



СИНХРОНИЗАЦИЯ И КОЛЛЕКТИВНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЦЕПОЧКИ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

П.В. Купцов, С.П. Кузнецов

Изучается режим полной синхронизации цепочки однонаправленно связанных идентичных отображений с периодическими граничными условиями. Показано, что для хаотических отображений существует максимальная длина цепочки, при превышении которой синхронизация становится неустойчивой независимо от вида связи между отображениями. Максимальная длина цепочки зависит от ляпуновского показателя парциального отображения. Для отображений с отрицательным ляпуновским показателем режим синхронизации может быть устойчивым при любой длине цепочки. В качестве конкретного примера рассмотрена цепочка связанных логистических отображений с инерционной и диссипативной связью. Рассмотрена устойчивость режима полной синхронизации этой цепочки при различных типах индивидуальной динамики парциального отображения, а также выявлено несколько других часто наблюдаемых режимов ее поведения.

Введение

Проблема синхронизации является одной из фундаментальных как в классической теории колебаний, так и в современной нелинейной динамике. Сегодня интерес к этому явлению связан, в первую очередь, с изучением синхронизации систем со сложной, нерегулярной индивидуальной динамикой. Этому посвящено значительное число публикаций. Последние достижения в изучении этой проблемы подробно освещаются в работах [1-3].

Как известно, системы с хаотической индивидуальной динамикой при наличии связи между ними могут синхронизироваться. Выделяют три различных типа синхронизации [1]. Полная синхронизация наблюдается при взаимодействии идентичных систем и состоит в том, что в каждый момент времени значения динамических переменных связанных систем полностью совпадают. При частотно-фазовой синхронизации вводятся величины, выступающие, в определенном смысле, в качестве частоты и фазы колебаний парциальной системы, и режим синхронизации идентифицируют по совпадению этих величин. В случае обобщенной синхронизации между динамическими переменными парциальных систем обнаруживается функциональная зависимость.

В настоящей работе рассматривается случай полной синхронизации [4-7]. Этот режим демонстрируют связанные идентичные подсистемы при условии, что

функция, задающая связь между ними, обращается в ноль, когда векторы состояний подсистем совпадают. Тогда, если подсистемы имеют точно одинаковые начальные состояния, то это равенство в дальнейшем сохраняется, и система совершает движение на аттракторе, который мы будем называть симметричным.

Сценарий возникновения и разрушения синхронного режима, наблюдаемый при изменении интенсивности связи, существенным образом зависит от структуры симметричного аттрактора. Если имеет место неподвижная точка или цикл, то в зависимости от величины связи он может быть либо устойчивым, либо неустойчивым. Значительно более сложная ситуация имеет место, если симметричный аттрактор является хаотическим. В этом случае возможны четыре ситуации [8,9].

1. *Сильная устойчивость.* Все траектории на симметричном аттракторе являются устойчивыми к поперечным возмущениям, разрушающим синхронизацию. Аттрактор имеет однородный бассейн притяжения, то есть всегда можно отыскать такую окрестность аттрактора, все точки которой притягиваются к нему.

2. *Слабая устойчивость.* Хотя в среднем симметричный аттрактор является устойчивым, однако существуют траектории, покидающие аттрактор при малом поперечном возмущении. Бассейн притяжения такого аттрактора имеет фрактальную структуру и называется пористым или изрешеченным (riddled basin): в окрестности каждой его точки существует множество ненулевой меры, точки которого не принадлежат бассейну [10,11]. Аттрактор с пористым бассейном называют слабым в смысле определения, данного Милнором [12]. Существование пористого бассейна может быть объяснено наличием инвариантных множеств, вложенных в симметричный хаотический аттрактор - неподвижных точек, циклов, канторовских множеств и т.д., неустойчивых по отношению к возмущениям, не нарушающим симметрию [13]. Как только хотя бы одно инвариантное множество теряет поперечную устойчивость, появляются траектории, которые могут проходить сколь угодно близко к аттрактору и, тем не менее, не притягиваться к нему. В результате бассейн притяжения становится пористым.

3. *Слабая неустойчивость.* Этот тип поведения возникает, когда симметричный аттрактор в среднем неустойчив, но не все вложенные инвариантные множества потеряли поперечную устойчивость. Это приводит к возникновению on-off перемежаемости, которая характеризуется чередованием всплесков хаотических асинхронных колебаний и возвратов траектории в окрестность симметричного аттрактора [14]. Такой аттрактор называют пузырящимся (bubbling attractor) [15].

4. *Сильная неустойчивость.* Этот тип поведения имеет место, когда симметричный аттрактор и все вложенные инвариантные множества неустойчивы относительно поперечных возмущений.

В работах [16,17] исследуется полная синхронизация цепочки связанных логистических отображений с диффузионной связью и с периодическими граничными условиями. Для случая, когда парциальные отображения демонстрируют хаотические колебания, доказана устойчивость режима полной синхронизации цепочки из 2, 3 и 4-х отображений.

В работе [9] исследуется полная синхронизация двух хаотических отображений, между которыми установлены два канала связи: инерционная связь и диссипативная [18]. Такой двухпараметрический подход позволяет выявить полную картину синхронизации и наблюдать при различных комбинациях параметров связи все четыре типа устойчивости симметричного аттрактора. Кроме того, двухпараметрический анализ позволяет обнаружить точку сверхустойчивой

синхронизации, где симметричный аттрактор обладает наибольшей устойчивостью к поперечным возмущениям, разрушающим синхронизацию.

В настоящей работе обобщаются результаты статьи [9] на случай произвольного числа отображений. В разделе 1 изучается синхронизация цепочки связанных отображений с периодическими граничными условиями при наличии между отображениями однонаправленной связи общего вида. Раздел 2 посвящен анализу синхронизации в случае, когда между отображениями существуют инерционная и диссипативная связи. Наконец, в разделе 3 обсуждается цепочка связанных логистических отображений. В Заключении кратко резюмируются полученные результаты.

1. Устойчивость симметричного аттрактора в общем случае

Рассмотрим цепочку из N однонаправленно связанных отображений с периодическими граничными условиями:

$$u_{n+1}^k = f(u_n^k) + \Phi(u_n^{k+1}, u_n^k), \quad (1)$$

где $k=0, 1, \dots, N-1$ и $u_n^N \equiv u_n^0$. Функция $f(u)$ задает парциальное отображение, а $\Phi(u, v)$ есть функция связи. Обе функции предполагаются дифференцируемыми по своим аргументам по меньшей мере один раз и, кроме того, функция связи выбирается такой, что

$$\Phi(u, u) = 0 \quad (2)$$

для любого u . Благодаря этому свойству система (1) допускает решение вида $u^0 = u^1 = \dots = u^{N-1}$, когда парциальные отображения синхронизированы и колеблются как при отсутствии связи. Инвариантное множество, возникающее в этом случае в N -мерном фазовом пространстве системы, мы будем называть симметричным аттрактором. Его структура совпадает со структурой аттрактора парциального отображения.

Симметричный аттрактор может быть устойчивым или неустойчивым относительно поперечных возмущений, разрушающих синхронизацию, что определяется как свойствами самих парциальных отображений, так и свойствами функции связи. Для анализа устойчивости удобно перейти к новым переменным x^k , таким что x^0 соответствует движению системы на симметричном аттракторе, а все другие переменные описывают поперечные возмущения вдоль направлений, перпендикулярных друг другу и симметричному аттрактору. Этому условию удовлетворяют следующие переменные:

$$x^0 = (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} u^i, \quad x^k = u^k - (1/k) \sum_{i=0}^{k-1} u^i. \quad (3)$$

Обратное преобразование производится по формуле:

$$u^k = x^0 + kx^k / (k+1) - \sum_{i=k+1}^{N-1} x^i / (i+1). \quad (4)$$

Перейдем к новым переменным, предполагая, что поперечные возмущения малы. Уравнение для x^0 совпадает с парциальным отображением

$$x_{n+1}^0 = f(x_n^0). \quad (5)$$

Уравнения для x^k при $1 \leq k \leq N-1$ имеют вид

$$x_{n+1}^k = (\theta_n - \varphi_n)x_n^k + \varphi_n \times \begin{cases} x_n^{k+1} - (1/k)\sum_{i=1}^k x_n^i/(i+1), & k < N-1 \\ - (N/(N-1))\sum_{i=1}^{N-1} x_n^i/(i+1), & k = N-1, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\theta_n = (df(u)/du)|_{u=x_n^0}, \quad \varphi_n = (\partial\Phi(u,v)/\partial u)|_{u=v=x_n^0}. \quad (7)$$

Вычислим матрицу Якоби J_n ,

$$J_n^{k,i} = dx_{n+1}^k/dx_n^i,$$

системы уравнений (5), (6) в точке $(x_n^0, 0, 0, \dots, 0)$. Нулевая строка этой матрицы соответствует движению на симметричном аттракторе и имеет вид

$$J_n^{0,i} = \begin{cases} \theta_n, & i = 0, \\ 0, & 1 \leq i \leq N-1. \end{cases} \quad (8)$$

Строки с номерами $1 \leq k \leq N-2$ определяются формулой

$$J_n^{k,i} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -\varphi_n/(k(i+1)), & 1 \leq i \leq k-1, \\ \theta_n - \varphi_n(k^2+k+1)/(k^2+k), & i = k, \\ \varphi_n, & i = k+1, \\ 0, & k+2 \leq i \leq N-1. \end{cases} \quad (9)$$

Для последней строки с индексом $k=N-1$ имеем

$$J_n^{N-1,i} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -\varphi_n N/((N-1)(i+1)), & 1 \leq i \leq N-2, \\ \theta_n - \varphi_n N/(N-1), & i = N-1. \end{cases} \quad (10)$$

Найденная матрица Якоби J_n допускает представление в виде линейной комбинации двух числовых матриц:

$$J_n = \varphi_n K + \theta_n E, \quad (11)$$

Здесь E - единичная матрица, а матрица K имеет следующие элементы:

$$K^{0,i} = 0, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad (12)$$

$$K^{k,i} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -1/(k(i+1)), & 1 \leq i \leq k-1, \\ -(k^2+k+1)/(k^2+k) & i = k, \\ 1, & i = k+1, \\ 0, & k+2 \leq j \leq N-1. \end{cases} \quad (13)$$

$$K^{N-1,i} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -N/((N-1)(i+1)), & 1 \leq i \leq N-2, \\ -N/(N-1), & i = N-1. \end{cases} \quad (14)$$

где $1 \leq k \leq N-2$.

