

КВАНТОВАЯ ДИФФУЗИЯ АРНОЛЬДА В КАНАЛЕ С ГОФРИРОВАННОЙ ГРАНИЦЕЙ В ПРИСУТСТВИИ ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В.Я. Демиховский, А.И. Мальшиев

Изучается квантовая диффузия Арнольда в модели частицы, движущейся в двумерном канале с гофрированной границей и в переменном электрическом поле. Построен оператор эволюции системы за произвольное число периодов и рассчитана скорость квантовой диффузии вдоль одного из резонансов связи для различной амплитуды гофрировки и напряженности электрического поля. Обнаружены два квантовых эффекта: остановка диффузии на больших временах наблюдения вследствие динамической локализации и подавление диффузии в условиях, когда число квантовых состояний, попадающих в присепаратрисный стохастический слой, становится порядка единицы. При произвольных значениях параметров задачи скорость квантовой диффузии Арнольда оказывается меньше скорости классической диффузии.

Изучению классической и квантовой динамики частиц, движущихся в каналах с гофрированной границей (периодических бильярдах), посвящено большое число работ. Полученные в них результаты весьма полезны как для понимания природы квантового хаоса вообще, так и для интерпретации ряда экспериментов, проведенных в недавнее время с низкоразмерными мезоскопическими структурами. Классическая динамика и транспорт электронов в двумерном канале с синусоидально-модулированной границей изучались в работе [1], где для канала конечной длины был рассчитан коэффициент прозрачности, а также длина траектории при различных значениях глубины модуляции. Квантовые состояния в бесконечном двумерном канале переменной толщины были получены в работе [2], где соответствие между классическим и квантовым подходами устанавливалось путем построения функций Хушими. Кроме этого была исследована статистика межуровневых расстояний зонного спектра, как в регулярном, так и в хаотическом режимах. Следует отметить также работу [3], где, в частности, было установлено, что статистика собственных функций, а также локальная плотность состояний в периодических бильярдах не соответствует предсказаниям теории случайных матриц.

В настоящее время периодические бильярды, в которых движение электронов носит квазиклассический характер, могут быть реализованы экспериментально. Так, в работе [4] описана изготовленная методом электронной литографии последовательность пятнадцати квантовых точек, образующих

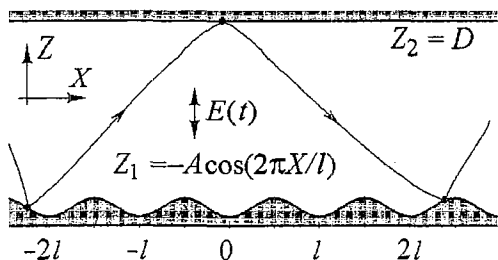


Рис. 1. Двумерный канал и траектория движения в нем материальной точки в присутствии электрического поля, направленного по осиз. В отсутствие поля движение происходит по прямым линиям

подобный бильярд. В такой системе исследовались также транспортные и магнитотранспортные процессы [5].

Настоящая работа посвящена изучению квантовой диффузии Арнольда для частицы, движущейся в двумерном канале, одна из стенок которого ровная, а другая имеет синусоидальную форму. На частицу действует также внешнее периодическое поле, ориентированное поперек канала (рис. 1). Учитывается взаимодействие трех резонансов: резонанса связи, который имеет место при

рациональном соотношении времени движения поперек канала и времени пролета одного периода гофрировки вдоль канала, а также двух резонансов системы с внешним полем. Подобная система может быть реализована экспериментально с использованием мезоскопической полупроводниковой структуры с модулированной поверхностью, помещенной в монохроматическое электромагнитное поле.

Классическая диффузия Арнольда была теоретически предсказана в 1964 году в работе [6]*. Суть этого универсального динамического явления, как известно, заключается в следующем. В $2N$ -мерном фазовом пространстве резонансы, определяемые соотношением $(\mathbf{m} \cdot \omega) = 0$, где ω - это набор частот, а вектор \mathbf{m} имеет целочисленные компоненты, образуют $(2N-1)$ -мерные поверхности. В то же время КАМ-поверхности являются N -мерными [7]. Условие, при котором возможно пересечение стохастических слоев, окружающих различные резонансы, можно получить из простых геометрических соображений. Для того чтобы резонансные поверхности не были изолированы друг от друга инвариантными поверхностями, необходимо, чтобы их размерности отличались более чем на единицу, то есть должно выполняться условие: $N < (2N - 1) - 1$.

Отсюда получаем $N > 2$. Таким образом, пересечение стохастических слоев различных резонансов является общим свойством систем с числом степеней свободы больше двух. Пересекаясь друг с другом, резонансы образуют в фазовом пространстве единую всюду плотную «паутину». Медленно диффундируя вдоль стохастических слоев этой сети, за достаточно долгое время система может уйти от своего начального состояния очень далеко.

Как было отмечено [6], такая нестабильность - диффузия Арнольда - является универсальной в том смысле, что не существует критической величины возмущения, необходимой для ее возникновения, хотя скорость диффузии стремится к нулю при уменьшении амплитуды возмущения.

Классическая диффузия Арнольда изучалась в связи с задачей динамики трех гравитационно взаимодействующих тел [8, 9], динамики галактик [10] и движения элементарных частиц в ускорителе [11], а также в связи с задачей о сильно возбужденном атоме водорода, находящемся в скрещенных электрическом и магнитном полях [12]. Диффузия Арнольда для классической частицы, движущейся в трехмерном канале, одна из границ которого промодулирована в двух взаимно перпендикулярных направлениях, рассматривалась в монографии Лихтенберга и Либермана [7].

