

Изв. вузов «ПНД», т.12, № 4, 2004

УДК 517.9

## К ВОПРОСУ О ЧАСТИЧНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

П.С. Ланда

Показано, что если переменные системы можно разделить на быстрые и медленные, то синхронизация возможна только для медленных переменных, тогда как быстрые могут оставаться несинхронизированными. В частности, такой медленной переменной может быть разность фаз колебаний двух связанных автоколебательных систем. Только в этом случае понятие фазовой синхронизации имеет физический смысл.

*Светлой памяти Ю.Л. Климонтовича  
посвящается*

Последние годы перед смертью Ю.Л. Климонтович активно интересовался новыми идеями, публикуемыми, главным образом, за рубежом. В них, в частности, входят стохастический резонанс, *ratchets* и фазовая синхронизация. Как и я, он критически относился ко многим опубликованным работам по этим вопросам. Об этом свидетельствует его статья в журнале УФН [1], касающаяся стохастического резонанса, где он убедительно показал, что существующие представления о природе этого явления не соответствуют действительности. К сожалению, внезапная преждевременная кончина не позволила ему высказать свои соображения и по другим указанным вопросам. В этой статье, посвященной светлой памяти Ю.Л. Климонтовича, как один из вопросов, которые мы с ним активно обсуждали, рассматривается проблема так называемой «фазовой синхронизации», которой в настоящее время посвящено огромное количество работ. Прежде всего, следует отметить, что в русской литературе под термином «фазовая синхронизация», возникшем много лет тому назад [2], понимается совсем не то явление, которое рассматривали авторы этого термина в западной литературе [3-5]. К сожалению, в настоящее время этот термин общепринят, так что приходится им пользоваться.

Под термином «фазовая синхронизация», введенным в [3-5], его авторы понимали, что во многих автоколебательных системах с внешним воздействием или в связанных автоколебательных системах можно ввести некоторую переменную, имеющую смысл сдвига фаз, которая в определенном диапазоне параметров будет в среднем оставаться постоянной, тогда как другие переменные системы будут изменяться регулярно или хаотически. Этот диапазон параметров был назван областью фазовой синхронизации. Чтобы обосновать свою идею, авторы ссылались на работы Р.Л. Стратоновича по синхронизации генератора при наличии помех [6], где он показал, что при определенных условиях исходные уравнения системы могут быть приближенно сведены к уравнению для сдвига фаз

между колебаниями генератора и внешней силой. Стратонович также указал условия, когда этого делать нельзя. Между тем, авторы [3-5] и многие их последователи (см., например, недавний обзор [7]) этих условий четко не оговаривали. В результате складывалось впечатление, что этот прием можно использовать для любых систем. Поэтому, в первую очередь, остановимся на условиях, которые были использованы Стратоновичем при сведении исходной системы уравнений к одному уравнению для разности фаз.

Еще в 1954 году Р.В. Хохлов предложил прием [8], названный им «метод поэтапного упрощения укороченных уравнений и его применение к некоторым проблемам радиофизики» и явившийся темой его докторской диссертации. Позднее этот прием был обоснован математиками [9], получил название «метод усреднения в системах, содержащих быстрые и медленные движения», и стал широко применяться при решении многих задач, в частности, задач синхронизации.

Согласно указанному методу, сведение исходных уравнений системы к уравнению для фазы и использование понятия фазовой синхронизации возможны только тогда, когда фаза устанавливается значительно медленнее, чем все остальные переменные системы. Как будет показано ниже, этот тип синхронизации можно рассматривать как частный случай более общей синхронизации в сложных системах, которую можно назвать «частичной синхронизацией».

Итак, рассмотрим некоторую систему, часть переменных которой являются быстрыми, а остальные - медленными. Уравнения такой системы удобно записать в векторной форме [9]

$$dx/dt = \varepsilon X(t, \varepsilon t, x, y), \quad dy/dt = Y(t, \varepsilon t, x, y), \quad (1)$$

где компоненты вектора  $x$  являются медленными переменными, а компоненты вектора  $y$  - быстрыми переменными. Это означает, что в течение характерного времени изменения компонент вектора  $y$  компоненты вектора  $x$  не успевают существенно измениться, и поэтому в первом приближении их можно считать постоянными. Полагаем, что при  $x=\text{const}$  уравнение для  $y$  можно решить, то есть можно найти интегральные кривые

$$y=y(t, \varepsilon t, x, y_0), \quad (2)$$

где  $y_0$  - вектор начальных условий.

Влияние быстрых компонент вектора  $y$  на изменение медленных компонент вектора  $x$  сводится к тому, что на малую скорость изменения  $x$  накладывается быстрое воздействие  $y$ , поскольку вектор-функция  $X$  зависит от компонент вектора  $y$ . Естественно напрашивается вывод, что можно усреднить  $X$  по  $y$ . При этом усредненные уравнения окажутся не зависящими от  $y$ .

Предположим, что такое усреднение вдоль интегральных кривых (2) возможно, то есть существует предел

$$\overline{X}(t, \varepsilon t, x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T X(t, \varepsilon t, x, y(t, \varepsilon t, x, y_0)) dt. \quad (3)$$

Так как время установления компонент вектора  $y$  много меньше, чем характерное время изменения компонент вектора  $x$ , то начальные условия  $y_0$  должны слабо влиять на поведение вектора  $x$ . Значение интеграла в (3) изменится незначительно, если в качестве нижнего предела возьмем не начальный момент времени, а такой момент, когда решение  $y(t, \varepsilon t, x)$  уже успело установиться. Поэтому усредненная вектор-функция  $\bar{X}$  должна очень слабо зависеть от начальных условий, то есть в формуле (3) в качестве интегральной кривой можно взять установившееся решение.