Замечательным свойством матрицы K является то, что ее собственные числа можно найти в явном виде для произвольного N . Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(1+\mu)^N = 1. \quad (15)$$

Его решение дает спектр собственных чисел

$$\mu_k = e^{2\pi i k/N} - 1, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (16)$$

Используя полученные соотношения, найдем ляпуновские показатели системы

$$\Lambda_k = \lim_{M \rightarrow \infty} 1/M \ln |\sigma_k|, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (17)$$

где σ_k есть k -е собственное число произведения M матриц Якоби J_n , вычисленных вдоль траектории на симметричном аттракторе,

$$\det \left(\prod_{n=0}^{M-1} J_n - \sigma E \right) = 0. \quad (18)$$

Используя выражения для J_n (11), эту формулу можно записать следующим образом:

$$\det \left(\prod_{n=0}^{M-1} (\varphi_n K + \theta_n E) - \sigma E \right) = 0. \quad (19)$$

Собственные числа σ_k могут быть выражены через собственные числа матрицы K

$$\sigma_k = \prod_{n=0}^{M-1} (\varphi_n \mu_k + \theta_n) = \prod_{n=0}^{M-1} (\varphi_n (e^{2\pi i k/N} - 1) + \theta_n). \quad (20)$$

Отсюда находим

$$|\sigma_k|^2 = \prod_{n=0}^{M-1} [(\theta_n - \varphi_n)^2 + 2\varphi_n(\theta_n - \varphi_n)\cos(2\pi k/N) + \varphi_n^2]. \quad (21)$$

Введем обозначение $\nu = k/N$, где $0 \leq \nu < 1$. В результате получим спектр ляпуновских показателей системы (5), (6):

$$\Lambda(\nu) = \lim_{M \rightarrow \infty} 1/(2M) \sum_{n=0}^{M-1} \ln [(\theta_n - \varphi_n)^2 + 2\varphi_n(\theta_n - \varphi_n)\cos(2\pi\nu) + \varphi_n^2]. \quad (22)$$

Отметим, что длина цепочки N в явном виде не входит в эту формулу, а определяет шаг изменения дискретной величины ν .

Проанализируем свойства $\Lambda(\nu)$. Вследствие того, что ν появляется в формуле (22) только в аргументе косинуса, то достаточно ограничиться изучением поведения $\Lambda(\nu)$ при $0 \leq \nu \leq 1/2$. На концах этого отрезка Λ принимает следующие значения:

$$\Lambda(0) = \lim_{M \rightarrow \infty} (1/M) \sum_{n=0}^{M-1} \ln |\theta_n|, \quad (23)$$

$$\Lambda(1/2) = \lim_{M \rightarrow \infty} (1/M) \sum_{n=0}^{M-1} \ln |\theta_n - 2\varphi_n|. \quad (24)$$

Ляпуновский показатель $\Lambda(0)$ отвечает за движение на симметричном аттракторе и равен ляпуновскому показателю частичного отображения. Поперечная устойчивость симметричного аттрактора характеризуется максимальным значением $\Lambda(\nu)$ на интервале $0 < \nu \leq 1/2$.

Если $N=2$, то старший поперечный ляпуновский показатель равен $\Lambda(1/2)$ [9]. При $N=3$ за поперечную устойчивость отвечает $\Lambda(1/3)$. В общем случае удобно рассматривать ν как непрерывную переменную и искать максимум функции Λ в зависимости от этой переменной.

Каждое из выражений под знаком суммы в формуле (22) возрастает или убывает на отрезке $[0, 1/2]$ и имеет минимум на одном его конце и максимум на другом. Следовательно, функция $\Lambda(v)$ также имеет экстремумы на концах этого отрезка.

Кроме того, возможна ситуация, когда при различных n под знаком суммы встречаются как убывающие, так и возрастающие функции, и вследствие этого $\Lambda(v)$ может иметь еще один экстремум во внутренней точке отрезка. Таким образом, можно выделить спектры четырех типов.

Тип 1 - $\Lambda(v)$ убывает (рис. 1, а). За поперечную устойчивость симметричного аттрактора в этом случае отвечает $\Lambda(1/N)$. Так как при увеличении N эта величина стремится к $\Lambda(0)$, то устойчивость синхронизации зависит от показателя Ляпунова парциальной системы $\Lambda(0)$ и от количества связанных подсистем N . Если $\Lambda(0) < 0$, что имеет место, например, когда симметричный аттрактор является периодическим, то $\Lambda(v) < 0$ для всех v и синхронизация устойчива при любом количестве подсистем. Если же связаны хаотические отображения, то есть $\Lambda(0) > 0$, то условие $\Lambda(1/N) = 0$ определяет максимальное количество отображений, для которых симметричный аттрактор остается устойчивым.

Тип 2 - $\Lambda(v)$ возрастает (рис. 1, б). Теперь за поперечную устойчивость симметричного аттрактора отвечает $\Lambda(1/2)$, если N четное, и $\Lambda((N-1)/(2N))$ при нечетном N . Для хаотических отображений, когда $\Lambda(0) > 0$, синхронизация в данном случае всегда неустойчива. В случае отрицательного $\Lambda(0)$ синхронизация цепочки четной длины в зависимости от знака $\Lambda(1/2)$ может быть как устойчивой, так и неустойчивой при любом N . Когда число подсистем нечетное, старший показатель Ляпунова $\Lambda((N-1)/(2N))$ меньше $\Lambda(1/2)$ и асимптотически к нему стремится при увеличении N . В частности, возможна ситуация, когда для цепочек четной длины симметричный аттрактор поперечно неустойчив, а для цепочек нечетной длины он устойчив при небольших N и теряет устойчивость с ростом N .

Тип 3 - $\Lambda(v)$ имеет минимумы на концах отрезка, а следовательно, между ними имеется точка $v = v_{\max}$, где $\Lambda(v)$ достигает максимума (рис. 1, в).

Для хаотических отображений $\Lambda(0) > 0$ и, следовательно, $\Lambda(v_{\max}) > 0$. Симметричный аттрактор может быть поперечно устойчив, только если N достаточно невелико, так что точка $1/N$ оказывается правее точки максимума, то есть $v_{\max} < 1/N$, и за поперечную устойчивость отвечает $\Lambda(1/N)$. Тогда устойчивость имеет место, если в этой точке $\Lambda(1/N) < 0$. С увеличением N точка $1/N$ смещается левее точки максимума и устойчивость разрушается.

Для систем с отрицательным $\Lambda(0)$ ситуация похожа на имеющую место для спектра типа 2. Если v_{\max} рациональное число и может быть представлено как k^*/N^* , где N^* и k^* суть натуральные числа, то цепочка, длина которой кратна N^* , будет обладать наименьшей устойчивостью и характер устойчивости в этом случае не зависит от N . Для некратного N , а также в случае иррационального v_{\max}

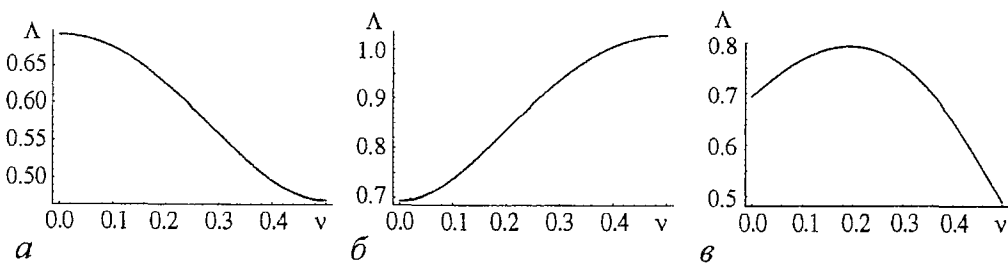


Рис. 1. Три типа спектров ляпуновских показателей для решетки логистических отображений с инерционной и диссипативной связями: а - тип 1, при управляющем параметре $\lambda=2$ и при $\epsilon_1=0$, $\epsilon_d=0.9$; б - тип 2, $\epsilon_1=0$, $\epsilon_d=1.2$; в - тип 3, $\epsilon_1=0.6$, $\epsilon_d=0.9$

старший поперечный ляпуновский показатель увеличивается с ростом N и в асимптотике стремится к $\Lambda(v_{\max})$.

Тип 4 - $\Lambda(v)$ имеет минимум во внутренней точке. Этот тип спектра не представляет самостоятельного интереса и в зависимости от соотношения между $\Lambda(0)$ и $\Lambda(1/2)$ сводится к типу 1 или 2.