* Термин «диффузия Арнольда» был позже введен Б.В. Чириковым.

В работе [13] диффузия Арнольда изучалась в квазиклассическом приближении в так называемой модели стохастической накачки.

В наших предыдущих работах [14], выполненных совместно с Ф.М. Израилевым, изучалась квантовая диффузия Арнольда в системе, состоящей из двух взаимодействующих нелинейных осцилляторов, на один из которых действует переменное электрическое поле (аналогичная классическая система была подробно рассмотрена Чириковым [15]). Было установлено, что диффузионная эволюция квантового состояния имеет место лишь для начальных условий, лежащих в области сепаратрисы. В соответствии с классической теорией обнаружена экспоненциальная зависимость скорости диффузии от параметра, определяющего интенсивность взаимодействия осцилляторов. При малой константе связи, когда число квантовых состояний, попадающих в область классического стохастического слоя, оказывается порядка единицы, диффузия Арнольда отсутствует. Нами обнаружен также эффект подавления квантовой диффузии на больших временах, что является проявлением динамической локализации, подобной андерсеновской локализации в случайных средах.

Настоящая работа построена следующим образом. Первый раздел посвящен классической диффузии Арнольда в двумерном канале с периодически модулированной границей в присутствии переменного электрического поля. Рассчитан классический коэффициент диффузии. Во втором разделе сформулирована квантовая модель и описана процедура расчета стационарных состояний, описывающих систему на резонансе связи. Третий раздел посвящен изучению аппарата, описывающего квантовую динамику в присутствии внешнего двухчастотного электрического поля. Здесь определен оператор эволюции за период поля, рассчитаны квазиэнергетические состояния. В четвертом разделе рассчитана скорость квантовой диффузии Арнольда по резонансу связи.

1. Классическая система

В отсутствие внешнего поля в периоды между соударениями частица движется по прямолинейным траекториям, и ее динамику удобно изучать с помощью отображений, связывающих между собой последовательные значения углов отражения α_n и координат точек отражения от нижней границы X_n (см. рис.1)

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2\arctg((A2\pi/l)\sin(2\pi X_n/l)), \\ X_{n+1} = X_n + 2D\operatorname{tg}\alpha_{n+1} + A\operatorname{tg}\alpha_{n+1}(\cos(2\pi X_n/l) + \cos(2\pi X_{n+1}/l)). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь D - средняя ширина канала, A - амплитуда гофрировки. Заметим, что это отображение является точным в отличие от аналогичного отображения, приведенного, например, в книге [7]. Процедура линеаризации (1) вблизи стационарных точек позволяет перейти к стандартному отображению и определить как частоты колебаний на резонансах, так и условия их перекрытия.

Для упрощения записи в дальнейшем будем использовать безразмерные переменные, измеряя все длины в единицах $l/2\pi$. Таким образом, далее $X=l/2\pi x$, где x - безразмерная продольная координата. Поступая аналогично со всеми величинами, имеющими размерность длины, введем d , a и z - безразмерные ширину канала, амплитуду гофрировки и поперечную координату, соответственно. Для того чтобы работать в дальнейшем с безразмерными единицами, необходимо определить также единицу времени t_0 и единицу массы m_0 .

Рис. 2 дает представление о структуре фазового пространства системы (1).

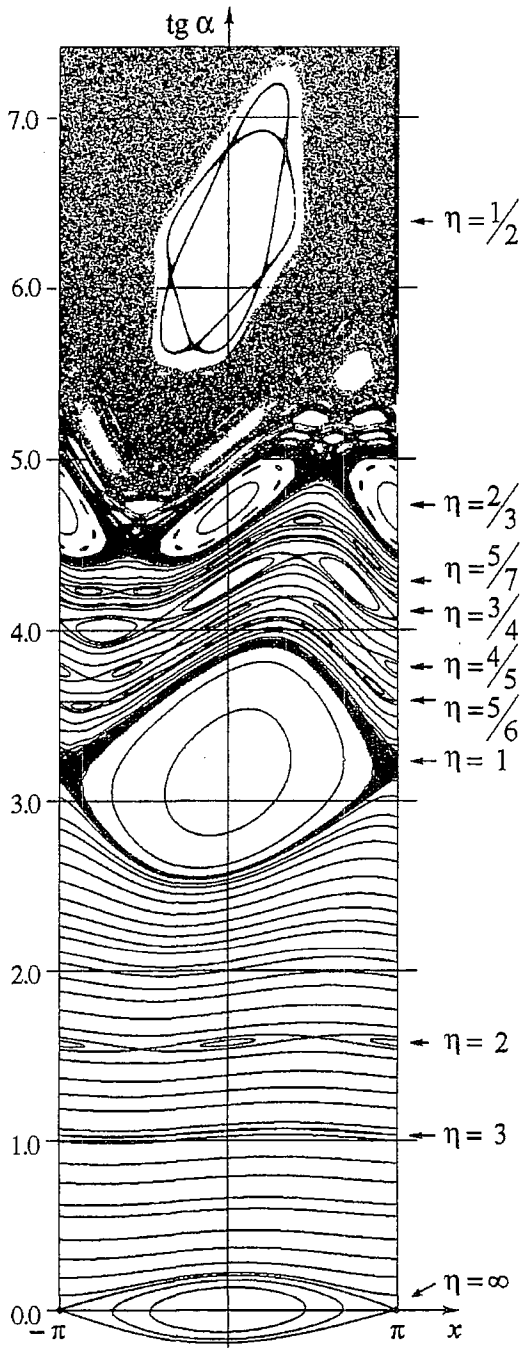


Рис. 2. Структура фазового пространства при $a=0.01$, $d=1$ (верхняя полуплоскость). По вертикальной оси отложен тангенс угла отражения

связи.

