Изв. вузов «ПНД», т.10, № 6, 2002

УДК 517.958:539.3

ПАРАДОКС ПЭНЛЕВЕ И АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРИ КУЛОНОВСКОМ ТРЕНИИ

Ю.И. Неймарк, В.Н. Смирнова

Обнаруживается, что в механических системах с парадоксом Пэнлеве возможны автоколебания, вызываемые кулоновским трением без падающего участка характеристики трения.

Введение

В самом конце XIX века французский механик П.Пэнлеве, читая парижским студентам учебный курс о трении и стремясь к общей теории, обнаружил, что в некоторых простых системах уравнения движения, составляемые по общим правилам механики, неразрешимы. Он опубликовал книгу о трении [1], где привел и эти удивительные примеры, что через десять лет вызвало бурную дискуссию с участием выдающихся ученых того времени: Р.Мизеса, Л.Прандтля, Ф.Клейна, Г.Гамеля, Л.Лекорню и др. и, конечно, самого П.Пэнлеве [1]. Обнаруженный П.Пэнлеве казус получил название парадокса Пэнлеве. Он и сегодня, спустя сто лет, не имеет решения, позволяющего с уверенностью сказать, как поведут себя очень простые механические системы с кулоновским трением. Невозможность точного предсказания вызвана тем, что в системах с парадоксом Пэнлеве обнаруживается существенная зависимость их поведения от весьма непривычных в таких задачах малых и трудно определяемых параметров и закономерностей [2].

Настоящая работа имеет целью ознакомить читателя с существом парадокса Пэнлеве и показать, что он влечет неожиданную и неизвестную ранее возможность возникновения неустойчивости и автоколебаний, несмотря на то, что характеристика трения не имеет падающего участка. Возникающие автоколебания в естественном предельном описании являются разрывными, или, по существующей математической терминологии [3], контрастными структурами со скачками и всплесками, которые с физической точки зрения можно назвать «внутренними» ударами. Разрывные колебания в виде периодических контрастных структур возникают потому, что математическая модель систем с парадоксом Пэнлеве является сингулярно возмущенной и притом кусочно-гладкой системой дифференциальных уравнений, что потребовало специального математического исследования [4].

1. Примеры систем с парадоксом Пэнлеве и уточнение их уравнений движения

На рис. 1 приведены известные примеры механических систем с парадоксом Пэнлеве: *а* - система Пэнлеве - Клейна о движении стержня между параллельными направляющими L_1 и L_2, из которых одна (L_1) гладкая, а другая (L_2) шероховатая, под действием постоянной силы F_0; *б* - тормозная колодка, прижимаемая с силой F_0 к колесу, вращаемому моментом M; *в* - круг (цилиндр), вращаемый моментом M и вжимаемый в угол силой F_0, одна из сторон которого шероховатая, а другая гладкая. Уравнения движения во всех трех случаях приводятся к одному и тому же виду [2]

$$\dot{V} = 1 - F, \quad F = |N|\mathrm{sgn}V, \qquad \chi N - \lambda + F = 0, \tag{1}$$

где V - линейная либо угловая скорость, F и N - силы трения и нормального давления, χ и λ - параметры ($\chi>0$, $-1\leq\lambda\leq1$). Конкретный смысл параметров χ и λ в каждой из систем свой и следует из рассмотрения этих систем в [2].

Как динамическая система, уравнения (1) содержат одну фазовую

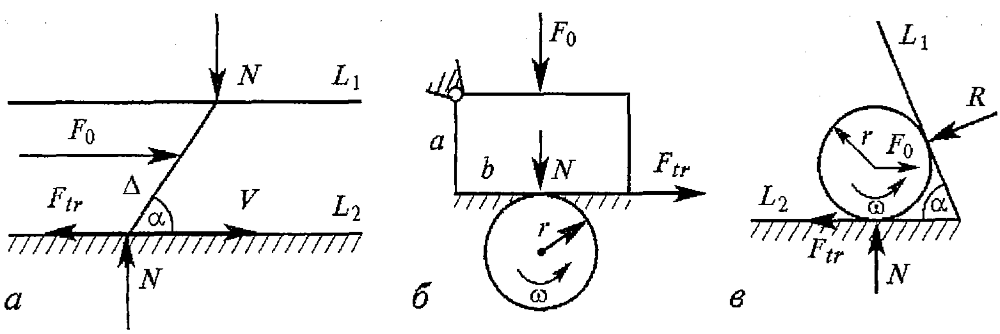

Рис. 1

переменную V. При заданном начальном условии $V=V_0$ для получения их решения $V(t)$, $F(t)$, $N(t)$ необходимо из двух последних уравнений (1) найти F. Но именно это при $\chi<1$ невозможно: решения может не быть или их оказывается два. Именно, в случае $\chi<1$ уравнения