Таким образом, устойчивая синхронизация цепочки связанных хаотических отображений, для которых $\Lambda(0) > 0$, имеет место только если длина цепочки не превышает некоторого максимального значения, зависящего от $\Lambda(0)$. В случае же когда $\Lambda(0) < 0$, характер связи может быть таким, что устойчивость сохраняется при любом числе отображений.

2. Устойчивость симметричного аттрактора при наличии инерционной и диссипативной связи

Зададим функцию связи в виде комбинации инерционной и диссипативной связи, как это было сделано в работе [9],

$$\Phi(u, v) = \varepsilon_i(u-v) + \varepsilon_d(f(u)-f(v)), \quad (25)$$

где ε_i - параметр, контролирующий величину инерционной связи; ε_d управляет диссипативной связью [18]; $f(u)$ - функция, задающая парциальное отображение. Используя обозначения (7), получим

$$\varphi_n = \varepsilon_i + \varepsilon_d \theta_n. \quad (26)$$

При таком выборе связи уравнение для k -й подсистемы цепочки связанных отображений (1) запишется в виде

$$u_{n+1}^k = f(u_n^k) + \varepsilon_i(u_n^{k+1} - u_n^k) + \varepsilon_d(f(u_n^{k+1}) - f(u_n^k)), \quad (27)$$

где, как и раньше, $k=0, 1, \dots, N-1$ и $u_n^N \equiv u_n^0$.

Заметим, что при

$$\varepsilon_i = 0, \quad \varepsilon_d = 1/2 \quad (28)$$

формула (27) преобразуется к виду

$$u_{n+1}^k = (f(u_n^{k+1}) + f(u_n^k))/2, \quad (29)$$

то есть происходит усреднение состояний соседних отображений. Рассматривая $\Lambda(v)$ как функцию от двух переменных, ε_i и ε_d , мы обнаруживаем, что точка, определяемая формулой (28), является центром симметрии этой функции и Λ инвариантна относительно подстановки

$$\varepsilon_i \rightarrow -\varepsilon_i, \quad \varepsilon_d \rightarrow 1 - \varepsilon_d.$$

В точке (28), независимо от v и θ_n , Λ имеет минимум и, следовательно, симметричный аттрактор в этой точке обладает наибольшей устойчивостью. Иными словами, если синхронизация неустойчива в этой точке, то она неустойчива и в других точках. Следуя терминологии, принятой в работе [9], мы будем называть (28) точкой сверхустойчивой синхронизации.

Знак старшего поперечного показателя Ляпунова в точке (28) можно использовать как критерий возможности осуществления устойчивой синхронизации для некоторой системы: если этот характеристический показатель больше нуля, то при любых значениях параметров связи ε_i и ε_d синхронизация неустойчива.

В точке сверхустойчивой синхронизации спектр ляпуновских показателей имеет вид

$$\Lambda(\nu) = \Lambda(0) + \ln |\cos(\pi\nu)|. \quad (30)$$

Этот спектр относится к типу 1, следовательно, за поперечную устойчивость симметричного аттрактора отвечает ляпуновский показатель $\Lambda(1/N)$. Приравнявая $\Lambda(1/N)$ к нулю, из формулы (30) получим уравнение, связывающее показатель Ляпунова парциальной системы и длину цепочки, при которых синхронизация в точке (28) становится неустойчивой:

$$\Lambda(0) = -\ln \cos(\pi/N). \quad (31)$$

Из этой формулы следует, что для двух отображений, $N=2$, с любым, сколь угодно большим положительным $\Lambda(0)$ можно подобрать такие значения параметров связи ϵ_i и ϵ_d , что синхронизация будет устойчивой. Для других значений N имеются величины $\Lambda(0)$, при превышении которых режим синхронизации неустойчив для любых ϵ_i и ϵ_d . На рис. 2 построен график зависимости $\Lambda(0)$ от N . Видно, что кривая спадает быстрее, чем экспонента и, следовательно, синхронизация большого числа хаотических отображений устойчива, только если их показатель Ляпунова близок к нулю, то есть когда отображения находятся на пороге бифуркации.

Важный частный случай имеет место, когда $\epsilon_i=0$, и связь является чисто диссипативной. В этой ситуации тип спектра $\Lambda(\nu)$ не зависит от свойств парциальных отображений и можно выяснить, какому ν соответствует старший поперечный ляпуновский показатель. Для определения типа спектра вычислим вторые производные $\Lambda(\nu)$ в точках $\nu=0$ и $\nu=1/2$, где, как обсуждалось выше, функция $\Lambda(\nu)$ имеет экстремумы.

$$\Lambda''(0) = -4\pi^2(1-\epsilon_d)\epsilon_d, \quad (32)$$

$$\Lambda''(1/2) = 4\pi^2(1-\epsilon_d)\epsilon_d/(1-2\epsilon_d)^2. \quad (33)$$

Из этих формул видно, что при $0 < \epsilon_d < 1$ функция $\Lambda(\nu)$ имеет максимум в точке $\nu=0$ и минимум в точке $\nu=1/2$, следовательно, спектр относится к типу 1 и старшим поперечным ляпуновским показателем является $\Lambda(1/N)$. Когда $\epsilon_d < 0$ или $\epsilon_d > 1$, имеет место спектр типа 2 и, соответственно, за поперечную устойчивость симметричного аттрактора отвечает $\Lambda(1/2)$ для четного N и $\Lambda((N-1)/(2N))$ в случае, когда N нечетное.

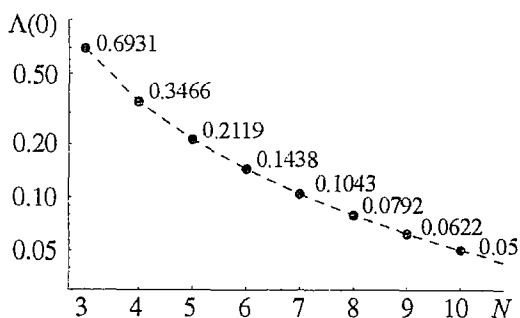


Рис. 2. Предельные значения ляпуновского показателя парциального отображения $\Lambda(0)$, при которых синхронизация N связанных отображений может быть устойчивой. Около точек подписаны соответствующие значения $\Lambda(0)$. На вертикальной оси использован логарифмический масштаб

Другой важный частный случай имеет место при $\epsilon_d=1/2$, когда можно в явном виде найти связь между свойствами парциального отображения и типом спектра ляпуновских показателей.

$$\Lambda''(0) = \pi^2(4(\epsilon_i/\Theta_\gamma)^2-1), \quad (34)$$

$$\Lambda''(1/2) = \pi^2(4(\Theta_\gamma/\epsilon_i)^2-1). \quad (35)$$

Здесь Θ_γ - характеристическая величина, вычисляемая для аттрактора парциального отображения по формуле

$$\Theta_\gamma = (\lim_{M \rightarrow \infty} (1/M) \sum_{n=0}^{M-1} \theta_n^\gamma)^{1/\gamma}. \quad (36)$$

Сравнивая знаки $\Lambda''(0)$ и $\Lambda''(1/2)$, получаем следующие неравенства для ε_1 :

$$\text{Тип 1: } 2|\varepsilon_1| < \min(\Theta_{-2}, \Theta_2).$$

$$\text{Тип 2: } 2|\varepsilon_1| > \max(\Theta_{-2}, \Theta_2). \quad (37)$$

$$\text{Тип 3: } \Theta_{-2} < 2|\varepsilon_1| < \Theta_2.$$

$$\text{Тип 4: } \Theta_2 < 2|\varepsilon_1| < \Theta_{-2}.$$

В последнем случае для нахождения старшего поперечного ляпуновского показателя требуется дополнительно сравнить значения $\Lambda(0)$ и $\Lambda(1/2)$.

3. Динамика цепочки связанных логистических отображений

Рассмотрим теперь цепочку вида (27), выбрав в качестве частичной системы логистическое отображение

$$u_{n+1} = f(u_n) = 1 - \lambda u_n^2, \quad (38)$$

где λ - управляющий параметр, принимающий значения от 0 до 2. При $\lambda < \lambda_c = 1.401155189\dots$ это отображение совершает периодические колебания, с увеличением λ происходит каскад бифуркаций удвоения периода колебаний, а при переходе через критическую точку λ_c в системе возникают хаотические колебания.

Для численного моделирования динамики цепочки мы будем использовать три значения λ :

1.27 - при этом логистическое отображение демонстрирует периодические колебания с периодом 4, а показатель Ляпунова равен $\Lambda(0) \approx -0.098$;

1.402 - логистическое отображение находится вблизи критической точки и имеет небольшой положительный показатель Ляпунова $\Lambda(0) \approx 0.027$;

1.8 - это значение соответствует хаотическим колебаниям, $\Lambda(0) \approx 0.404$.

Используя формулу (31), можно найти такое число N связанных логистических отображений, при превышении которого режим синхронизации неустойчив для любых значений параметров связи ε_1 и ε_d . При $\lambda < \lambda_c$ ляпуновский показатель частичного отображения отрицателен и, следовательно, независимо от N всегда существуют значения ε_1 и ε_d , при которых синхронизация устойчива.