Следует отметить, что в отсутствие внешнего переменного поля движение материальной точки в канале может осуществляться по одной траектории с разными скоростями. В процессе диффузии Арнольда частица остается на резонансе связи, но при этом компоненты ее скорости v_x и v_z будут приблизительно пропорционально варьироваться.

Здесь хорошо заметно множество резонансов, возникающих при рациональном соотношении времени движения поперек канала (туда и обратно) T_z и времени пролета одного периода гофрировки вдоль канала T_x . Для их характеристики удобно использовать параметр $\eta=T_x/T_z$ (или $\eta=\omega_z/\omega_x$). Заметим, что на рис. 2 показана лишь та часть фазовой плоскости, которая соответствует частицам, движущимся в положительном направлении оси x .

Рис. 3 наглядно иллюстрирует механизм диффузии Арнольда в рассматриваемой системе. Здесь показано расположение некоторых из резонансных поверхностей (в данном случае - прямых линий) в пространстве частот ω_x , ω_z , которые связаны с безразмерной кинетической энергией E соотношением

$$\omega_x^2 + (\omega_z d/\pi)^2 = 2mE, \quad (2)$$

где m - масса материальной точки, принимаемая далее за единицу. Заметим, что энергия здесь измеряется в единицах $m_0 l^2 / (2\pi t_0)^2$. Каждый из приведенных резонансов имеет свою ширину, однако переход из стохастического слоя одного резонанса в стохастический слой другого (поперек слоя и вдоль изоэнергетической поверхности) невозможен, так как они изолированы друг от друга КАМ-поверхностями. Такой переход был бы возможен лишь при перекрытии двух резонансов в условиях сильного хаоса. Перемещение траектории вдоль стохастического слоя (на рис. 3 это направление показано двумя стрелками) невозможно в силу сохранения энергии. Однако при наличии внешнего, переменного во времени поля последнее ограничение снимается и становится возможной диффузия вдоль резонанса

Внешнее поле $U(z,t)=-f_0z(\cos\Omega_1t+\cos\Omega_2t)$ порождает свои резонансы в фазовом пространстве системы на частотах $\omega_z=\Omega_1$ и $\omega_z=\Omega_2$. Их положение также показано на рис. 3 штриховыми линиями. В простейшем случае можно учитывать взаимодействие лишь трех резонансов: резонанса связи и двух резонансов системы с внешним полем. Заметим, что это лишь часть паутины Арнольда, заполняющей все фазовое пространство. Выбирая начальные условия, например, в области стохастического слоя резонанса связи $\eta=1$, можно наблюдать за тем, как изображающая точка диффундирует под действием поля вдоль него. Для того чтобы обеспечить стохастичность на сепаратрисах отдельных резонансов и в то же время избежать их перекрытия, мы в дальнейшем будем полагать выполненным соотношение $f_0/a=1000$.

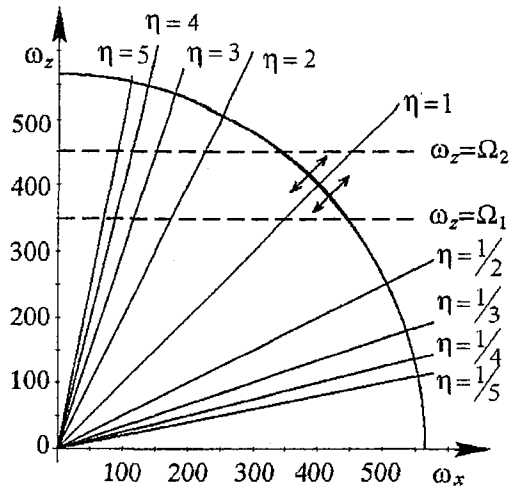


Рис. 3. Взаимное расположение резонансов связи и изоэнергетической поверхности. Здесь $d=\pi$, $m=1$, $E=160000$

Для получения количественной информации о динамике системы был численно рассчитан коэффициент диффузии Арнольда. Для этого использовались отображения, в которых было учтено внешнее переменное электрическое поле, действующее на частицу в канале. Ввиду громоздкости формул мы не приводим здесь явный вид этих отображений. Обратимся сразу к результатам. Поскольку мы владем информацией о системе лишь в те моменты времени, когда материальная точка ударяется о стенки канала, а они, вообще говоря, слабо коррелируют с периодом внешнего поля, для расчета коэффициента диффузии в безразмерных единицах имеет смысл использовать следующее соотношение:

$$D_{\lg N} = \left(\frac{\overline{(E_{i+1} - E_i)^2}}{(\Delta t_i + \Delta t_{i+1})/2} \right). \quad (4)$$

Поясним смысл входящих сюда величин. Усреднение здесь проводится в два этапа. Все время наблюдения за системой (например, 10^5 отображений) разбивается на N отрезков времени длительностью Δt_i , соответствующей, например, 10^3 отображений. Величина \bar{E}_i в (4) имеет смысл среднего значения энергии на одном таком интервале, а $(\Delta t_i + \Delta t_{i+1})/2$ - расстояния по времени между соседними интервалами. Верхняя черта в формуле (4) означает усреднение выражения, стоящего в круглых скобках, по интервалам. Нижний индекс, $\lg N$, при коэффициенте диффузии D указывает на число временных интервалов, на которые разбито все время наблюдения. Столь громоздкая процедура определения коэффициента диффузии Арнольда позволяет снизить эффект случайных колебаний величины энергии системы [15].

