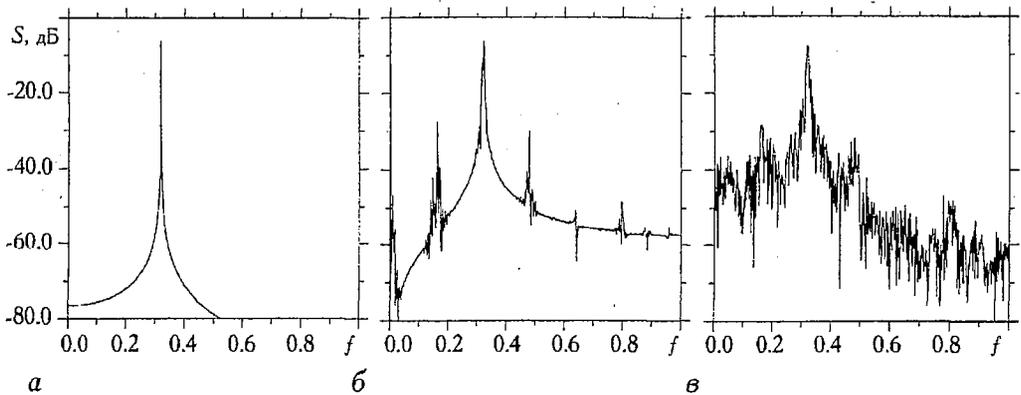


Рис. 6. Спектры мощности: *а* - для области существования периодических колебаний ($F_{0x}=0$); *б* - для области многочастотных колебаний ($F_{0x}=0.2$); *в* - для области хаотических колебаний ($F_{0x}=\pi$); $\omega=1.0$, $\Omega=2.0$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=\pi$, $x_0=0$, $y_0=-\pi$

системе. Для расчета спектров использованы реализации координаты $x(t)$. Рис. 6, *а* соответствует режиму периодического движения заряда в отсутствие возмущающего поля, спектр содержит одну компоненту, соответствующую циклотронной частоте. При увеличении амплитуды возмущающего электрического поля F_{0x} от нуля до достаточно малых ($F_{0x} \ll \pi$) значений, в системе реализуются многочастотные колебания (рис. 6, *б*), что соответствует набору дискретных частотных компонент, две из которых с наименьшими значениями частоты - частота внешнего воздействия (возмущающего поля) и циклотронная частота. При дальнейшем увеличении амплитуды возмущающего поля происходит хаотизация колебаний (рис. 6, *в*).

На рис. 7 приведены спектры мощности колебаний заряда, рассчитанные для случая иррационального отношения ($\pi:1$) циклотронной частоты и частоты возмущающего поля. При этом использовались те же значения амплитуды

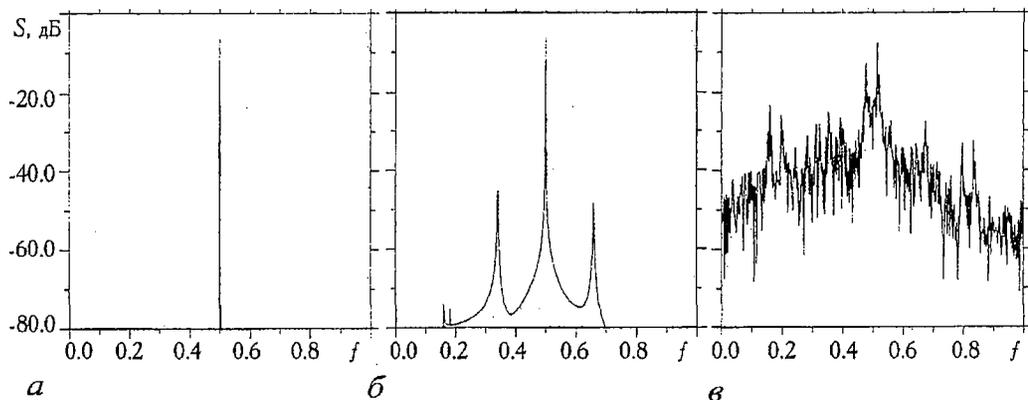


Рис. 7. Спектры мощности для случая иррационального отношения циклотронной частоты и частоты возмущающего поля: *a* - для области существования периодических колебаний ($F_{0x}=0$); *б* - для области многочастотных колебаний ($F_{0x}=0.2$); *в* - для области хаотических колебаний ($F_{0y}=\pi$); $\omega=1.0$, $\Omega=\pi$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=\pi$, $x_0=0$, $y_0=-\pi$

возмущающего электрического поля F_{0x} , что и для случаев, представленных на рис. 6. Хорошо видно, что особенности трансформации спектра мощности, в общем, сохраняются и для данного случая: появляется набор дискретных частотных компонент, при дальнейшем слиянии которых возникает сплошной спектр, характерный для режима с хаотической динамикой. Указанная последовательность трансформации спектра мощности позволяет сделать предположение о реализации в исследуемой системе сценария перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения [12]. Для случаев, когда частота возмущающего поля ниже циклотронной, или когда эти частоты равны, сценарий перехода к хаосу аналогичен описанному ранее, однако необходимо отметить, что такие ситуации представляют меньший практический интерес.