$$F = |N|\,\mathrm{sgn}V, \quad \chi N - \lambda + F = 0 \tag{2}$$

при $\mathrm{sgn}V=\mathrm{sgn}\lambda$ имеют два решения, а в противном случае его нет. Это непосредственно видно, если на плоскости переменных N и F, (рис. 2), нанести графики функций, отвечающие уравнениям (2). Здесь ломаные линии *1* и *1'* отвечают первому из уравнений (2) соответственно при $V>0$ и $V<0$, а прямая 2 соответствует второму уравнению в (2) и предполагает $0<\chi<1$, $\lambda>0$. Согласно рис. 2 в этом случае при $V>0$ решений два, а при $V<0$ их нет. При $0<\chi<1$ и $\lambda<0$ ситуация аналогичная. В этой невозможности найти нужное единственное решение системы (2) и состоит парадокс Пэнлеве. Он указывает на то, что классическое описание (1) при $0<\chi<1$ дефектно.

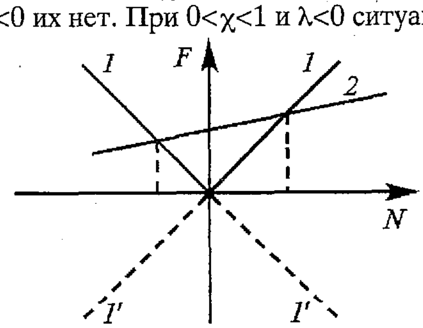

Рис. 2

Уже на упомянутой дискуссии было высказано мнение, что необходимо учесть реальную упругость твердых тел. Различные способы такого учета применительно к задачам Пэнлеве -

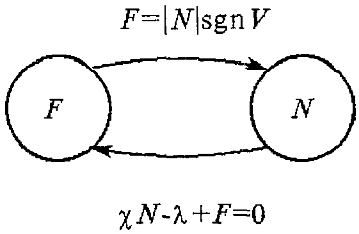

Рис. 3

Клейна делались во многих работах, они действительно избавляли от парадокса, но приводили к разным результатам [5-9]. В каком-то смысле они делались вслепую, без понимания истинной причины парадокса Пэнлеве, хотя тот или иной способ учета упругости приводил к устранению парадокса Пэнлеве. А причина была, и ее выяснение требовало нового понимания силового взаимодействия в случае сухого трения, более полной трактовки закона Ньютона о действии и противодействии, требовало обнаружения направленности действия. Понимания, что в законе Кулона нормальная сила N, вызывающая силу трения F, имеет направленный характер от N к F и реализуется не за счет силы N, а некоторого стороннего источника энергии. Понимание этого давало новую трактовку соотношениям (2) как замкнутого цикла направленных воздействий от N к F (первое соотношение в (2)) и от F к N (второе соотношение в (2)) [2]. Этот направленный цикл взаимодействий изображен на рис. 3. При $\chi<1$ он влечет парадокс Пэнлеве, потому что в этом цикле взаимодействия мгновенны и его коэффициент усиления, равный $1/\chi$, при $\chi<1$ больше единицы. В реальной же системе парадоксальности нет при всех $\chi>0$, потому что связи от N к F и от F к N не мгновенные в силу фактической вязкоупругой податливости твердых тел и связей между ними.

Такое понимание парадокса Пэнлеве позволяет предложить простейший способ учета вязкоупругих инерционных податливостей реальных твердых тел и связей между ними в виде временных релаксационных задержек, записав уравнения (1) в виде

$$\dot V=1-F, \quad \tau_1 \dot F+F=|N|\operatorname{sgn}V, \quad \tau_2 \dot N+N=\chi^{-1}(\lambda-F), \tag{3}$$

где $\tau_1>0$ и $\tau_2>0$ - малые временные задержки.