Результаты наших расчетов коэффициента классической диффузии приведены ниже на рис. 7 (см. раздел 4). Отчетливо видно, что в довольно широком интервале значений амплитуды гофрировки a ($30 < 1/a^{1/2} < 50$), где коэффициенты D_1 и D_2 практически равны друг другу, эволюция имеет диффузионный характер, причем скорость диффузии приблизительно линейно убывает с ростом величины $1/a^{1/2}$. Это согласуется с общей теорией, развитой в

[15]. Появление заметных различий между D_1 и D_2 указывает на изменение характера временной эволюции. Так, различия в области $1/a^{1/2} > 70$ вызваны тем, что здесь ширина стохастического слоя резонанса связи становится крайне малой, отчего эволюция системы становится квазипериодической. Расхождение между D_1 и D_2 и их резкий рост (на порядок) в области $1/a^{1/2} \approx 6$ связаны с перекрытием резонанса связи $\eta=1$ с резонансами на частотах Ω_1 и Ω_2 в условиях сильного хаоса. Здесь в игру вступает механизм перемещения траекторий *поперек* стохастических слоев этих резонансов, на фоне которого слабая диффузия Арнольда *вдоль* слоя перестает играть заметную роль.

2. Квантовые стационарные состояния. Резонанс связи

Для определения стационарных состояний частицы, движущейся в двумерном канале с гофрированной границей, удобно перейти к новым координатам, в которых границы являются плоскими, а граничные условия достаточно простыми. Однако при этом гамильтониан приобретает дополнительные слагаемые, зависящие от координат и содержащие операторы дифференцирования [16].

Пусть поверхность канала в безразмерных переменных задана уравнениями $z_1=0$ и $z_2=d+a\cos x$, причем потенциал внутри канала равен нулю, а на границе обращается в бесконечность. В этом случае преобразование координат, выпрямляющее границы, будет иметь вид

$$x' = x, \quad z' = z/(d + a\cos x). \quad (5)$$

Метрический тензор такого преобразования есть

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & ax' \sin x' / (d + a\cos x') \\ ax' \sin x' / (d + a\cos x') & (1 + a^2 x'^2 \sin^2 x') / (d + a\cos x')^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Преобразованное уравнение Шредингера будет иметь вид

$$-1/2 \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x'_i} g^{1/2} g_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x'_j} = E\psi, \quad (7)$$

а условие нормировки запишется как

$$\int \psi_i^* \psi_j g^{1/2} dS' = \delta_{ij}. \quad (8)$$

Здесь и всюду далее мы положили, что безразмерная постоянная Планка равна единице. На новой плоской границе потенциал бесконечен и выполняются нулевые граничные условия: $\psi_i(x', 0) = \psi_i(x', 1) = 0$.

Если ограничиться линейными по a/d членами, то при записи гамильтониана можно считать, что $x'=x$ и $z'=z/d$. Тогда он примет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0(x, z) + \hat{U}(x, z), \quad (9)$$

где

$$\hat{H}_0 = -1/2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad (10)$$

$$\hat{U} = \frac{a}{2d} \left(2\cos x \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\sin x \cdot z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \cos x \cdot z \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\cos x}{2} - \sin x \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Чтобы найти стационарные состояния гамильтониана \hat{H} , запишем уравнение Шредингера в представлении гамильтониана \hat{H}_0 . Спектр и волновые функции невозмущенной задачи имеют вид

$$E_m^0(\kappa) = 1/2 (\kappa^2 + m^2 \pi^2 / d^2), \quad \psi_{m\kappa}^0(x, z) = [2/(Ld)]^{1/2} e^{-i\kappa x} \sin(\pi m z), \quad (11)$$

где L - полная безразмерная длина канала, $L \gg 2\pi$.

Ввиду периодичности задачи по x , точная волновая функция должна иметь блоховский вид, где квазиволновой вектор изменяется в пределах первой зоны Бриллюэна, определяемой неравенствами $-1/2 \leq k \leq 1/2$. При этом будет удобно работать в схеме приведенных зон, полагая $\kappa = k + n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Представляя волновую функцию в виде двойного ряда

$$\psi^k(x, z) = \sum_{n, m} c_{nm}^k \psi_{nm}^0(k), \quad (12)$$

запишем стационарное уравнение Шредингера (7) с учетом (9) и (10) как

$$E(k) c_{nm}^k = 1/2 [(k+n)^2 + m^2 \pi^2 / d^2] c_{nm}^k + \sum_{n', m'} U_{(k+n)m, (k+n')m'} c_{n'm'}^k, \quad (13)$$

где

$$U_{(k+n)m, (k+n')m'} = \int (\psi_{(k+n')m'}^0)^* \hat{U}(x, z) \psi_{(k+n)m}^0 dx dz = \\ = -d(2d) \{ \pi^2 m^2 / d^2 (\delta_{n', n+1} + \delta_{n', n-1}) \delta_{m, m'} + m n' / (m^2 - m'^2) (-1)^{m+m'} [(1+2(k+n)) \delta_{n', n+1} + (1-2(k+n)) \delta_{n', n-1}] \}. \quad (14)$$

Изучаемый далее режим - режим резонанса связи $\eta=1$ - соответствует случаю, когда выполняется условие $\omega_{n_0} = \omega_{m_0}$, где $\omega_{n_0} = E_{n_0+1}(k) - E_{n_0}(k) = k + n_0 + 1/2$ и $\omega_{m_0} = E_{m_0+1} - E_{m_0} = \pi^2(2m_0+1)/(2d^2)$. Поскольку мы будем работать в квазиклассическом режиме, полагая $n_0 \gg 1$ и $m_0 \gg 1$, то можно считать, что $\omega_{n_0} \approx k + n_0$ и $\omega_{m_0} = \pi^2 m_0 / d^2$. Квантовые состояния на резонансе связи удобно характеризовать новыми индексами $r = n - n_0$ и $p = r + (m - m_0)$, а полную энергию отсчитывать от уровня $E_{n_0, m_0}^0(k)$. В этом случае уравнение Шредингера (13) примет вид