При $\lambda > \lambda_c$ максимальное число отображений зависит от λ как показано на рис. 3. Видно, что практически при всех закритических значениях λ это число равно 3 или 4 (за исключением периодических окон, где кривая стремится к бесконечности), и только вблизи критической точки оно может быть сравнительно большим. В частности, при $\lambda = 1.402$ устойчивая синхронизация может наблюдаться на цепочках длиной до 13 отображений, а при $\lambda = 1.8$ максимальное число отображений равно 3.

Построим карты синхронизации в координатах $(\varepsilon_1, \varepsilon_d)$, на которых выделим области поперечной устойчивости

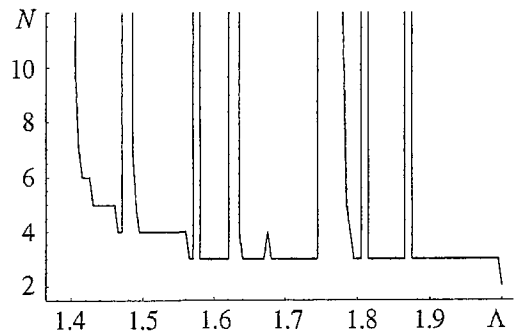


Рис. 3. Максимальное количество логистических отображений N , которые могут быть синхронизированы при $\lambda > \lambda_c = 1.40115$. График расходится в критической точке λ_c . Выбросы означают, что при данном λ ляпуновский показатель отрицателен (периодическое окно) и поэтому количество синхронизирующихся отображений не ограничено

симметричного аттрактора. Их можно выявить, найдя численно точки аттрактора и определив по формуле (22) значение старшего поперечного ляпуновского показателя в каждой точке плоскости $(\varepsilon_i, \varepsilon_d)$. Как и в случае хаотического симметричного аттрактора, в аттрактор вложены циклы, неустойчивые в продольном направлении. В зависимости от характера поперечной устойчивости типичной траектории на аттракторе, а также от поперечной устойчивости вложенных циклов, возможны четыре случая: сильная и слабая устойчивость и сильная и слабая неустойчивость. Для нахождения соответствующих областей на карте синхронизации необходимо численно получить типичную траекторию, а также отыскать вложенные циклы (будем ограничиваться циклами с периодом не более 8) и по формуле (22) определить их поперечную устойчивость в различных точках плоскости параметров.

На рис. 4, 5 и 6 представлены карты синхронизации для периодического симметричного аттрактора, для аттрактора вблизи критической точки и для аттрактора в режиме развитого хаоса, соответственно. Все карты симметричны относительно точки сверхустойчивой синхронизации. Видно, что для периодического аттрактора с ростом N форма и размеры области устойчивой

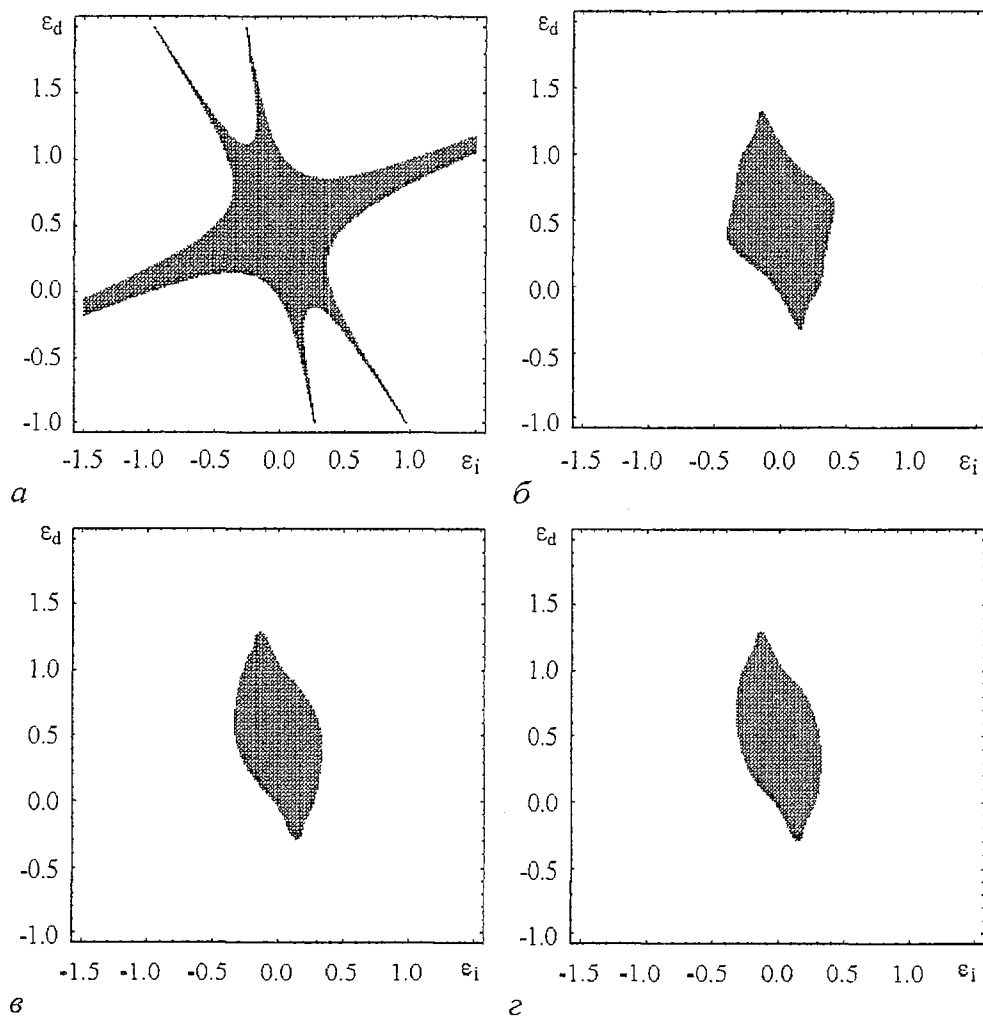


Рис. 4. Карты поперечной устойчивости симметричного аттрактора решетки логистических отображений при $\lambda=1.27$. Карты построены для $N=2$ (а), 3 (б), 4 (в) и 10 (г). Видно, что с ростом N форма области синхронизации перестает зависеть от N

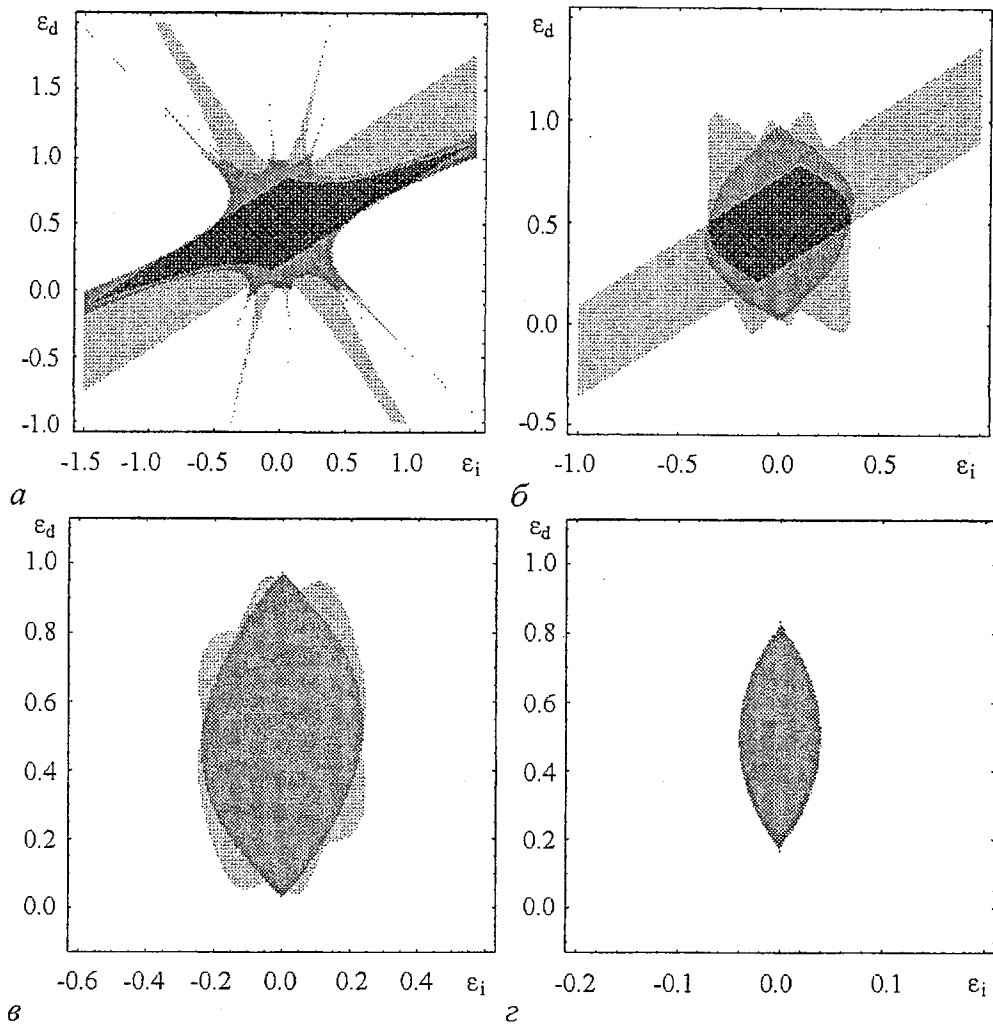


Рис. 5. Карты синхронизации при $\lambda=1.402$. Различные типы устойчивости симметричного аттрактора обозначены оттенками серого: черный цвет - сильная устойчивость, темно-серый - слабая устойчивость, светло-серый - слабая неустойчивость, а белый - сильная неустойчивость. Карты построены для $N=2$ (а), 3 (б), 4 (в), 10 (г). Заметим, что размер области синхронизации уменьшается с ростом N

синхронизации перестают зависеть от N . Для аттракторов с положительным $\Lambda(0)$ на картах выделены области с различными типами устойчивости. Заметим, что размеры областей устойчивой синхронизации уменьшаются с ростом N , а сильная устойчивость наблюдается только при $N \leq 3$. На всех рисунках карты синхронизации при $N=2$ значительно отличаются от остальных. Здесь области устойчивой синхронизации ограничены гиперболами, то есть имеются асимптотические направления, вдоль которых синхронизация остается устойчивой.