Введение этих задержек и запись сингулярных уравнений (1) в виде сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений (3) устраняет парадокс Пэнлеве, но теперь вместо системы (1) первого порядка появляется система третьего порядка, и ее изучение далеко не просто. Можно исследование упростить, предполагая τ_1 и τ_2 стремящимися к нулю, поскольку они на самом деле малы, но при этом, как оказывается, результат зависит от отношения τ_1/τ_2, и если его не фиксировать, то вообще никакого предельного поведения у системы (3) нет [10].

Конечно, модель (3) не точна, она феноменологическая, и реальный характер задержек может быть сложнее, но все же это, пусть и грубое, но уточнение парадоксальных уравнений (1), и оно по меньшей мере позволяет понять, что же может происходить в системе с парадоксом Пэнлеве. Отметим, что некоторые модельные способы учета вязкоупругих свойств твердых тел приводят к похожим уравнениям и результатам [11, 12]. Но перед этими конкретными способами уточнения уравнений (1) у уравнений (3) есть определенное преимущество: уравнения (3) более общие и содержат два существенных малых параметра τ_1 и τ_2, а модельные конструкции учитывают только один из них. Это, в частности, объясняет, почему конкретные уточнения приводят к разным результатам.

2. Парадокс Пэнлеве и автоколебания

Перейдем ко второй части работы. За основу возьмем несколько более общую, чем (3), систему уравнений вида

$$\dot V = 1 - F, \quad \tau_1 \dot F + F = |N|\,\mathrm{sgn}V + hV, \quad \tau_2 \dot N + N = \chi^{-1}(\lambda - F), \tag{4}$$

в которой помимо сухого трения учтено еще и вязкое, что эквивалентно сухому трению с линейно возрастающей характеристикой трения движения.

Хорошо известно, что сухое трение в механических системах может приводить к неустойчивости и автоколебаниям, но для этого нужно, чтобы характеристика трения имела падающий участок. Как оказывается, последнее не обязательно, когда механическая система с сухим трением парадоксальна по Пэнлеве. В парадоксальной системе неустойчивость и автоколебания возможны из-за наличия в ней цикла направленных воздействий с подкачкой энергии, и эту его роль не только не может нарушить добавок вязкого трения, но в некотором смысле ее усиливает.

В изложении этого нового факта состоит цель дальнейшего. При мелких, но конечных задержках τ_1 и τ_2 будут обнаружены неустойчивость и рождение автоколебаний в соответствии с бифуркацией Андронова. При τ_1 и τ_2, стремящихся к нулю, автоколебания принимают вид контрастных структур, то есть сопровождаются разрывными скачками скорости V («внутренние» удары), при которых силы F и N обращаются в бесконечность.

Равновесия системы (4) определяются уравнениями

$$\lambda - F = 0, \quad \chi N - \lambda + F = 0, \quad F = |N|\,\mathrm{sgn}V + hV. \tag{5}$$

Из них следует, учитывая $\lambda \le 1$, что равновесие имеется только при $h>0$, $\chi>1-\lambda$, $V>0$ и для него

$$F^* = 1, \quad N^* = \chi^{-1}(\lambda - 1), \quad V^* = h^{-1}[1 - \chi^{-1}(1-\lambda)]. \tag{6}$$

Согласно (4) характеристическое уравнение имеет вид

$$\tau_1\tau_2 z^3 + (\tau_1 + \tau_2)z^2 + (1 + \sigma\chi^{-1} + h\tau_2)\,z + h = 0,$$

где $\sigma = \mathrm{sgn}N^* < 0$, и единственное условие устойчивости состоит в выполнении неравенства

$$(\tau_1 + \tau_2)(1 + \sigma\chi^{-1} + h\tau_2) - \tau_1\tau_2 h > 0,$$

которое при исчезающих малых положительных τ_1 и τ_2 сводится к единственному требованию $\chi>1$. Таким образом, единственное равновесие (6) существует при $\chi>1-\lambda$, оно устойчиво при $\chi>1$, неустойчиво при $\chi<1$ и теряет устойчивость через фокус.

Компьютерное исследование показывает, что при потере устойчивости рождается устойчивое периодическое движение, возникают автоколебания. При уменьшении τ_1 и τ_2 этот предельный цикл вытягивается, частично удаляясь в бесконечность, и приобретает вид контрастной структуры со скачками или всплесками, (рис. 4, *а*, *б*). Описанное происходит в области параметров $1>\chi>1-\lambda$, $\lambda>0$, $h>0$.