Пусть мы имеем две системы, описываемые уравнениями вида (1) и связанные по медленным переменным. Запишем уравнения этих систем в том же виде (1). В соответствии со сказанным выше, можно усреднить вектор-функцию  $\mathbf{X}(t, \varepsilon t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  и переписать уравнения (1) в следующем виде:

$$d\mathbf{x}/dt = \varepsilon \mathbf{X}_a(t, \varepsilon t, \mathbf{x}), \quad d\mathbf{y}/dt = \mathbf{Y}(t, \varepsilon t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{X}_a(t, \varepsilon t, \mathbf{x})$  - усредненная вектор-функция. Если в некотором диапазоне параметров системы какие-либо функционалы от ряда компонент вектора  $\mathbf{x}$  являются константами, можно говорить, что эти компоненты синхронизуются. Такое определение синхронизации соответствует данному в [10]. При этом другие компоненты вектора  $\mathbf{x}$  и компоненты вектора  $\mathbf{y}$  могут вести себя сложным образом, и даже быть случайными. Это явление может быть названо частичной синхронизацией. Если в системе имеется не одна, а несколько медленных переменных, то возможно возникновение целой иерархии видов частичной синхронизации. Очевидно, что в этом аспекте фазовая синхронизация может рассматриваться как частный случай частичной синхронизации. Следует отметить, что в отличие от полной синхронизации, которая в случае хаотических систем имеет конечный порог [11,12], фазовая синхронизация в указанном выше смысле порога не имеет. Но дисперсия фазы  $\mathbf{i}$ , соответственно, частоты колебаний может быть настолько велика, что использование этого понятия теряет физический смысл.

В качестве примера мы рассмотрим два связанных осциллятора Ресслера. Уравнения для этих осцилляторов мы зададим в той же форме, что и в работе [13],

$$\begin{aligned} \dot{X}_{1,2} &= -\Omega_{1,2} Y_{1,2} - Z_{1,2} + m(X_{2,1} - X_{1,2}), \\ \dot{Y}_{1,2} &= \Omega_{1,2} X_{1,2} + e Y_{1,2}, \\ \dot{Z}_{1,2} &= d + Z_{1,2}(X_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $e=0.165$ ,  $d=0.2$ ,  $c=10$ ,  $\Omega_{1,2}=\Omega_0 \pm \Delta$ ,  $\Omega_0=0.97$ ,  $\Delta=0.02$ , а коэффициент связи  $m$  будем варьировать.

При заданных значениях параметров и малой связи уравнения (5) имеют две неустойчивые особые точки (см. [14]) с координатами

$$\begin{aligned} X_{1,2}^{(1)} &= X_{01} \mp \Delta X_1, \quad Y_{1,2}^{(1)} = -(1/e)\Omega_0 X_{1,2}^{(1)} \pm \Delta Y_1, \quad Z_{1,2}^{(1)} = d/(c-X_{01}) \pm \Delta Z_1, \\ X_{1,2}^{(2)} &= X_{02} \mp \Delta X_2, \quad Y_{1,2}^{(2)} = -(1/e)\Omega_0 X_{1,2}^{(2)} \pm \Delta Y_2, \quad Z_{1,2}^{(2)} = d/(c-X_{02}) \pm \Delta Z_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$X_{01} = 1/2 [c - (c^2 - 4ed/\Omega_0^2)^{1/2}], \quad X_{02} = 1/2 [c + (c^2 - 4ed/\Omega_0^2)^{1/2}],$$

$$\Delta X_1 = 2X_{01}(X_{01} - c)\Delta/[\Omega_0(2X_{01} - c)], \quad \Delta Y_1 = X_{01}\Delta/e, \quad \Delta Z_1 = 2d\Delta/[c\Omega_0(2X_{01} - c)],$$

$$\Delta X_2 = 2X_{02}(X_{02} - c)\Delta/[\Omega_0(2X_{02} - c)], \quad \Delta Y_2 = X_{02}\Delta/e, \quad \Delta Z_2 = 2d\Delta/[c\Omega_0(2X_{02} - c)].$$

Можно показать, что первая из этих точек неустойчива колебательно, а вторая - апериодически.

Введем в качестве новых переменных отклонения от колебательно неустойчивой особой точки  $x_{1,2}=X_{1,2}-X_{1,2}^{(1)}$ ,  $y_{1,2}=Y_{1,2}-Y_{1,2}^{(1)}$ ,  $z_{1,2}=Z_{1,2}-Z_{1,2}^{(1)}$ . Для этих отклонений из (5) мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\Omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + m(x_{2,1} - x_{1,2}); \\ \dot{y}_{1,2} &= \Omega_{1,2}x_{1,2} + ey_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= Z_{1,2}^{(1)}x_{1,2} - (c - X_{1,2}^{(1)})z_{1,2} + x_{1,2}z_{1,2}.\end{aligned}\quad (7)$$

Нетрудно показать, что уравнения (7) описывают связанные системы с инерционной нелинейностью. Возбуждение автоколебаний в таких системах происходит за счет «отрицательного трения», а их ограничение - за счет инерционного взаимодействия между динамическими переменными  $x_{1,2}$  и  $z_{1,2}$ .