Рассмотрим теперь бассейны притяжения симметричного аттрактора, то есть множества точек фазового пространства, стартуя из которых, цепочка выходит на симметричный аттрактор. Так как фазовое пространство N -мерное, будем строить проекции бассейнов на плоскость начальных состояний первого и второго отображений (u^0, u^1) , а начальные состояния других отображений зададим как $u^k = (u^0 + u^1)/2$, где $k=2, 3, \dots, N-1$.

На рис. 7 приведены примеры бассейнов для трех рассматриваемых случаев. Бассейн притяжения периодического симметричного аттрактора устроен достаточно сложно и вдали от линии аттрактора приобретает фрактальную

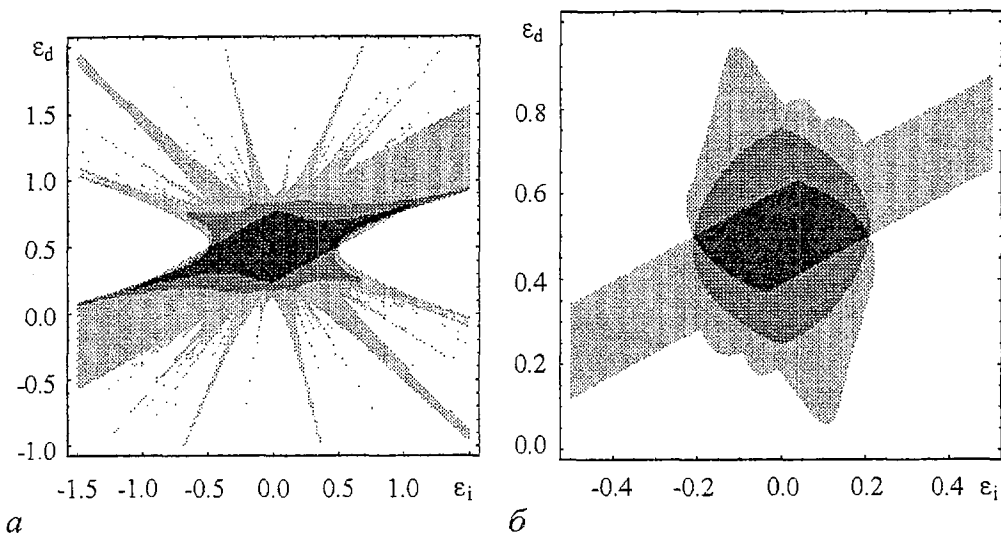


Рис. 6. Карты синхронизации при $\lambda=1.8$; $N=2$ (а), $N=3$ (б). При большем N симметричный аттрактор поперечно неустойчив во всех точках плоскости

структуру. Однако в непосредственной близости к аттрактору все точки принадлежат бассейну. Бассейн на рис. 7, а имеет структуру, подобную бассейнам притяжения аттракторов двух связанных логистических отображений, рассматриваемым в [19].

На рис. 7, б и в построены бассейны притяжения хаотических симметричных аттракторов. Видно, что они имеют пористую, изрешеченную структуру (riddled basin) [10,11]. Это означает, что в малой окрестности каждой точки бассейна имеются точки, которые ему не принадлежат и выводят систему на другой аттрактор. При этом в случае развитого хаоса (рис. 7, в) бассейн имеет менее регулярную структуру и менее разрежен.

На рис. 8, а и б показаны пространственно-временные диаграммы рассматриваемой цепочки для случая, когда симметричный аттрактор поперечно устойчив и начальное состояние цепочки принадлежит бассейну его притяжения. Значения параметров связи и начальные состояния отображений приведены в таблице. На рис. 8, в и г построены соответствующие спектры Фурье для первого отображения цепочки, найденные по формуле

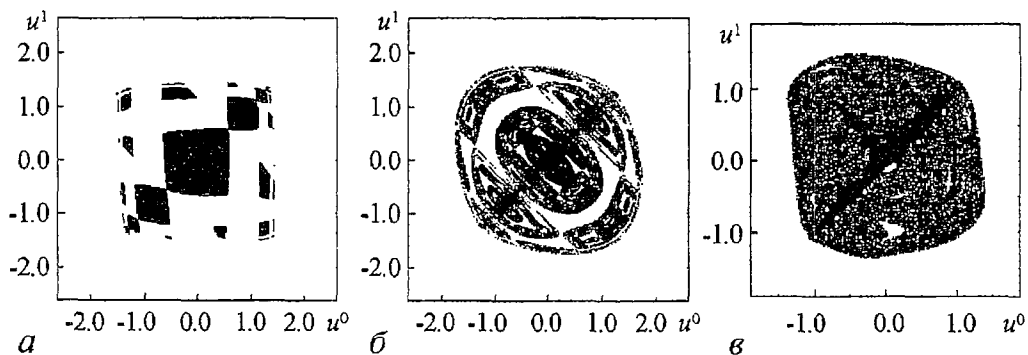


Рис. 7. Двумерные проекции бассейнов притяжения симметричного аттрактора решетки логистических отображений. По осям отложены начальные состояния первых двух отображений. Состояния остальных отображений задаются как $u^k=(u^0+u^1)/2$. а - $\lambda=1.27$, $N=10$, $\epsilon_1=-0.1$, $\epsilon_d=0.9$; б - $\lambda=1.402$, $N=10$, $\epsilon_1=0.02$, $\epsilon_d=0.5$; в - $\lambda=1.8$, $N=3$, $\epsilon_1=0.16$, $\epsilon_d=0.61$

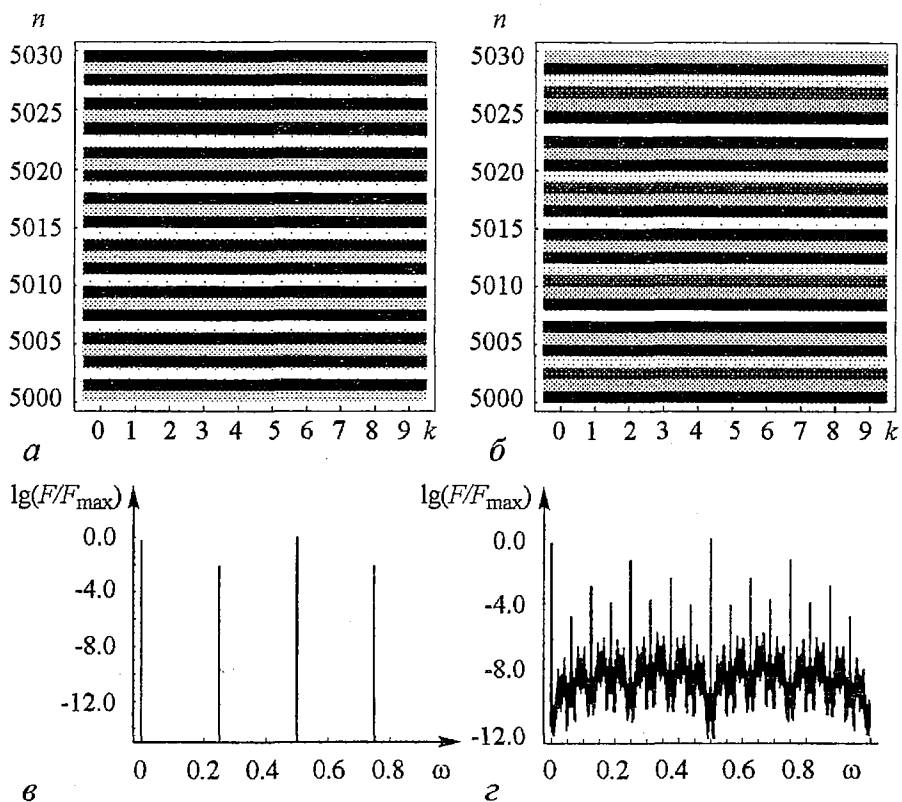


Рис. 8. Синхронизация решетки из $N=10$ логистических отображений (38) при $\lambda=1.27$ (а, в) и $\lambda=1.402$ (б, з). а, б - пространственно-временные диаграммы, где значения u_n^k представлены в виде оттенков серого: более светлые точки соответствуют большим величинам. в, з - спектры Фурье для u_n^0 .