2. Случай радиально изменяющегося магнитного поля. Многие практически важные задачи физики плазмы и теории электронных приборов сводятся к изучению влияния на физические процессы изменяющегося с пространственными координатами магнитного поля (магнитные ловушки - пробкотроны, системы фокусировки электронных пучков и т.п.).

Насколько известно авторам, в подобных задачах до сих пор не рассматривалось влияние пространственного изменения магнитного поля на хаотичность движения зарядов. В данной части работы рассмотрены некоторые особенности поведения зарядов в скрещенных полях с учётом экспоненциально нарастающего при удалении от центра магнитного поля.

Будем считать магнитное поле, соответственно Ω , зависящим от координат x , y

$$\Omega = \Omega_0 e^{\alpha r}, \quad \text{где } \alpha - \text{постоянный коэффициент, } |r| = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Такое представление означает, что магнитное поле возрастает по экспоненте концентрически от начала координат.

На рис. 8, *a* представлена типичная траектория заряда, исходящая из области минимума магнитного поля. Видно, что траектория имеет в начале хаотический характер, но по мере дрейфа в область сильного магнитного поля становится регулярной. На рис. 8, *б* показан «хвост» траектории в увеличенном масштабе (на рис. 8, *a* отмечен прямоугольником). Видно, что траектория носит регулярный циклоидальный характер. Эту закономерность подтверждает и расчёт показателей Ляпунова вдоль траектории (рис. 9), которые вначале положительны, а затем становятся отрицательными.

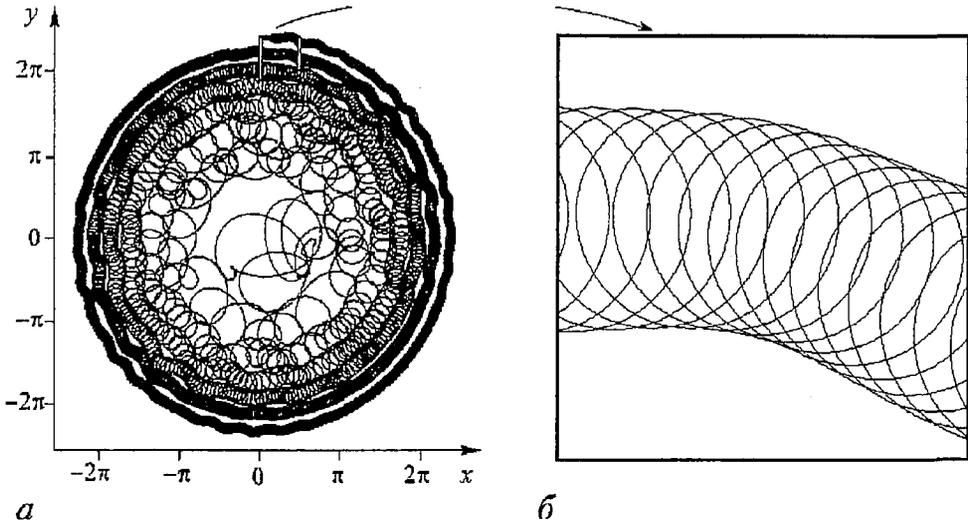


Рис. 8. Типичная траектория заряда: $F_{0x}=1$; $\omega=\pi/4$; $\Omega=0.5$; $v_{0x}=0$; $v_{0y}=0$; $x_0=\pi/2$; $y_0=-\pi/2$; $\alpha=0.5$; $\Delta t=0.004 T_c$ (T_c - период циклотронной частоты, траектория рассчитывалась для времени в 2000 периодов T_c)

Рис. 10 отражает поведение спектра Фурье при движении вдоль траектории. Процедура расчета фурье-спектров имела некоторые особенности. Поскольку по мере увеличения t характерное значение циклотронной частоты изменяется (из-за увеличения расстояния до начала координат), число точек для расчета спектра должно быть ограничено сверху. В то же время, это число точек должно соответствовать как минимум 2÷3 периодам циклотронной частоты. В работе спектр мощности вычислялся по 5÷6 периодам T_c , что является компромиссом между указан-