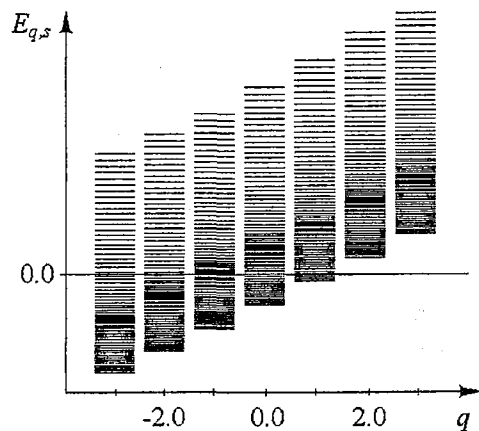
$$E(k) c_{rp}^k = p \omega_{m_0} c_{rp}^k + 1/2 (r^2 + (\pi^2 / d^2)(p-r)^2) c_{rp}^k + \sum_{r', p'} U_{k+n_0-r, p-r+m_0, k+n_0-r', p'-r'+m_0} c_{r'p'}^k.$$

Далее для простоты положим $d=\pi$ и будем рассматривать состояния в центре зоны Бриллюэна, считая $k=0$. При этом $\omega_{n_0} = n_0$, $\omega_{m_0} = m_0$, откуда следует $n_0 = m_0$. В этом случае уравнение Шредингера приобретает более компактный вид

$$E c_{rp} = (p m_0 + p^2 / 2 - p r + r^2) c_{rp} + \sum_{r', p'} U_{n_0-r, p-r+n_0, n_0-r', p'-r'+n_0} c_{r'p'}. \quad (15)$$

Рассчитанный с помощью (15) фрагмент энергетического спектра частицы, движущейся в канале с гофрированной границей, показан на рис. 4. Видно, что спектр состоит из отдельных групп уровней со схожей структурой. Расстояние между соседними группами составляет ω_{n_0} . Внутри каждой группы спектр напоминает спектр Матье, что довольно типично для квантового нелинейного резонанса. Нижние уровни расположены практически эквидистантно.

Рис. 4. Фрагмент энергетического спектра системы (9) вблизи резонанса связи. Здесь $\alpha=0.01$, $d=\pi$, $k=0$



тно. Точка сгущения уровней соответствует классической сепаратрисе нелинейного резонанса. Уровни, расположенные над сепаратрисной областью, крайне слабо расщеплены (с высокой степенью точности их можно считать двукратно вырожденными) и в классике соответствуют «вращениям» на резонансе в противоположных направлениях. В соответствии с такой структурой спектра стационарные состояния на резонансе связи удобно характеризовать с помощью двух индексов - номера группы q и номера уровня внутри каждой группы s . В этом случае энергетический спектр системы может быть записан в следующем виде:

$$E_{q,s} = \omega_{n_0} q + E_{q,s}^M, \quad (16)$$

где $E_{q,s}^M$ есть Матье-подобный спектр группы с номером q .

3. Эволюция квантовых состояний

3.1. Оператор эволюции. Далее обратимся к рассмотрению эволюции состояний на резонансе связи в присутствии внешнего переменного поля. Его частоты выберем так, чтобы выполнялось соотношение $\omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. В численных экспериментах полагалось: $\omega_{n_0} = 400$, $\Omega_1 = 350$ и $\Omega_2 = 450$. Таким образом, в силу кратности частот внешнее поле, а следовательно, и гамильтониан имели период $T = 7 \times 2\pi/\Omega_1 = 9 \times 2\pi/\Omega_2 \approx 0.125664$.

Известно, что в том случае, когда оператор Гамильтона периодически зависит от времени, то есть $\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$, решение нестационарного уравнения Шредингера, согласно теореме Флоке, можно представить в виде

$$\psi(x, z, t) = \exp(-i\varepsilon_Q t) u_Q(x, z, t),$$

где $u_Q(x, z, t) = u_Q(x, z, t+T)$ - так называемая квазиэнергетическая функция, ε_Q - квазиэнергия. Квазиэнергетические функции $u_Q(x, z, t)$ являются собственными функциями оператора эволюции $\hat{U}(T)$ за период поля T , причем каждой такой функции соответствует собственное значение $\exp(-i\varepsilon_Q T)$

$$\hat{U}(T) u_Q(x, z, t) = \exp(-i\varepsilon_Q T) u_Q(x, z, t). \quad (17)$$

Для исследования эволюции нашей системы необходимо найти явный вид оператора $\hat{U}(T)$. Для этого представим квазиэнергетическую функцию в виде двойного ряда

$$u_Q(x, z) = \sum_{q,s} A_{q,s}^Q \psi_{q,s}^k(x, z),$$

где $\psi_{q,s}^k(x, z)$ - найденные в предыдущем разделе стационарные функции частицы в канале с гофрированной границей (12). В последней формуле у квазиэнергетической функции опущен аргумент t , поскольку она определена лишь в моменты времени, кратные периоду поля T . Последнее соотношение позволяет перейти в уравнении (17) к матричному представлению. В результате такого перехода получим, что коэффициенты $A_{q,s}^Q$ являются собственными векторами матрицы $U_{q,s;q',s'}(T)$, и могут быть найдены вместе с собственными значениями путем ее диагонализации. Для построения матрицы оператора эволюции можно воспользоваться процедурой, описанной в наших предыдущих работах [14]. Ее смысл состоит в следующем. Подействуем оператором (матрицей) $U_{q,s;q',s'}(T)$ на некоторое начальное состояние $C_{q,s}^{s_0 q_0} = \delta_{qq'} \delta_{ss_0}$

$$U_{q,s;q',s'}(T) C_{s'q'}^{(s_0 q_0)} = U_{q,s;q_0 s_0}(T) = C_{q,s}^{q_0 s_0}. \quad (18)$$