Таблица

Значения параметров связи и начальные состояния отображений решетки, использованные для построения рисунков 8-13

Рис.	ε_i	ε_d	u^0	u^1	u^2	u^3	u^4	u^5	u^6	u^7	u^8	u^9
8, а	0.01	0.71	-0.45	0.03	-0.85	0.48	-0.29	-0.92	0.13	-0.62	-0.23	0.67
8, б	-0.01	0.63	-0.62	0.13	-0.83	0.54	0.38	0.81	0.97	0.07	0.76	-0.82
9, а	-0.04	0.04	-0.96	-0.66	-0.42	0.68	-0.11	-0.29	-0.89	0.34	-0.94	0.29
9, б	-0.24	0.83	0.31	0.92	-0.31	-0.37	-0.61	-0.21	0.87	-0.63	-0.38	-0.97
10, а	-0.16	0.59	0.80	-0.27	-0.10	1.00	0.26	0.52	0.98	-0.67	0.41	0.00
10, б	0.26	0.47	0.09	-0.37	-0.03	0.57	-0.26	-0.89	0.12	0.87	0.76	0.06
11, а	-0.28	0.21	-0.68	-0.61	-0.19	0.45	-0.70	-0.85	0.61	0.65	0.00	-0.80
11, б	0.49	0.91	0.02	-0.53	-0.16	0.85	-0.27	0.18	-0.87	-0.18	-0.91	-0.15
12, а	0.32	0.78	0.80	-0.50	-0.47	0.91	0.57	-0.30	-0.55	0.34	-0.90	0.98
12, б	-0.40	0.62	-0.44	1.00	0.79	-0.75	-0.38	0.59	-0.51	0.89	-0.02	-0.36
13, а	0.56	0.62	-0.67	0.31	-0.89	-0.38	-0.10	-0.05	0.71	0.14	-0.37	-0.66
13, б	0.41	0.85	-0.76	0.56	0.73	-0.34	0.49	0.67	-0.49	0.93	0.89	0.79
13, в	0.12	1.10	-0.16	0.99	0.94	-0.12	-0.77	-0.64	0.27	-0.97	0.30	-0.80
13, з	0.17	0.82	-0.75	0.36	0.90	-0.89	0.47	0.92	-0.10	0.15	0.68	0.54

$$F(\omega; U_{0,1,\dots,M-1}) = (1/M) |\sum_{n=0}^{M-1} U_n \exp(2\pi i n \omega)|^2, \quad (39)$$

где ω принимает дискретные значения в интервале $0 \leq \omega < 1$ с шагом $1/M$, а в качестве U_n берется u_n^0 .

Приведенные спектры совпадают со спектрами парциальных отображений при отсутствии связи.

Кроме синхронного режима, обсуждаемая цепочка может демонстрировать большое количество других типов поведения. В отличие от синхронизации, когда отображения колеблются так, как будто связь отсутствует, в асинхронном режиме воздействие соседнего отображения вызывает изменение эффективного значения управляющего параметра отображения. Это приводит к тому, что поведение

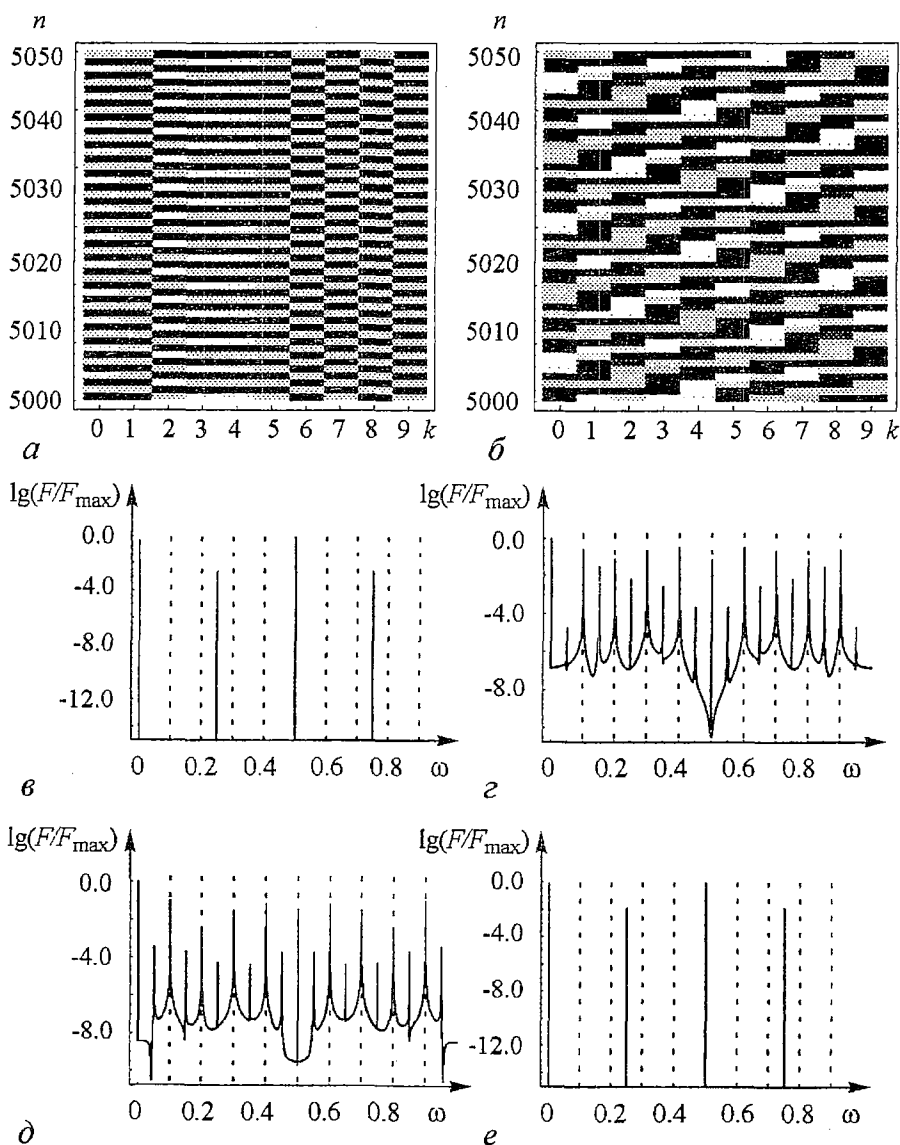


Рис. 9. Резонансный режим решетки связанных отображений: а, в, д - периодические колебания; б, г, е - волна, имеющая единичную скорость. $\lambda=1.27$ и $N=10$. Фурье-спектры в и г построены для u_n^0 (неподвижная система отсчета), а спектры д и е - для $u_n^{(N-1-n) \bmod N}$ (система отсчета движется слева направо с единичной скоростью). Вертикальные пунктиры показывают частоты, кратные $1/N$. Отметим качественную идентичность спектров в и е, а также г и д

цепочки в целом в меньшей степени зависит от управляющего параметра парциального отображения по сравнению с тем, как это имеет место в случае синхронизации.

Выявление различных динамических режимов затруднено тем, что характер поведения, помимо зависимости от двух параметров связи, может чувствительно зависеть также и от начальных состояний отображений цепочки, что делает задачу $(N+2)$ -параметрической. Одним из возможных подходов в этом случае является случайный перебор различных значений управляющих параметров и начальных состояний и последующая классификация обнаруженных типов поведения.

Мы будем проводить классификацию динамических режимов по виду их пространственно-временных диаграмм, а также по структуре спектров Фурье $F(\omega; u_n^0)$ и $F(\omega; u_n^{(N-1-n) \bmod N})$ (39). Первый из этих спектров можно интерпретировать как наблюдение за системой в неподвижной системе отсчета, а второй - в системе, движущейся справа налево (в направлении действия связи) с единичной скоростью.