Вслед за [13] введем «амплитуды»  $A_{1,2}$  и «фазы»  $\psi_{1,2}$  путем подстановки в уравнения (7)  $x_{1,2} = A_{1,2} \cos \psi_{1,2}$ ,  $y_{1,2} = A_{1,2} \sin(\psi_{1,2})$ , где  $\psi_{1,2} = \Omega_0 t + \varphi_{1,2}$ . Заметим, что эта подстановка аналогична той, которая была предложена Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси для обоснования метода Ван дер Поля [15]. В результате для введенных амплитуд, фаз и переменных  $z_{1,2}$  получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{z}_{1,2} + (c - X_{1,2}^{(1)})z_{1,2} &= (Z_{1,2}^{(1)} + z_{1,2})A_{1,2} \cos \psi_{1,2}, \\ \dot{A}_{1,2} &= eA_{1,2} \sin^2 \psi_{1,2} - z_{1,2} \cos \psi_{1,2} + m(A_{2,1} \cos \psi_{2,1} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}) \cos \psi_{1,2}, \\ \dot{\psi}_{1,2} &= \pm \Delta + (e \cos \psi_{1,2} + z_{1,2}/A_{1,2}) \sin \psi_{1,2} - m(A_{2,1} \cos \psi_{2,1}/A_{1,2} - \cos \psi_{1,2}) \sin \psi_{1,2}.\end{aligned}\quad (8)$$

Из уравнений (8) видно, что рассматриваемая система имеет три характерных времени:  $\tau_1 = 1/c$ ,  $\tau_2 = 1/e$  и  $\tau_3 = 1/\Delta$ . При выбранных значениях параметров эти времена соотносятся друг с другом и с «периодом»  $T = 2\pi/\Omega_0$  следующим образом:  $\tau_1 \ll T \ll \tau_2 \ll \tau_3$ . Отсюда следует, что фазовый сдвиг  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$  является медленной переменной. Что касается переменных  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ , то здесь вопрос обстоит значительно сложнее. Численное моделирование уравнений (8) показывает, что переменные  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  представляют собой случайные последовательности коротких (длительности порядка  $1/c$ ) импульсов, между которыми значения  $z_{1,2}(t)$  изменяются относительно медленно (с характерным временем  $T \gg 1/c$ ). Поэтому удобно перейти к новым переменным

$$u_{1,2} = z_{1,2} - z_{1,2}^{(0)}, \quad (9)$$

где

$$z_{1,2}^{(0)} = Z_{1,2}^{(1)}A_{1,2} \cos \psi_{1,2} / [c - X_{1,2}^{(1)} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}] \quad (10)$$

- решения первого уравнения (8) в предположении, что  $A_{1,2}$  и  $\psi_{1,2}$  в его правой части являются константами. В этих переменных уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{u}_{1,2} + (c - X_{1,2}^{(1)} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2})u_{1,2} &= \frac{Z_{1,2}^{(1)}(c - X_{1,2}^{(1)})}{(c - X_{1,2}^{(1)} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2})^2} \times \\ &\times \left\{ \left[ eA_{1,2} \sin^2 \psi_{1,2} - u_{1,2} \cos \psi_{1,2} - \frac{Z_{1,2}^{(1)}A_{1,2} \cos^2 \psi_{1,2}}{c - X_{1,2}^{(1)} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}} + \right. \right. \\ &\left. \left. + m(A_{2,1} \cos \psi_{2,1} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}) \cos \psi_{1,2} \right] \cos \psi_{1,2} - \right. \\ &- \left. \left[ (\Omega_0 \pm \Delta)A_{1,2} + eA_{1,2} \cos \psi_{1,2} + u_{1,2} + \frac{Z_{1,2}^{(1)}A_{1,2} \cos \psi_{1,2}}{c - X_{1,2}^{(1)} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}} \sin \psi_{1,2} - \right. \right. \\ &\left. \left. - m(A_{2,1} \cos \psi_{2,1} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}) \sin \psi_{1,2} \right] \sin \psi_{1,2} \right\},\end{aligned}\quad (11)$$

$$\dot{A}_{1,2} = e A_{1,2} \sin^2 \psi_{1,2} - \frac{Z_{1,2}^{(1)} A_{1,2} \cos^2 \psi_{1,2}}{c - X_{1,2}^{(1)} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}} + \\ + m (A_{2,1} \cos \psi_{2,1} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}) \cos \psi_{1,2} u_{1,2} \cos \psi_{1,2}, \quad (12)$$

$$\dot{\psi}_{1,2} = \pm \Delta + \frac{1}{2} \left( e + \frac{Z_{1,2}^{(1)}}{c - X_{1,2}^{(1)} - A_{1,2} \cos \psi_{1,2}} \right) \sin 2\psi_{1,2} - \\ - m \left( \frac{A_{2,1}}{A_{1,2}} \cos \psi_{2,1} - \cos \psi_{1,2} \right) \sin \psi_{1,2} + \frac{u_{1,2}}{A_{1,2}} \sin \psi_{1,2}. \quad (13)$$

В рассматриваемой системе возможны три уровня синхронизации. Высший уровень - это полная синхронизация, когда колебания в обоих осцилляторах почти совпадают, но слегка задержаны друг относительно друга. Этот тип синхронизации существует при  $m > 0.14$ . В работе [13], претендующей на его открытие, он был назван lag-синхронизацией. Однако следует отметить, что впервые этот тип синхронизации численно наблюдался в работе [16]. Пример такой синхронизации иллюстрирован на рис. 1 для  $m = 0.15$ . Из рисунка видно, что колебания обоих осцилляторов практически совпадают (задержка между ними много меньше «периода»).

Следующий уровень - это частичная синхронизация, когда моменты генерации импульсов переменных  $u_{1,2}$  практически совпадают. Как следует из наших численных расчетов, значение  $m$ , соответствующее возникновению этого типа синхронизации, приблизительно равно 0.095 (рис. 2). При этом значении  $m$  амплитуды колебаний в обоих генераторах существенно отличаются друг от друга (рис. 2, а, б).

Наконец, наименший уровень синхронизации - это также частичная синхронизация, когда только фазы колебаний переменных  $x_{1,2}$  и  $y_{1,2}$  синхронизуются, то есть разность фаз в среднем является константой. Это именно тот случай, который был назван в [3-5] фазовой синхронизацией. При выбранном значении расстройки этот тип синхронизации становится возможным при  $m \approx 0.04$  (рис. 3). При  $m \geq 0.04$  средние частоты колебаний в обоих осцилляторах совпадают. Это следует из того факта, что наклоны зависимостей  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  от  $t$  в среднем одинаковы (рис. 3, г).