Коэффициенты $C_{q,s}^{q_0,s_0}$ могут быть найдены путем численного интегрирования нестационарного уравнения Шредингера на промежутке времени от 0 до T , при этом они образуют столбец матрицы $U_{q,s;q',s'}(T)$. Повторяя эту процедуру для различных начальных условий $C_{q,s}^{q',s'} = \delta_{q,q'} \delta_{s,s'}$, где $q \neq q_0$, $s \neq s_0$, мы заполним, таким образом, всю матрицу $U_{q,s;q',s'}(T)$.

Приводя полученную матрицу оператора эволюции к диагональному виду, находим спектр квазиэнергий ϵ_Q и квазиэнергетические функции $A_{q,s}^Q$, после чего сам оператор эволюции можно представить в виде

$$U_{q,s;q',s'}(T) = \sum_Q A_{q,s}^Q A_{q',s'}^{Q*} \exp(-i\epsilon_Q T). \quad (19)$$

Для того, чтобы вычислить оператор эволюции за N периодов внешнего поля, нужно возвести (19) в степень N и воспользоваться соотношением ортогональности квазиэнергетических функций. В результате будем иметь

$$U_{q,s;q',s'}(NT) = \sum_Q A_{q,s}^Q A_{q',s'}^{Q*} \exp(-i\epsilon_Q NT).$$

Теперь для того, чтобы проследить за эволюцией начального состояния вида $C_{q,s}^{q_0,s_0}(0) = \delta_{q,q_0} \delta_{s,s_0}$ на сколь угодно больших временах, достаточно подействовать матрицей $U_{q,s;q',s'}(NT)$ на функцию (столбец) начального состояния.

3.2. Резонансное приближение. Чтобы выполнить намеченную программу, необходимо, прежде всего, решить нестационарное уравнение Шредингера в представлении функций $\psi_{q,s}^k(x,z)$

$$i\partial C_{q,s} / \partial t = (\omega_{n_0} q + E_{q,s}^M) C_{q,s} - f_0 \sum_{q',s'} z_{q,s;q',s'} (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) C_{q',s'}. \quad (20)$$

Для этого, совершая преобразование вида

$$C_{q,s}(t) = b_{q,s}(t) \exp[-i(\omega_{n_0} q + E_{q,s}^M)t], \quad (21)$$

перейдем от функций $C_{q,s}(t)$ к функциям $b_{q,s}(t)$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$i db_{q,s} / dt = -f_0 \sum_{q',s'} z_{q,s;q',s'} (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) b_{q',s'} \exp[-i(\omega_{n_0} (q-q') + (E_{q',s'}^M - E_{q,s}^M))t]. \quad (22)$$

Теперь в так называемом резонансном приближении в сумме по q' в правой части (22), учитывая, что $\omega_{n_0} = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$, сохраним лишь медленно осциллирующие слагаемые с $q' = q \pm 1$ и в результате придем к следующему уравнению:

$$i db_{q,s} / dt = -f_0 \cos(\delta\Omega t/2) \sum_{s'} \{ z_{q,s;q+1,s'} b_{q+1,s'} \exp[-i(E_{q+1,s'}^M - E_{q,s}^M)t] + z_{q,s;q-1,s'} b_{q-1,s'} \exp[-i(E_{q-1,s'}^M - E_{q,s}^M)t] \}, \quad (23)$$

где $\delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_2|$.

Очевидный интерес представляет строение матриц $z_{q,s;q \pm 1,s'}$, определяющих переходы между состояниями s и s' соседних групп уровней. На рис. 5 схематично показана внутренняя структура матрицы $z_{0,s;1,s'}$: шкалой интенсивности серого цвета указан порядок величин $|z_{0,s;1,s'}|$. В данном случае состояния внутри групп упорядочены так, что низший уровень имеет индекс $s=0$, а остальные уровни в порядке возрастания энергии имеют индексы $s=1, -1, 2, -2, \dots$ и т.д.

Исходя из произведенного упорядочивания состояний внутри групп, можно сделать ряд важных замечаний. Довольно очевидно, что центр «креста» на рис. 5 соответствует переходам между самыми низкими состояниями в группах

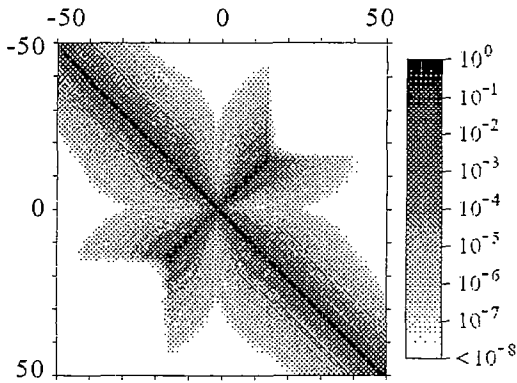


Рис. 5. Матричные элементы $z_{q,s;q+1,s'}$, определяющие переходы между группами $q=0$ и $q=1$, то есть вдоль резонанса связи. Параметры те же, что и на рис. 4

На концах «креста» видны заметные уширения - эти области соответствуют сепаратрисной области резонанса. Величины матричных элементов здесь достаточно велики, поэтому для δ -образного начального условия на сепаратрисе возможны практически равновероятные переходы в широкую по числу уровней область спектра соседних групп. Таким образом, легко понять, что во внешнем переменном поле переходы между присепаратрисными состояниями разных групп будут происходить с большей интенсивностью, нежели между другими состояниями. Именно данный факт и определяет скорость диффузии Арнольда в стохастическом сепаратрисном слое вдоль резонанса связи.