В другой области параметров, $\chi<1-\lambda$, $\lambda>0$, $h>0$, при τ_1 и τ_2, стремящихся к нулю, также возникают автоколебания в виде периодических контрастных структур (рис. 4, *в*). Механизм их возникновения отличен от приведенного выше, подробно описан в [10,12] и состоит в наличии в рассматриваемой сингулярно возмущенной системе (4) такой структуры фазового пространства, при которой:

1) существуют по крайней мере два многообразия медленных движений, из которых только одно устойчиво;

2) существует область начальных значений, при которых возможен уход фазовой траектории в бесконечность при $\tau_1 \to 0, \tau_2 \to 0$;

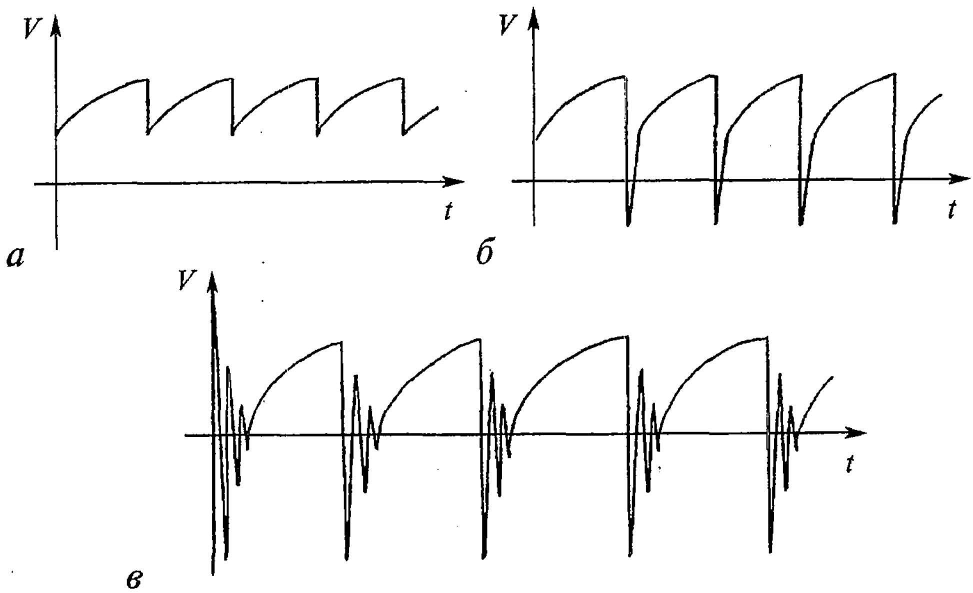

Рис. 4

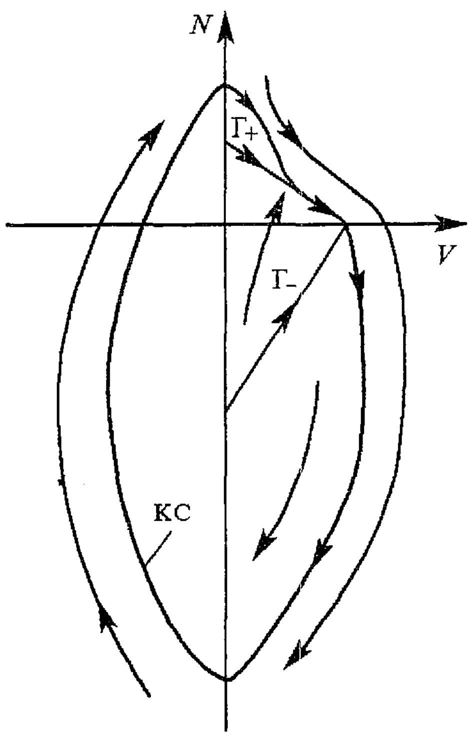

Рис. 5

3) существует особенность структуры, которая обеспечивает возврат фазовых траекторий из бесконечности;

4) существует механизм срыва фазовой точки с устойчивого многообразия.

В более простом случае $\tau_2=0$, когда система (4) становится двумерной, типичный пример возникновения автоколебаний типа контрастных структур в результате выполнения условий «1» - «4» приведен на рис. 5. Здесь Γ_+ и Γ_- - устойчивое и неустойчивое многообразия медленных движений, определяемые вырожденными, $\tau_1=\tau_2=0$, уравнениями (4) при $\lambda>0$, $\chi<1-\lambda$, $h>0$, КС - периодическое движение типа контрастной структуры со всплесками при $\tau_1\to 0$.