Поскольку трудно ввести переменную, описывающую моменты генерации импульсов переменных  $u_{1,2}(t)$ , аналитическое рассмотрение частичной синхронизации оказалось возможно только для фазовой синхронизации. Так как времена установления амплитуд и фаз много больше, чем  $\tau_1$  и  $T$ , мы можем усреднить правые части уравнений (12), (13) по  $\psi_{1,2}$ . Пренебрегая влиянием коротких импульсов переменных  $u_{1,2}(t)$  на результаты усреднения, получаем следующие усредненные уравнения:

$$\dot{A}_{1,2} = e A_{1,2} / 2 - c_{1,2} Z_{1,2}^{(1)} / A_{1,2} [c_{1,2} / (c_{1,2}^2 - A_{1,2}^2)^{1/2} - 1] + m / 2 (A_{2,1} \cos \Phi - A_{1,2}), \quad (14)$$

$$\dot{\varphi} = m / 2 (A_2 / A_1 - A_1 / A_2) \sin \Phi, \quad (15)$$

$$\dot{\Phi} = 2\Delta - m / 2 (A_2 / A_1 + A_1 / A_2) \sin \Phi,$$

где  $c_{1,2} = c - X_{1,2}^{(1)}$ ,  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Далее используем тот факт, что времена установления амплитуды (порядка  $1/e$ ) много меньше, чем время установления разности фаз (порядка  $1/\Delta$ ). Отсюда следует, что в нулевом приближении можно

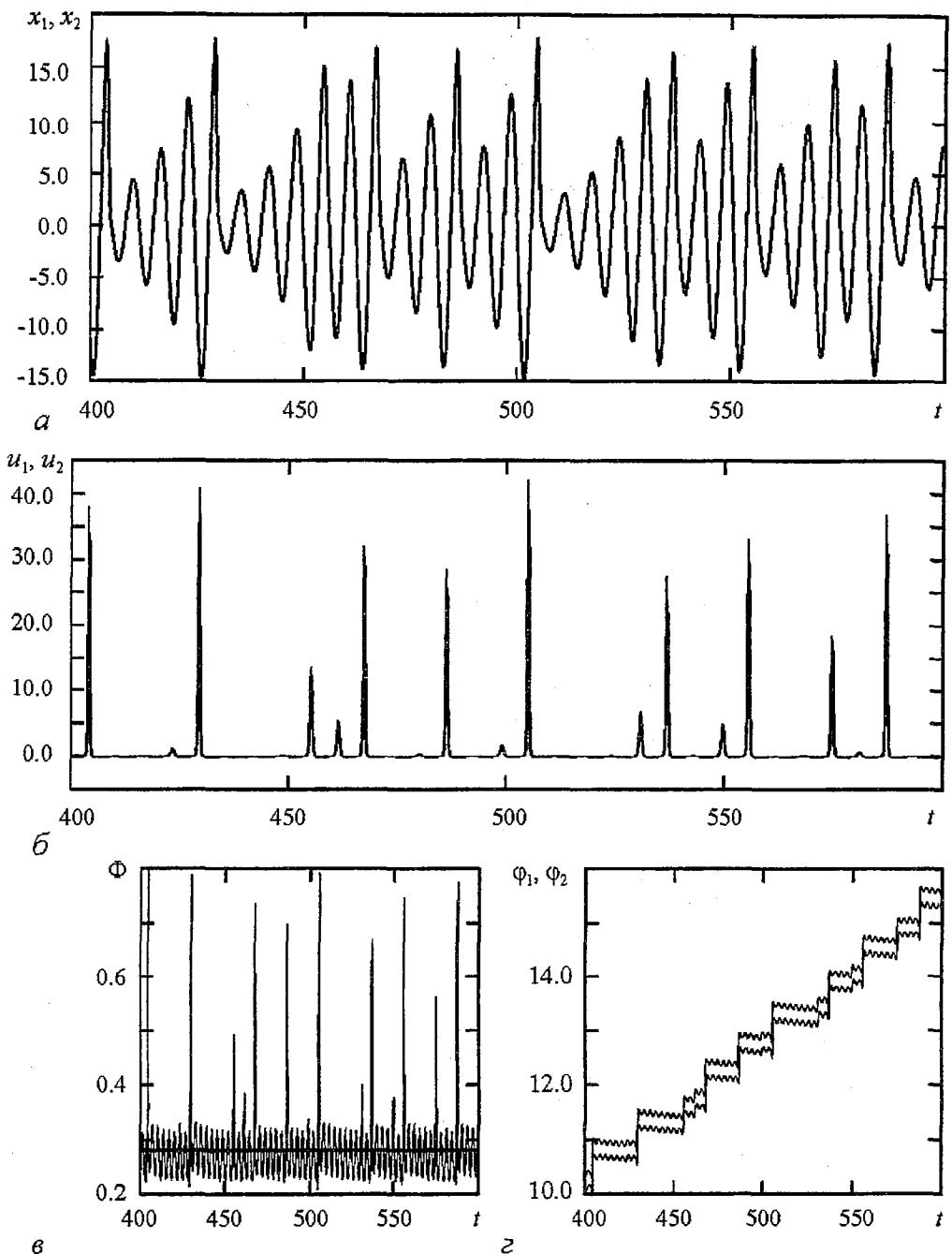


Рис. 1. Пример полной синхронизации в системе уравнений Ресслера, записанной в виде (8) при  $m=0.15$

найти стационарное решение уравнений (14) и подставить его в уравнение (16). В принципе, это решение зависит от  $\Phi$  и является функцией времени. Но, принимая во внимание малость коэффициента связи, в первом приближении по этому коэффициенту можем вычислить стационарное решение, пренебрегая членами, содержащими  $t$ ,

$$A_{1,2} = c_{1,2}/2^{1/2} \{1 - 4Z_{1,2}^{(1)}/(ec_{1,2}) + [1 + 8Z_{1,2}^{(1)}/(ec_{1,2})]^{1/2}\}^{1/2}. \quad (16)$$