4. Квантовая диффузия вдоль резонанса связи

В нашей модели квантовая диффузия Арнольда вдоль резонанса связи проявляется как перераспределение начального состояния по группам уровней с разными q . В этом случае количественной характеристикой скорости диффузии может служить дисперсия распределения состояний по группам. Для различных начальных состояний нами вычислялась зависимость дисперсии энергии $(\overline{H})^2 = \omega_{n_0}^2 \Delta_q$ от времени t , или числа периодов N . Здесь $\Delta_q = \sum_q (q - \bar{q})^2 \sum_s |C_{q,s}|^2$ и $\bar{q} = \sum_q q \sum_s |C_{q,s}|^2$. На рис. 6 изображена зависимость $\Delta_q(N)$ для трех различных начальных условий: нижняя кривая соответствует начальному состоянию, выбранному вблизи центра резонанса связи, средняя кривая - начальному условию на одном из надсепаратрисных состояний, а верхняя кривая - начальному условию, соответствующему одному из сепаратрисных уровней. График демонстрирует явное различие между эволюциями во времени данных начальных состояний. Так, если для под- и надсепаратрисных состояний величина Δ_q квазипериодически осциллирует около некоторого значения, то для состояний, отвечающих сепаратрисе резонанса связи величина Δ_q после некоторого времени, соответствующего классическому времени стохастизации, испытывая небольшие осцилляции, в среднем возрастает. Определение среднего наклона графика позволяет найти коэффициент квантовой диффузии Арнольда. Результаты представлены на рис. 7. Подобно тому, что было отмечено в наших предыдущих работах [14], здесь величина коэффициента квантовой диффузии D_q также оказывается на 1.5-2.0 порядка ниже классических результатов. При этом сравнении, правда, нужно иметь в виду и то, что флуктуации классического коэффициента диффузии составляют, как минимум, плюс-минус полпорядка.

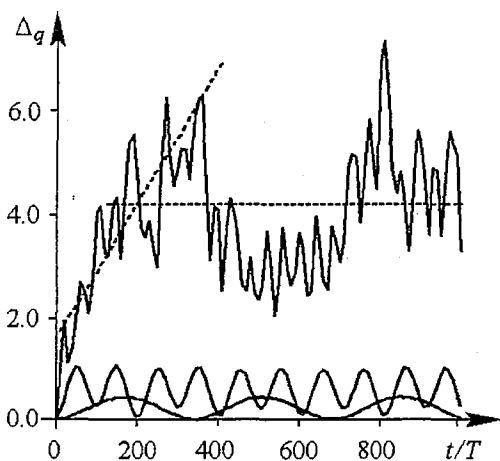


Рис. 6. Временная эволюция Δ_q для начального условия вблизи центра резонанса $\eta=1$ (нижняя кривая), для надсепаратрисного начального условия (средняя кривая) и для начального условия в области классической сепаратрисы (верхняя кривая). Здесь $a=0.01$, $f_0=10$

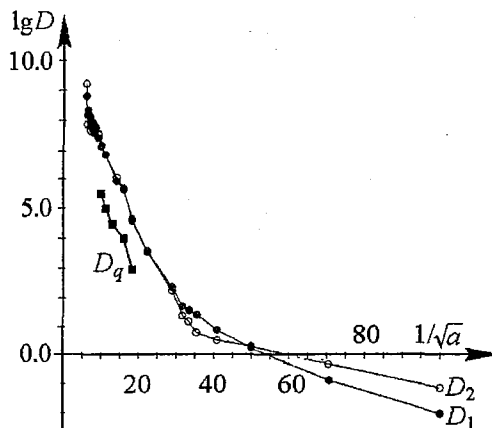


Рис. 7. Зависимость коэффициента диффузии Арнольда в классической (D_1 и D_2) и квантовой (D_q) системах от амплитуды гофрировки одной из стенок канала a . Здесь $E(t=0)=160000$, $\Omega_1=350$, $\Omega_2=450$, $f_0/a=1000$, ширина канала $d=\pi$

Необходимо отметить также, что зависимости D_1 , D_2 и D_q от величины гофрировки в области $10 < 1/a^{1/2} < 20$ практически линейны и имеют одинаковый наклон. При $1/a^{1/2} < 10$ расчет коэффициента квантовой диффузии, к сожалению, был крайне затруднен необходимостью учета громадного числа состояний (ввиду большой ширины всех рассматриваемых резонансов и близости границы их перекрытия). При $1/a^{1/2} > 20$ участок линейного роста дисперсии $\Delta_q(N)$ отсутствовал. Последнее обстоятельство, очевидно, связано с тем, что при слабой гофрировке в область классического стохастического слоя резонанса связи попадает всего 1-2 квантовых состояния. Понятно, что в этом случае говорить о какой-то «квантовой стохастизации» не имеет смысла, отчего и квантовая диффузия Арнольда отсутствует.

Из данных, приведенных на рис. 6, также следует, что через 200-300 периодов поля после своего начала квантовая диффузия останавливается и величина Δ_q начинает осциллировать около некоторого среднего значения (на рисунке оно показано горизонтальной штриховой линией).