Резонансный режим (рис. 9). На рис. 9, а показан первый вариант, когда

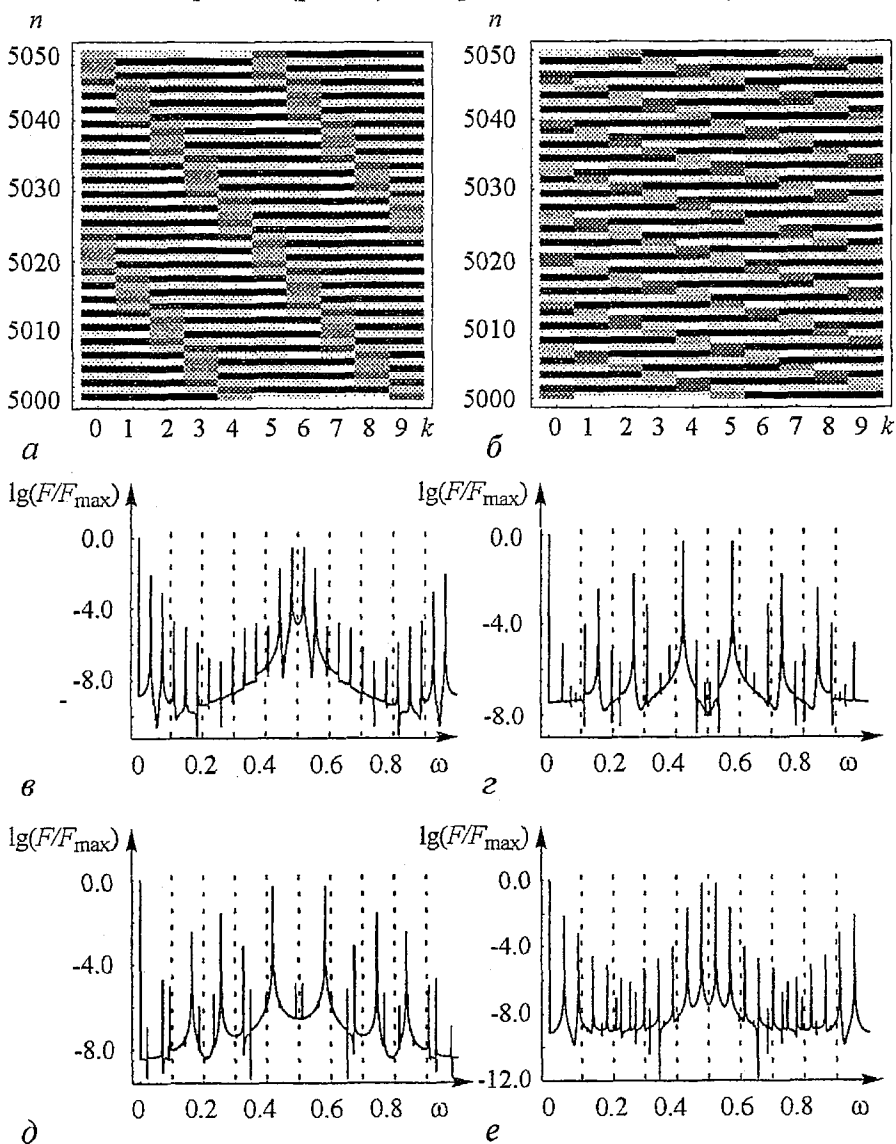


Рис. 10. Локальная синхронизация: существующие в системе синхронные колебания прерываются при прохождении волновых пакетов возмущения, а затем возобновляются, но уже с другой фазой. $\lambda=1.27$ и $N=10$. Спектры Фурье в-е построены аналогично рис. 9

Резонансный режим (рис. 9). На рис. 9, а показан первый вариант, когда отображения совершают периодические колебания. Отметим, что этот режим можно наблюдать при различных значениях λ , в том числе, соответствующих хаотическому индивидуальному поведению парциального отображения. На рисунке показаны колебания с периодом 4, о чем можно судить по виду спектра Фурье на рис. 9, в, однако можно наблюдать колебания и с другими периодами. В движущейся системе отсчета эти колебания трансформируются в волну, бегущую с единичной скоростью, а в соответствующем спектре Фурье появляются пики на частотах, кратных $1/N$ (рис. 9, д).

Второй вариант резонансного режима представлен на рис. 9, б. Теперь в неподвижной системе отсчета по цепочке бежит волна с единичной скоростью и в

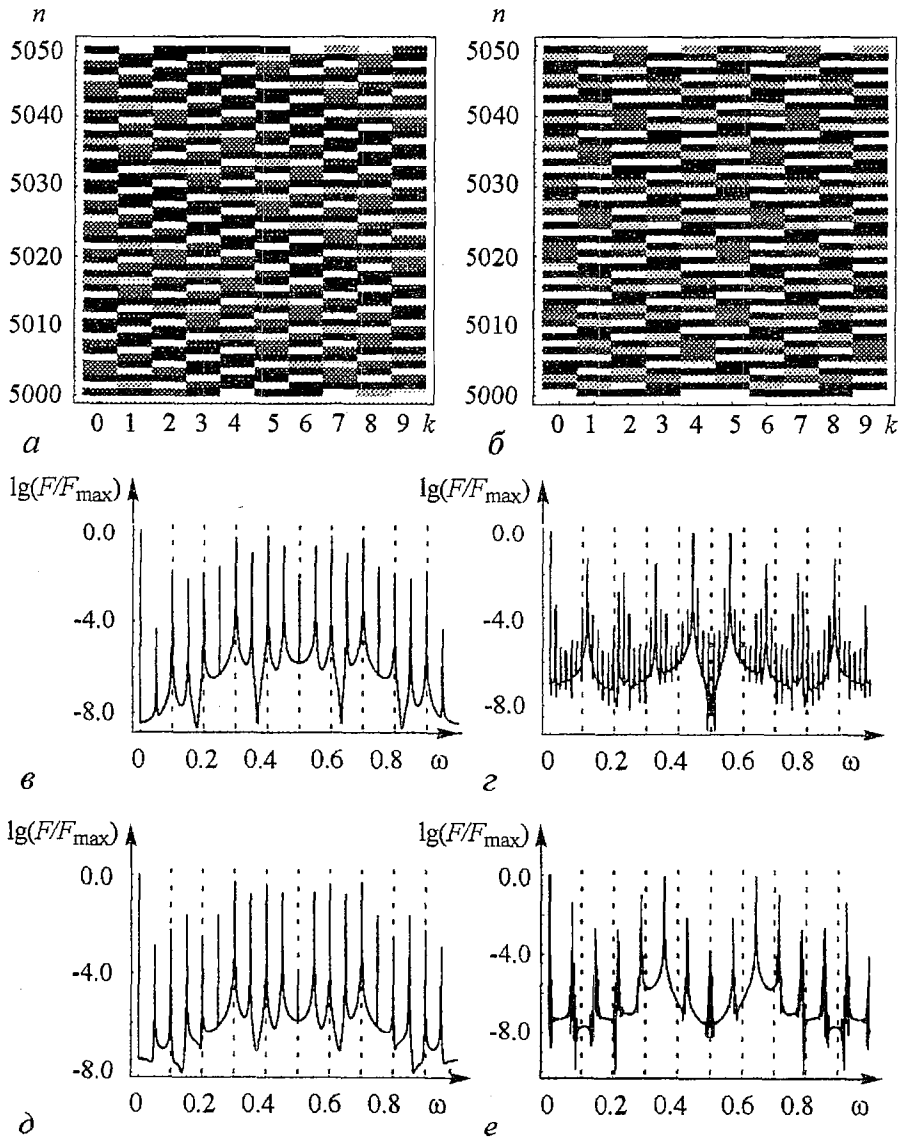


Рис. 11. Смешанный режим: частота колебаний и частота бегущей волны близки и на пространственно-временной диаграмме возникает достаточно однородная картина. При этом спектры в неподвижной (в и г) и в движущейся (д и е) системах отсчета устроены более или менее одинаково. Отметим определенное сходство пространственно-временных диаграмм на рис. 11, а и рис. 9, б, а также на рис. 11б и рис. 10, а. Значения λ : 1.8 (а, в, д); 1.27 (б, г, е)

Локальная синхронизация (рис. 10). Второй часто наблюдаемый тип поведения также представлен двумя вариантами.

Первый вариант показан на рис. 10, *а*. Колебания соседних отображений синхронизируются, однако бегущий по цепочке волновой пакет возмущения разрушает синхронизацию. После прохождения пакета синхронные колебания возобновляются, но с другой фазой. В спектре, полученном в неподвижной системе отсчета, выделяются низкочастотная и высокочастотная области (рис. 10, *в*). Из пространственно-временной диаграммы хорошо видно, что частота следования волновых пакетов возмущения действительно значительно меньше частоты синхронных колебаний. В спектре, полученном в подвижной системе отсчета (рис. 10, *д*), напротив преобладают высокочастотные составляющие и высоты доминирующих пиков монотонно убывают от центра к краям.

Для второго варианта (рис. 10, *б*) характерно преобладание высокочастотных колебаний, и спектр Фурье в неподвижной системе отсчета имеет вид как на рис. 10, *г*: наиболее высокие пики более или менее монотонно убывают от центра спектра к краям. В подвижной системе отсчета (рис. 10, *е*), пики группируются в области высоких частот, что соответствует синхронным колебаниям, и в области низких частот, что соответствует волновому возмущению.

Смешанный режим (рис. 11) встречается тем чаще, чем больше величина λ . Здесь частота колебаний и частота бегущей волны близки, так что нельзя, как в предыдущем случае, визуально выделить их на пространственно-временной диаграмме. Вместо этого возникает достаточно однородная картина, а спектры Фурье в неподвижной и в движущейся системах отсчета устроены более или менее одинаково. На рис. 11, *а* показан случай, когда волны, бегущие по цепочке, имеют единичную скорость. Это соответствует резонансному режиму (см. рис. 9). На рис. 11, *б* наблюдается локальная синхронизация, как на рис. 10.

На рис. 12 показаны другие интересные случаи. Из рис. 12, *а* видно, что волновой пакет возмущения может бежать в направлении, противоположном действию связи, то есть слева направо. На рис. 12, *б* показан случай, когда колебания во времени прекращаются и возникает стационарное периодическое распределение.