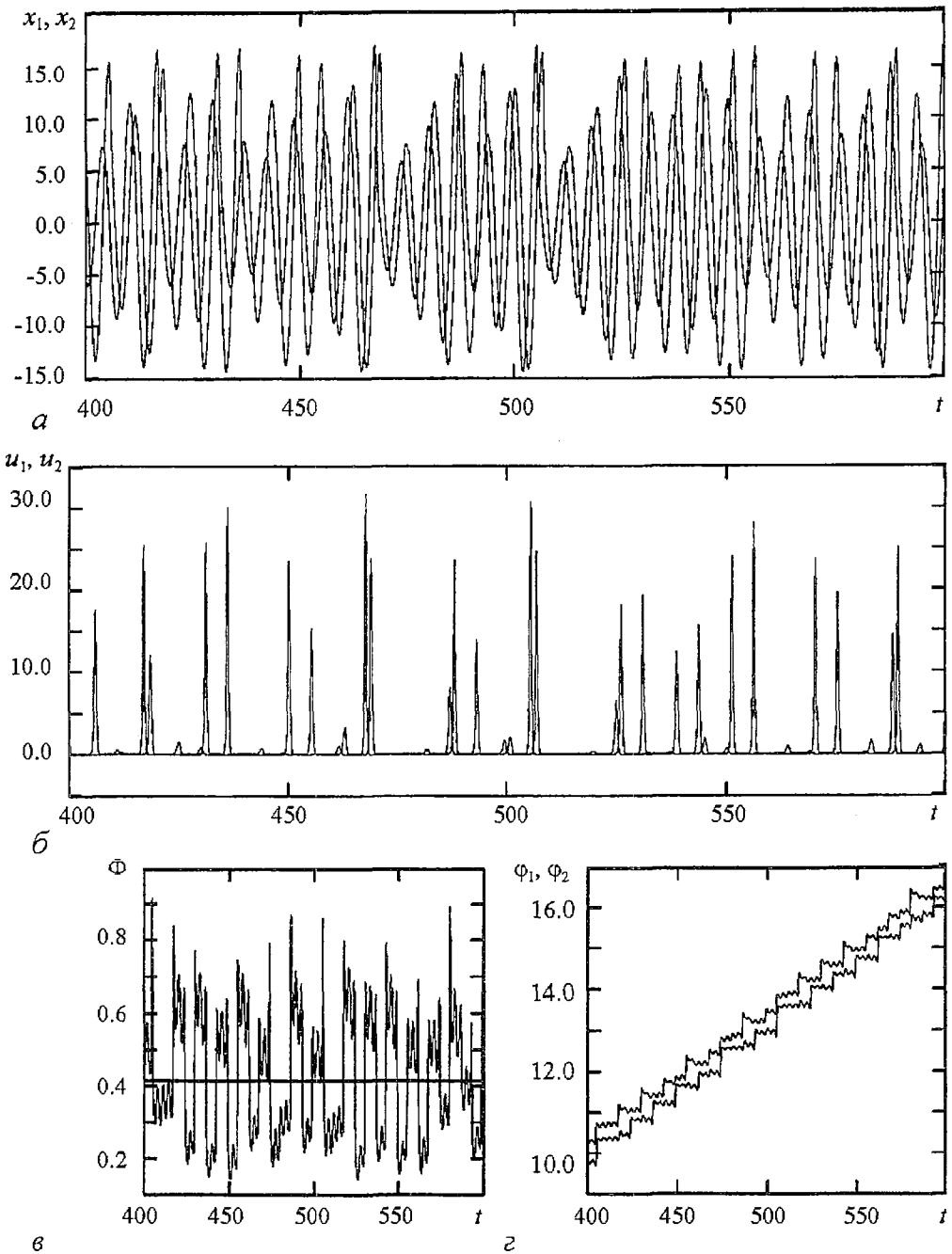


Рис. 2. Начало частичной синхронизации в системе Ресслера: моменты генерации импульсов переменных  $u_{1,2}$  практически совпадают ( $m=0.095$ ), тогда как амплитуды импульсов и переменные  $x_{1,2}$  существенно отличаются друг от друга

Так как  $X_{1,2}^{(1)} \ll c$  и  $Z_{1,2}^{(1)}/e \sim 1 \ll c$ , находим из (16)

$$A_{1,2}^{(0)} \approx c - X_{1,2}^{(1)} - 2(Z_{1,2}^{(1)})^2/(ce^2). \quad (17)$$

Подставляя это приближенное решение в уравнение (16), находим значение  $m$ , соответствующее границе фазовой синхронизации:  $m \approx 2\Delta$ .

Подчеркнем, что эти результаты получены только как нулевое приближение при очень малых расстройках. Если расстройка больше или порядка  $e$ , то