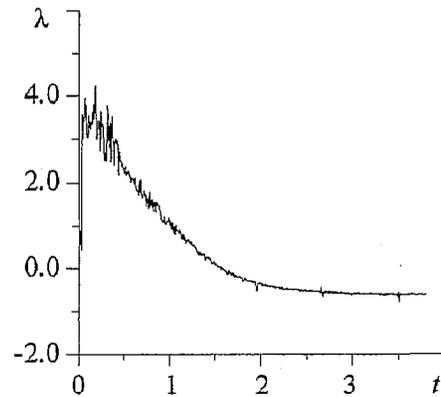
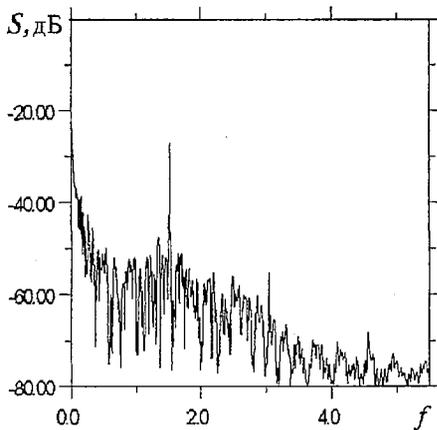
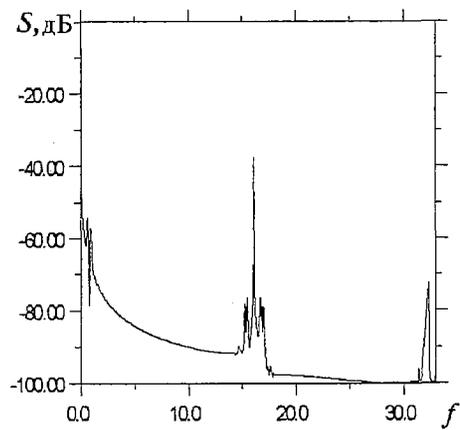


Рис. 9. Изменение показателя Ляпунова вдоль траектории (параметры системы такие же, как и для рис. 8, время t вдоль оси абсцисс указано в периодах циклотронной частоты)



а



б

Рис. 10. Вид спектральных характеристик (параметры системы такие же, как и для рис. 1): а - при начальных условиях; б - после движения вдоль траектории на 1000 периодов циклотронной частоты

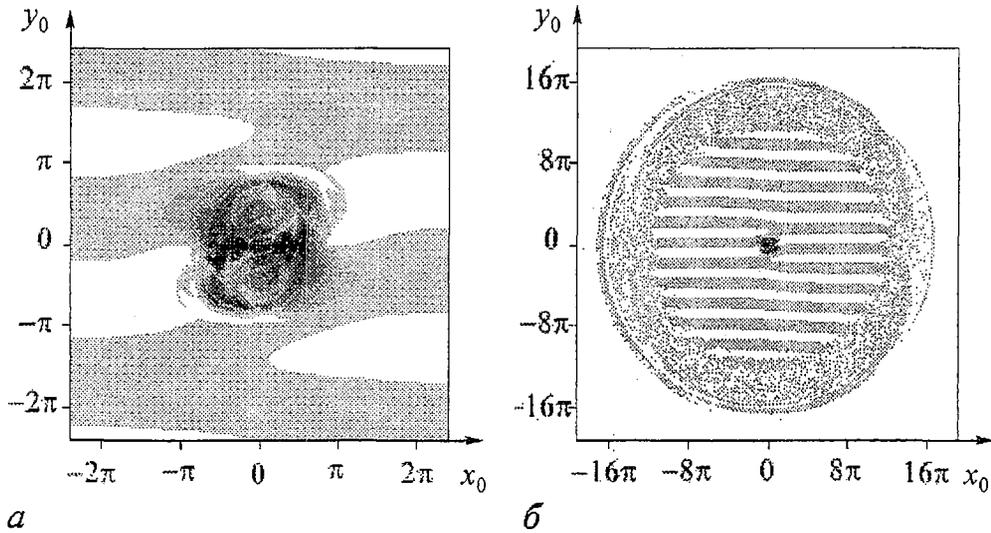


Рис. 11. Карты показателей Ляпунова в плоскости параметров (x_0, y_0) , параметры системы такие же, как и для рис. 8: *a* - увеличенный масштаб; *b* - уменьшенный масштаб

ными требованиями. Из рисунка видно, что с течением времени при достижении зарядом областей сильных магнитных полей спектр регуляризуется. Такое поведение зарядов (смена хаотичного движения на регулярное вдоль одной и той же траектории) объясняется тем, что, удаляясь от центра, заряд попадает в область сильных фокусирующих магнитных полей, которые регуляризуют движение. При увеличении амплитуды возмущающего поля область хаотичности радиально расширяется.