На рис. 13 приведены примеры нерегулярного поведения цепочки. Такое поведение чаще всего встречается, когда λ попадает в область, где индивидуальная динамика парциального отображения является хаотической. Видно, что можно наблюдать «зашумленные» варианты поведения, описанного выше (ср. рис. 13, *а* и

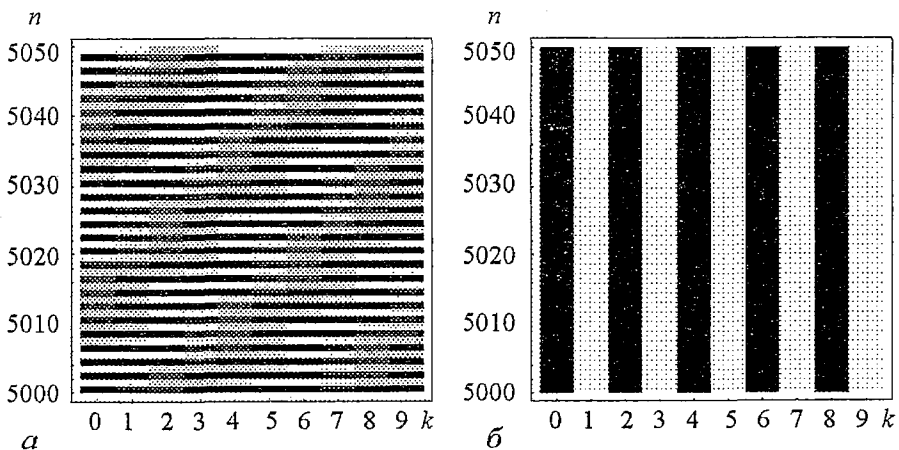


Рис. 12. Другие примеры регулярного поведения: *а* - волна возмущения бежит в направлении, противоположном действию связи; *б* - прекращение колебаний во времени. $\lambda=1.27$ и $N=10$

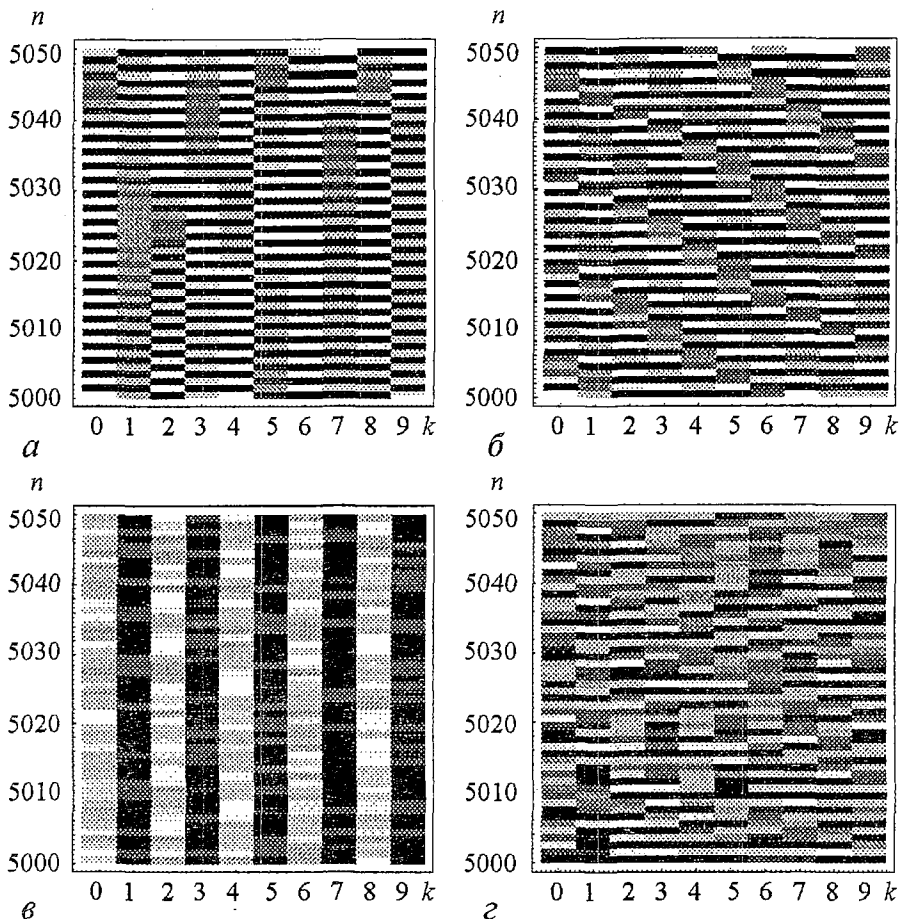


Рис. 13. Примеры нерегулярного поведения. Можно наблюдать как «зашумленные» (*a*, *б*, *в*) варианты пространственно-временных диаграмм, представленных на рисунках выше, так и практически полностью нерегулярные колебания (*г*). Значения параметров: $N=10$; $\lambda=1.27$ (*a*, *б*), 1.402 (*в*), 1.8 (*г*)

динамика парциального отображения является хаотической. Видно, что можно наблюдать «зашумленные» варианты поведения, описанного выше (ср. рис. 13, *a* и 9, *a*; 13, *б* и 10, *a*; 13, *в* и 12, *б*). Кроме того, наблюдаются также практически полностью нерегулярные колебания (рис. 13, *г*).

Заключение

В работе рассмотрена цепочка однонаправленно связанных идентичных отображений с периодическими граничными условиями и функцией связи общего вида, допускающей режим полной синхронизации, то есть режим, в котором все подсистемы в каждый момент времени находятся в одинаковых состояниях. Устойчивость режима синхронизации зависит от ляпуновского показателя парциального отображения и от длины цепочки. В случае, если парциальный ляпуновский показатель отрицателен, то для любого числа отображений можно подобрать такую функцию связи, что синхронизация будет устойчивой. Если же парциальный ляпуновский показатель больше нуля, то в зависимости от его величины существует некоторое предельное количество отображений, при превышении которого синхронизация неустойчива независимо от вида связи.

Рассмотрен случай, когда отображения связаны инерционной и

обладает наибольшей устойчивостью. Исходя из этого, получено соотношение, связывающее ляпуновский показатель парциального хаотического отображения и максимальную длину цепочки, для которой синхронизация может быть устойчивой при выборе определенных значений параметров связи. Для двух отображений такие значения существуют независимо от парциального показателя Ляпунова. С ростом длины цепочки предельное значение ляпуновского показателя убывает до нуля быстрее, чем экспонента. Поэтому синхронизация большого числа хаотических отображений может быть устойчива, только если ляпуновский показатель парциального отображения достаточно близок к нулю, то есть на пороге бифуркации.

В качестве конкретного примера рассмотрена цепочка логистических отображений с инерционной и диссипативной связью. Построены плоскости параметров связи и двумерные проекции бассейнов притяжения симметричного аттрактора, на который система выходит в режиме синхронизации. Кроме синхронизации рассмотрены также и другие часто наблюдаемые режимы поведения цепочки, среди которых выделено несколько типичных случаев.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 03-02-16192.

Библиографический список

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Синхронизация периодических, хаотических и индуцированных шумом стохастических колебаний // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 2. С. 133.
2. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Phase synchronization in regular and chaotic systems // Int. J. Bif. Chaos. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291.
3. Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D. Chaotic synchronization. Applications to living systems // World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A. Vol. 42, Singapore, World Scientific, 2002.
4. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled oscillating systems // Prog. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. P. 32.
5. Pikovsky A.S. On the interaction of strange attractors // Z. Phys. B. 1984. Vol. 55. P. 149.
6. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Общая синхронизация // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Vol. 29. P. 795.
7. Pecora L.M., Carrol T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
8. Maistrenko Yu., Kapitaniak T. Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 3285.
9. Купцов П.В. Двухпараметрический анализ синхронизации хаотических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т.7, № 6. С. 42.
10. Alexander J.C., Yorke J.A., You Z., Kan I. Riddled basins // Int. J. Bif. Chaos. 1992. Vol. 2, № 4. P. 795.
11. Ott E., Sommerer J.C. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 188. P. 39.
12. Milnor J. On the concept of attractor // Commun. Math. Phys. 1985. Vol. 99. P. 177.
13. Heagy J.F., Carrol T.L., Pecora L.M. Desynchronization by periodic orbits // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. R1253.
14. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On-off intermittency: A mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
15. Ashwin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 193. P. 126.

16. *Lin W.W., Peng C.C., Wang C.S.* Synchronization in coupled map lattices with periodic boundary condition // *Int. J. Bif. Chaos.* 1999. Vol. 9. P. 1635.

17. *Lin W.W., Wang Y.Q.* Chaotic synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2002. Vol. 1. P. 175.

18. *Кузнецов С.П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28, № 8. С. 991.

19. *Астахов С.А., Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Эволюция бассейнов притяжения аттракторов связанных систем с удвоением периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 2-3. С. 87.

Саратовское отделение ИРЭ РАН

*Поступила в редакцию 16.10.03
после доработки 24.05.04*

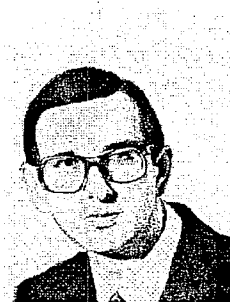
SYNCHRONIZATION AND COLLECTIVE BEHAVIOR OF A COUPLED MAP LATTICE WITH UNIDIRECTIONAL COUPLING AND PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov

Full synchronization is considered for a coupled map lattice with periodic boundary conditions. The lattice composed of the identical maps and the coupling is local and unidirectional, i.e., every map undergoes the action only from its right neighbor. If the lattice consists of the chaotic maps, then there is the limiting lattice length above which synchronization is always unstable for any type of coupling. This limiting value depends on the Liapunov exponent of the partial map. When the partial Liapunov exponent is negative, as for the periodic map, there always exists an appropriate coupling for which the lattice of any length have stable synchronization. As an example the lattice of logistic maps with the inertial and dissipative coupling is considered. Stability of synchronization is discussed for the different types of individual dynamics of the partial map. Some other typical regimes of dynamics are revealed and discussed.



Купцов Павел Владимирович родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского университета (1994). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1998). Область научных интересов - нелинейная динамика, теория критических явлений. Автор нескольких научных работ по этой теме.



Кузнецов Сергей Петрович родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, профессор факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета, заведующий лабораторией Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений при переходе к хаосу. Опубликовал свыше 150 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники, радиофизики и на факультете нелинейных процессов СГУ. Соросовский профессор (2000, 2001). Член-корреспондент РАН.

E-mail: kuz@spkuz.saratov.su.