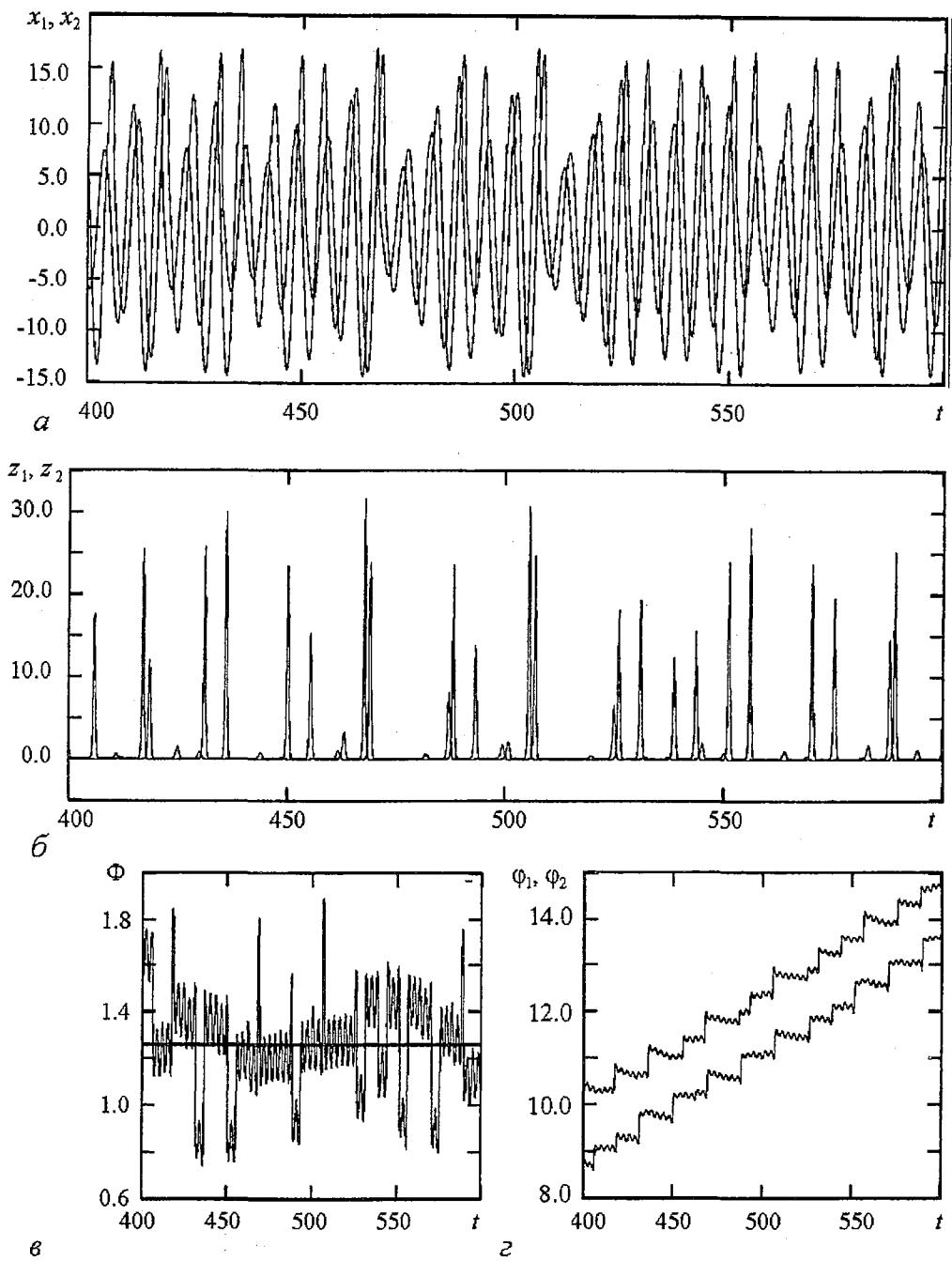


Рис. 3. Начало «фазовой синхронизации» в системе Ресслера ( $m=0.004$ ): средняя разность фаз является константой (жирная линия), но дисперсия довольно велика

изложенный подход неприменим. Кроме того, как уже указывалось, в первом и более высоких приближениях амплитуды  $A_{1,2}$ , найденные из уравнений (14), будут флюктуирующими. Тем не менее, при малых расстройках сдвиг фаз  $\Phi$ , усредненный по времени порядка  $1/e$ , будет постоянным. Следует, однако, заметить, что, как видно из рис. 1-3, разброс сдвига фаз довольно велик, даже в случае полной синхронизации (рис. 1, e). Поэтому вопрос о физическом значении использования понятия фазовой синхронизации остается открытым.

В качестве другого примера рассмотрим одну из систем с инерционным возбуждением, описанную в [12]. Уравнения рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x &= -ky - gx^3 + B \cos \omega t, \\ \dot{y} + \gamma y &= ax - lx^2 - hx^3,\end{aligned}\quad (18)$$

где  $\delta=0.375$ ,  $\omega_0=a=l=\gamma=h=1$ ,  $k=20$ ,  $g=17.5$ . Значения  $B$  и  $\omega$  варьировались.

В отсутствие внешней силы система (18) имеет одну колебательно неустойчивую особую точку в начале координат и две апериодически неустойчивых особых точки. Формы колебаний переменных системы и проекция аттрактора на плоскость  $\dot{x}$ ,  $x$  показаны на рис. 4.

При наличии внешней силы возможна как полная синхронизация колебаний, когда колебания в системе становятся строго периодическими с частотой внешней силы (этот случай впервые рассмотрен в [11]), так и частичная синхронизация (в данном случае - фазовая). Чтобы рассмотреть фазовую синхронизацию, удобно в системе (18) перейти к новым переменным  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ , определяемым соотношениями  $x(t)=x_0+A(t)\cos(\omega t+\varphi(t))$ ,  $\dot{x}(t)=-A(t)\omega\sin(\omega t+\varphi(t))$ , где  $x_0\approx 0.00135$  - среднее значение переменной  $x(t)$ . В этих переменных система уравнений (18) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{A} = (1/\omega)(\omega_0^2 x_0 + g x_0^3) \sin \psi - \{ (1/\omega)[\omega^2 - \omega_0^2 - g(3x_0(x_0 + A \cos \psi) + A^2 \cos^2 \psi)] A \cos \psi + \\ + 2\delta \sin \psi \} A \sin \psi + (1/\omega) k y \sin \psi - (1/\omega) B \sin \psi \cos \omega t,\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} = 1/(A\omega)(\omega_0^2 x_0 + g x_0^3) \cos \psi - \{ (1/\omega)[\omega^2 - \omega_0^2 - g(3x_0(x_0 + A \cos \psi) + A^2 \cos^2 \psi)] \cos \psi + \\ + 2\delta \sin \psi \} \cos \psi + 1/(A\omega) k y \cos \psi - 1/(A\omega) B \cos \psi \cos \omega t\end{aligned}$$