При $h=0$ периодических контрастных структур при стремлении τ_1 и τ_2 к нулю не возникает, но при конечных τ_1 и τ_2 имеются автоколебания, которые при τ_1 и τ_2, стремящихся к нулю, неограниченно увеличивают свою частоту. При этом амплитуда колебаний скорости V стремится к нулю, а амплитуды колебаний сил F и N остаются конечными.

Заключение

Итак, сухое кулоновское трение само по себе или в сочетании с вязким трением ($h>0$) при наличии парадокса Пэнлеве может вызвать автоколебания, которые в случае $h>0$ при увеличении жесткости входящих в систему твердых тел и связей между ними переходят в разнообразные периодические контрастные структуры - разрывные периодические автоколебания. Их наличие обусловлено замкнутым циклом направленных связей со сторонним источником энергии и подобно тому, что имеет место в релейных системах автоматического регулирования с реле, имеющим такую же характеристику, как кулоновское трение. Подчеркнем, что средняя скорость автоколебаний всегда положительна, и внешняя сила F_0 или момент M совершают на каждом периоде определенную работу. Специфика этих автоколебаний в том, что они могут быть близки к разрывным колебаниям и иметь вид разнообразных контрастных структур со скачками и всплесками. Особенность систем с парадоксом Пэнлеве еще и в том, что их поведение существенно зависит от малых параметров и соотношений между ними. В рассматриваемых моделях (3) и (4) малые параметры - это τ_1 и τ_2, а соотношение между ними - это отношение τ_1/τ_2.

Работа поддержана Министерством образования России, грант Е00-1-109

Библиографический список

1. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.
2. *Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н.* Идеализация, математическое моделирование и парадокс Пэнлеве // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып.2. С.536.
3. *Васильева А.Б.* О контрастных структурах в системах сингулярно возмущенных уравнений // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34, № 8-9. С. 1168.
4. *Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н.* Сингулярно возмущенные задачи и парадокс Пэнлеве // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1.
5. *Бутенин Н.В.* Рассмотрение «вырожденных» динамических систем с помощью гипотезы «скачка» // ПММ. 1948. Т. 12, № 1. С. 3.
6. *Ле Суан Ань.* Парадоксы Пэнлеве и законы движения механических систем с кулоновским трением // ПММ. 1990. № 54, вып.4. С. 520.
7. *Фуфаев Н.А.* Динамика системы в примере Пэнлеве - Клейна: о парадоксе Пэнлеве // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 48.
8. *Неймарк Ю.И.* Еще раз о парадоксе Пэнлеве // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 17.
9. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки // ПММ. 1995. Т. 59, вып.3. С. 365.
10. *Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н.* Контрастные структуры, предельная динамика и парадокс Пэнлеве // Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37, № 11. С. 3.
11. *Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н.* О влиянии вязкого трения на динамику системы Пэнлеве - Клейна // Тезисы докладов V Международной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Н.Новгород, 1999. С.165.
12. *Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н.* К столетию проблемы парадокса Пэнлеве // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып.2. С.3.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики Нижегородского госуниверситета

Поступила в редакцию 14.06.2001

PARADOX OF PAINLEVE AND AUTO-OSCILLATION WITH COULOMB FRICTION

Yu.I. Neimark, V.N. Smirnova

There was discovered the possibility of auto-oscillation in mechanical systems with Painleve paradox in spite of the friction characteristic incident section absense.

Неймарк Юрий Исаакович - доктор технических наук, профессор ННГУ, академик РАЕН, Соросовский профессор, член национального комитета по теоретической и прикладной механике, лауреат премий А.А. Андронова и Н. Винера. Автор 8 монографий и более 400 работ по теории колебаний, теоретической механике, теории управления и др.

Смирнова Вера Николаевна родилась в Горьком (1943), старший научный сотрудник отдела динамики систем и процессов управления НИИ прикладной математики и кибернетики, ННГУ. Окончила факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского госуниверситета (1965). Кандидит физико-математических наук (1975). Область научных интересов: вычислительная математика, математическое моделирование. Автор более 50 научных работ.