На рис. 11 в координатах реального пространства представлены в различных масштабах карты динамических режимов. Расчёты показывают, что области сильной хаотичности, соответствующие максимальным положительным значениям показателей Ляпунова (чёрный цвет), сосредоточены вблизи начала координат (минимум магнитного поля) и имеют сложный, в определённом смысле симметричный, характер. Конкретный вид областей вблизи центра зависит от начальных условий задачи, но сохраняет свою симметричность. По мере удаления от центра положительные показатели Ляпунова уменьшаются по величине (оттенки серого цвета) и становятся отрицательными (белый цвет). Эти особенности карт динамических режимов сохраняются при изменении исходных данных расчёта.

Таким образом, изменение магнитного поля, как и можно было ожидать, оказывает существенное влияние на поведение электронных траекторий в скрещенных полях, определяя в частности, такую их интересную особенность, как смена хаотичного вида траектории на регулярный.

Проведенные численные расчеты показали существенное влияние энергетических и частотных параметров рассматриваемой системы на характер фазовых траекторий. При этом имеет место определенная устойчивость характера областей существования хаотических и регулярных траекторий в плоскости частотных параметров при изменении энергетических, и наоборот.

Библиографический список

1. Ленерт Б. Динамика заряженных частиц / Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1967. 251 с.
2. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, Ф-МЛ, 1976. 238 с.

3. Байбурин В.Б., Терентьев А.А., Гаврилов М.В., Поваров А.Б. Трехмерные цилиндрические уравнения движения электронов в неоднородных скрещенных полях // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 4.

4. Капица П.Л. Электроника больших мощностей. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1962. 196 с.

5. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Советское радио, 1973.

6. Байбурин В.Б., Соболев Г.Л. К анализу нелинейного режима плоского многорезонаторного магнетрона с учетом пространственного заряда // Радиотехника и электроника. 1967. № 3.

7. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991.

8. Afraimovich V., Zaslavsky G.M. Fractal and multifractal properties of exit times and Poincare recurrences // Physical Review E. 1997. Vol. 55, № 5.

9. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.

10. Marcus M. Computers in Physics. 1980, Sept.-Oct. P. 481.

11. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.

12. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.

Саратовский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 8.02.02
после доработки 20.11.02

CHAOTIC BEHAVIOUR OF CHARGES IN CROSSED FIELDS

V.B. Bayburin, A.O. Manturov, A.V. Yudin

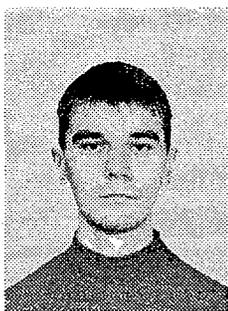
The study of numerical model for behaviour of charges in crossed electric and magnetic fields at the change of control parameters (disturbing field, cyclotron frequency and initial speeds of charge) was carried out. On the basis of Lyapunov exponents calculation the areas of existence of regular and chaotic behaviour of system are determined. Features of the electrons trajectories in the case of radial nonhomogeneous H field are discussed also. It is shown the movement of electrons in the area with strong H field leads to appearance of regular dynamics instead of chaotic one. The calculation of the Lyapunov exponents, power spectra, Lyapunov maps of regimes has been done.



Байбурин Вил Бариевич - родился в Оренбурге (1935). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1957). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1969) и доктора физико-математических наук в ИРЭ РАН в Москве (1984) в области электроники СВЧ. Заведующий кафедрой Саратовского государственного технического университета, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, действительный член РАЕН. Области научных интересов - компьютерное моделирование, электроника СВЧ, сканирующая зондовая микроскопия, применение СВЧ-энергии в технологических процессах. Автор более 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий.



Мантуров Алексей Олегович - родился в Саратове (1970). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1993). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГТУ (2001). В настоящее время - доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем СГТУ. Области научных интересов - физика нелинейных явлений в приборах вакуумной и твердотельной электроники, цифровая обработка сигналов, радикоммуникационные технологии. Автор более 20 научных публикаций. E-mail: mao@forpost.ru



Юдин Андрей Витальевич - родился в Саратове (1981). Студент 5-го курса кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем СГТУ. Области научных интересов - компьютерное моделирование физических явлений, интерактивная машинная графика.



Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Мельников Л.А., Шевцов В.Н. Олимпиадные задачи по физике. Ижевск: Изд-во «РХД», 2002, 86 с. ISBN 5-93972-218-0

В сборнике представлены пакеты заданий, предлагавшиеся на саратовских городских олимпиадах по физике в период с 1975 по 1997 годы для учащихся 11-х (выпускных) классов. Он является существенно расширенным вариантом книги А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов «Задачи саратовских городских олимпиад по физике». Ко всем задачам даны ответы, краткие указания, а иногда и достаточно подробные решения.

Сборник будет полезен учащимся, заинтересованным в глубоком изучении физики, и их учителям.