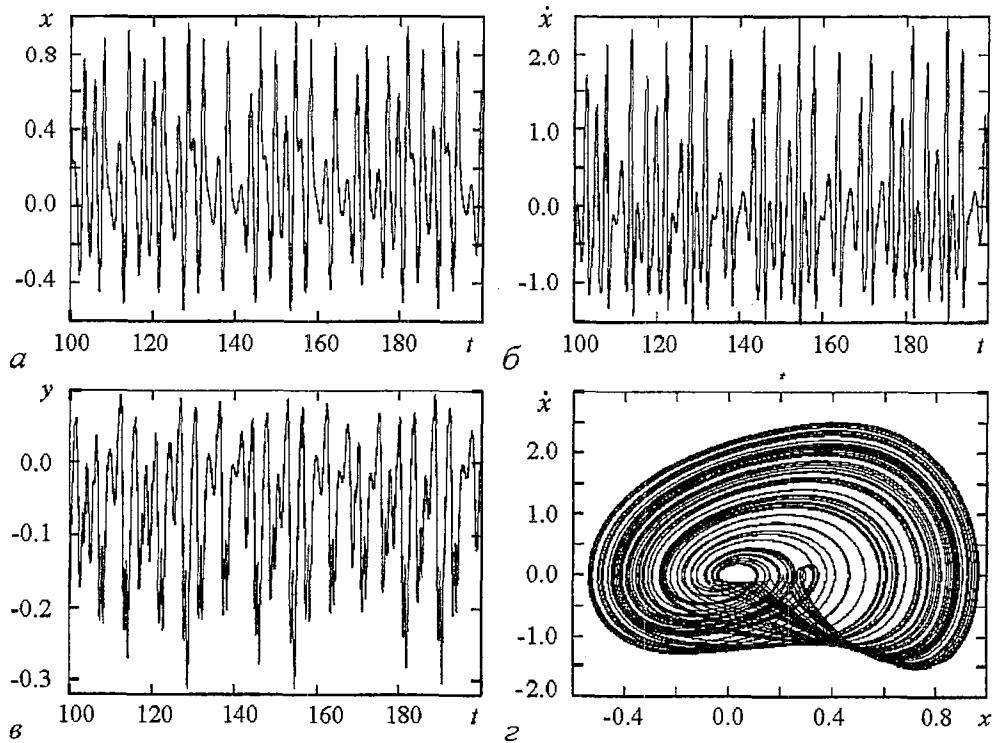


Рис. 4. Свободные автоколебания в системе с инерционным возбуждением (18) при  $\delta=0.375$ ,  $\omega_0=a=l=\gamma=h=1$ ,  $k=20$ ,  $g=17.5$ . Средняя частота автоколебаний  $\Omega_0\approx 2.255$

$$\dot{y} + \gamma y = [a - l(A\cos\psi + x_0) - h(A\cos\psi + x_0)^2](A\cos\psi + x_0), \quad (20)$$

где  $\psi = \omega t + \varphi(t)$ .

В случае  $\delta \ll \omega$  и  $B \ll A$  амплитуда  $A$  и фаза  $\varphi$  являются медленно меняющимися функциями времени. Поэтому можно решить уравнение (20), полагая  $A$  и  $\varphi$  постоянными. В результате находим

$$y = y_0 + (\omega \sin \psi + \gamma \cos \psi) y_1 A / (\omega^2 + \gamma^2) - (2\omega \sin 2\psi + \gamma \cos 2\psi) y_2 / (4\omega^2 + \gamma^2) - (3\omega \sin 3\psi + \gamma \cos 3\psi) y_3 / (9\omega^2 + \gamma^2), \quad (21)$$

где

$$y_0 = -[l(A^2 + 2x_0^2) + 3hx_0A^2 + 2hx_0^3 - 2ax_0]/(2\gamma), \quad y_1 = a - 2x_0l - 3x_0^2h - 3hA^2/4,$$

$$y_2 = (l + 3x_0h)A^2/2, \quad y_3 = hA^3/4.$$

Подставляя теперь (21) в уравнения (19) и усредняя по времени, находим

$$\dot{A} = -\delta A + kAy_1/[2(\omega^2 + \gamma^2)] - (B/2\omega)\sin \varphi, \quad (22)$$

$$\dot{\varphi} = 3gA^2/(8\omega) - (\omega^2 - \omega_0^2 - 3gx_0^2)/(2\omega) + ky_1\gamma/[2\omega(\omega^2 + \gamma^2)] + B\cos\varphi/(2\omega A). \quad (23)$$

Если

$$B/(2\omega A) \ll \delta, \quad (24)$$

то есть амплитуда устанавливается значительно быстрее фазы, то мы можем найти установившееся решение уравнения (22) и подставить его в уравнение (23). При условии (24) это установившееся решение может быть найдено приближенно

$$A \approx A_0 - 2(\omega^2 + \gamma^2)B\sin\varphi/(3\omega khA_0^2), \quad (25)$$

где

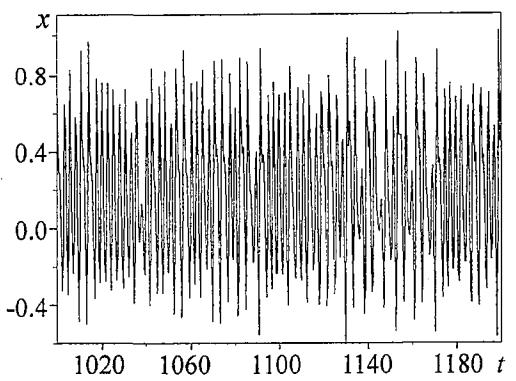
$$A_0 = [4/(3h)(a - 2x_0l - 3x_0^2h - 2\delta(\omega^2 + \gamma^2)/k)]^{1/2}. \quad (26)$$