Такое поведение, очевидно, можно рассматривать как одно из проявлений динамической локализации, которая впервые была описана в модели одномерного ротатора с δ -образными толчками [17, 18]. Позднее была установлена связь этого явления с локализацией Андерсона [19]. В нашем случае можно сказать, что динамическая локализация связана с локализацией квазиэнергетических сепаратрисных функций в q -пространстве. В силу этого в разложении любого начального состояния по квазиэнергетическим функциям эффективно содержится ограниченное число членов, что в конечном итоге приводит к насыщению диффузии и квазипериодическим осцилляциям. Следует подчеркнуть, что в данном случае динамическая локализация имеет место в системе с числом степеней свободы $N=2.5$, в то время как в случае ротатора с периодическими толчками $N=1.5$. Необходимо подчеркнуть также, что в нашем случае динамическая локализация наблюдается в условиях слабого хаоса на сепаратрисах, а не глобального хаоса, как в случае ротатора с δ -толчками.

Настоящая работа поддержана грантом РФФИ (проект № 03-02-17054), программой «Университеты России» (№ ур.01.01.022), а также ФНП «Династия».

Библиографический список

1. Luna-Acosta G.A., Krokhin A.A., Rodriguez M.A., Hernandez-Tejeda P.H. Classical chaos and ballistic transport in a mesoscopic channel // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 54. P. 11410.
2. Luna-Acosta G.A., Na K., Reichl L.E., Krokhin A.A. Band structure and quantum Poincare sections of a classically chaotic quantum rippled channel // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 3271; Luna-Acosta G.A., Rodriguez M.A., Krokhin A.A., Na K., and Mendez R.A. Quantum and classical ballistic transport in a chaotic 2D electron channel // Rev. Mex. Fis. 1998. Vol. 44. P. 7.
3. Luna-Acosta G.A., Mendez-Bermudez J.A., Izrailev F.M. Periodic chaotic billiards: Quantum-classical correspondence in energy space // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 036206.
4. Kouwenhoven L.P. et al. Transport through a finite one-dimensional crystal // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. P. 361.
5. Lent C.S., Leng M. Magnetic edge states in a corrugated quantum channel // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 70. P. 3157.
6. Арнольд В.И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156. С. 9.
7. Лухтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
8. Ferraz-Mello S., Sessin W. Resonances in the motion of planets, satellites and asteroids. Sao Paulo: Brazil, 1985.
9. Reichl L.E. The Transition to Chaos. New-York: Springer-Verlag, 1992.
10. Binney J., Tremaine S. Galactic Dynamics. Princeton: Princeton University Press, 1987.
11. Nonlinear dynamics aspects of particle accelerators // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1986. Vol. 247.
12. Milczewski J. von, Diercksen G.H.F., Uzer T. Computation of the Arnold web for the hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. P. 2890.
13. Leitner D.M., Wolynes P.G. Quantization of the stochastic pump model of Arnold diffusion // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 55.
14. Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M., and Malyshev A.I. Manifestation of Arnold diffusion in quantum systems // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88. P. 154101; Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M., and Malyshev A.I. Quantum Arnold diffusion in a simple nonlinear system // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 66. P. 036211.
15. Chirikov B.V. A universal instability of many dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. Vol. 52. P. 263.
16. Демиховский В.Я., Потапенко С.Ю., Сатанин А.М. Электронный спектр в системах с периодически модулированной поверхностью // Физика и техника полупроводников. 1983. Т. 17. С. 213.
17. Casati G., Chirikov B.V., Izrailev F.M., and Ford J. Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation // Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin. 1979. Vol. 93. P. 334.
18. Chirikov B.V., Izrailev F.M., and Shepelyansky D.L. Dynamical stochasticity in classical and quantum mechanics // Sov. Sci. Rev. 1981. Vol. 2. P. 209.
19. Fishman S. et al. Chaos, quantum recurrence and Anderson localization // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 49. P. 509.

Нижегородский государственный
университет

Поступила в редакцию 01.11.2004

QUANTUM ARNOLD DIFFUSION IN RIPPLED CHANNEL AT THE PRESENCE OF ALTERNATING ELECTRIC FIELD

V.Ya. Demikhovskii, A.I. Malyshev

We study quantum Arnold diffusion for the particle moving in the rippled channel at the presence of periodic external electric field. The evolution operator for arbitrary number of field periods and diffusion rate was calculated for different ripple amplitude and electric field intensity. Two new effects which limit quantum Arnold diffusion have been observed - the diffusion suppression due to dynamical localization and diffusion stop in the case when the number of quantum states corresponding to the classical near separatrix chaotic region has the order of unity. For any model parameters the quantum diffusion coefficient prove to be smaller then classical one.



Демиховский Валерий Яковлевич - родился в Харькове (1938), окончил Горьковский государственный университет (1961). После окончания ГГУ работает на кафедре теоретической физики физического факультета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (1979). Основная область интересов - теория конденсированного состояния, физика низкоразмерных квантовых структур, квантовый хаос. Опубликовал более 150 научных работ, в том числе монографию «Физика квантовых низкоразмерных структур» (М.: Логос, 2000, в соавторстве с Г.А. Вугальтером). Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Соросовский профессор.



Мальшиев Александр Игоревич - родился в г. Бор Нижегородской области (1978), окончил Нижегородский государственный университет (2001). Работает на кафедре теоретической физики физического факультета ННГУ в должности ассистента и учится на заочном отделении аспирантуры. Основная область научных интересов - квантовый хаос и квантовая диффузия Арнольда. Стипендиат ФНП «Династия».