Подставляя теперь (25) в (23), получаем следующее уравнение для фазы:

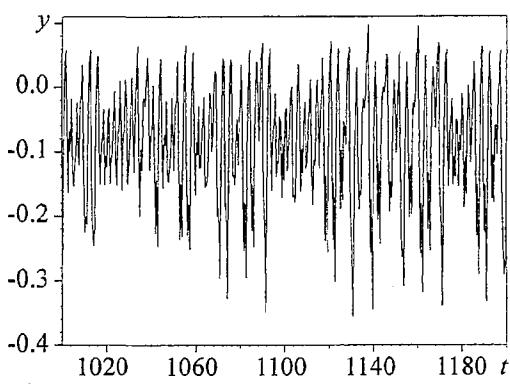
$$\dot{\varphi} = 1/(2\omega)[\omega_0^2 + 2\delta\gamma + (g/h)(a - 2x_0l - 2\delta\gamma^2/k) - \omega^2(1 + 2\delta g/(hk))] + B/(2\omega A_0)[\cos\varphi + (\gamma/\omega - g(\omega^2 + \gamma^2)/(hk\omega))\sin\varphi]. \quad (27)$$

Полагая в (27)  $B=0$ , можно найти среднюю частоту автономных автоколебаний  $\Omega_0$ . Из (27) следует, что  $\Omega_0 \approx 3.34$ . Численное моделирование дает меньшую величину:  $\Omega_0 \approx 2.255$ .

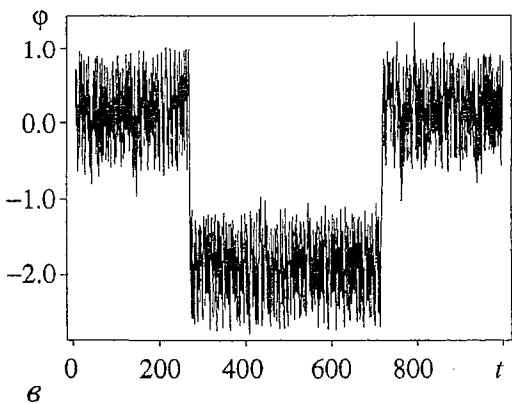
Из уравнения (27) следует, что, как и следовало ожидать, синхронизовать среднее значение частоты в некоторой небольшой области частот  $\omega$  можно при любом сколь угодно малом значении  $B$ . При этом значение фазы в среднем будет постоянным. Но, как видно из рис. 5, соответствующего  $B=0.5$ ,  $\omega=2.206$ , разброс фазы даже при этом, сравнительно большом значении  $B$  существенно превышает  $\pi$ , что приводит к значительной дисперсии частоты колебаний. При меньших значениях  $B$  разброс фазы еще больше. Кроме того, имеются нерегулярные скачки среднего значения фазы на  $2\pi$ . Очевидно, что такая «фазовая синхронизация» не имеет физического смысла. При увеличении  $B$  разброс фазы существенно уменьшается, но возникают ее периодические колебания с частотой внешней силы. Это продемонстрировано на рис. 6, соответствующем  $B=0.8$ ,  $\omega=2.206$ . Колебания переменных  $x(t)$  и  $y(t)$  близки к периодическим, но являются хаотическими, что видно из проекции аттрактора на плоскость  $x(t)$ ,  $y(t)$ . При этом



*a*



*б*



*в*

Рис. 5. «Фазовая синхронизация» в системе (18), записанной в виде (19), при  $\omega=2.206, B=0.5$

значении  $B$  понятие «фазовой синхронизации» оправдано. Однако сведение исходной системы уравнений к уравнению для фазы вида (27) несправедливо, потому что условие (24) не выполняется.

Из результатов этой работы можно сделать следующие выводы.

- Сведение исходной системы уравнений к единственному уравнению для фазы возможно только в тех системах и при тех параметрах, когда движения можно разбить на быстрые и медленные.

- Использование понятия частичной синхронизации и, в частности, фазовой имеет физический смысл, если дисперсия соответствующих переменных мала, что во многих системах не выполняется.

## Библиографический список

1. Климонтович Ю.Л // УФН. 1999. Т. 169. С. 39.
2. Фазовая синхронизация. М.: Связь, 1975.
3. Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 1804.
4. Osipov G. et al. // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 2353.
5. Pikovsky A.S. et al. // Physica D. 1997. Vol. 104. P. 219.
6. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961.
7. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Синхронизация автоколебаний и колебаний, индуцированных шумом // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. С. 133.
8. Хохлов Р.В. // ДАН СССР. 1954. Т. 97. С. 411.
9. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Москва: Изд-во МГУ, 1971.
10. Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. // Appl. Mech. Rev. 1995. Vol. 48. P. 733.
11. Кузнецов Ю.И. и др. // ДАН СССР. 1985. Т. 281. С. 291.
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. Москва: Наука, 1987.
13. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
14. Landa P.S. Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1996.
15. Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д. // ЖЭТФ. 1934. Т. 4. С. 117.
16. Ланда П.С., Перминов С.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. С.424.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию 2.04.2004

## ON THE PARTIAL SYNCHRONIZATION

P.S. Landa

It is shown that, in the case that the system's variables can be separated into fast and slow ones, synchronization of only slow variables is possible whereas fast variables remain nonsynchronized. In particular, the phase shift for oscillations of two coupled self-oscillatory systems may be such a slow variable. Only in this case the notion of phase synchronization is physically meaningful.



Ланда Полина Соломоновна - родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защищила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», вышедшей в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика».