



## СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ - ДУФФИНГА КОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ

*А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина*

Дан краткий обзор работ, посвященных особенностям динамики неавтономных систем с предельным циклом в виде окружности и системы Ван дер Поля под действием периодической последовательности дельта-импульсов. Рассматривается динамика системы Ван дер Поля - Дуффинга под действием такой последовательности импульсов. С помощью метода медленно меняющихся амплитуд построены модели в виде двумерных и одномерных отображений. Изучено устройство плоскостей параметров период - амплитуда воздействия таких отображений и исходной дифференциальной системы. Обсуждается роль кубической нелинейности, характерной для системы Ван дер Поля - Дуффинга.

### Введение

Ситуации, когда система с предельным циклом подвержена внешнему периодическому воздействию, широко распространены в радиофизике, электронике, биологии, химии и других областях естествознания [1-7]. С точки зрения теории колебаний и теории динамических систем это задачи о возникновении квазипериодических движений и явлений синхронизации [1-9]. Среди них выделяется класс задач, в которых внешнее воздействие носит характер коротких, но значительных по амплитуде импульсов. В таких случаях внешнее воздействие можно рассматривать как периодическую последовательность  $\delta$ -функций. Ясно, что подобные задачи привлекательны не только с точки зрения приложений в радиофизических, биологических и других системах, но и существенны для теории колебаний и нелинейной динамики с позиций возможной специфики картины синхронизации. В работах [10-18] аналогичная задача была рассмотрена в рамках простейшей модели, представляющей собой укороченное уравнение с предельным циклом под воздействием периодической последовательности  $\delta$ -импульсов. Так, в работах [11-14] авторы рассматривали абстрактную модель (иногда называемую «prototypical kicked oscillator»), в рамках которой система с предельным циклом в виде окружности

$$\begin{aligned} \dot{r} &= sr(1 - r^2), \\ \dot{\phi} &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $r=x + iy$ , подвергалась импульсному воздействию вдоль оси  $x$ , так что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= sx(1 - x^2 - y^2) + C \sum \delta(t - nT), \\ \dot{y} &= x + sy(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) является дифференциальной, но она допускает *точное* построение двумерного аналитического отображения, поскольку в промежутках между импульсами решается аналитически. Действие же  $\delta$ -импульса увеличивает переменную  $x$  на величину  $C$ , не меняя координату  $y$ . С другой стороны, для этой системы в случае, когда изображающая точка в фазовом пространстве в промежутке между импульсами успевает вернуться на предельный цикл, можно *приближенно* получить одномерное отображение окружности для фазы следующего вида:

$$\operatorname{tg} \theta_{n+1} = \sin(\theta_n + T) / (C + \cos(\theta_n T)). \quad (3)$$

Даже на первый взгляд полученное отображение существенно отличается от стандартного синус-отображения окружности [1-4, 20], что в высокой степени подтверждается и его детальным исследованием. Заметим, что приоритет в получении одномерного отображения (3) принадлежит известному канадскому ученому Леону Гласу [16, 21]. Дальнейший вклад в его изучение внесли как сам Глас [17], так и Динг с соавторами и ряд других исследователей.

В работе [11] Динг показал, что картина синхронизации в системах (2, 3) обладает рядом особенностей и отличается от той, которая характерна для синус-отображения окружности. Плоскость параметров период - амплитуда воздействия такой системы делится на две области с существенно разным поведением. Причина такого разделения объясняется тем, что возможны две качественно разные ситуации - амплитуда толчка очень велика и смещает предельный цикл так, что он перестает охватывать начало координат. Или, наоборот, амплитуда мала и предельный цикл по-прежнему охватывает начало координат. Из этого рассуждения легко находим пороговое значение амплитуды  $C=1$ , поскольку в модели (2) радиус предельного цикла равен точно единице. Весьма существенный вывод состоит в том, что при  $C < 1$  одномерное отображение для фазы монотонно, при  $C=1$  имеет кусочно-линейный характер, а при  $C > 1$  становится бимодальным. (Для наглядности ниже, на рис. 2, б мы приводим плоскость параметров период - амплитуда воздействия для системы типа (3). Хорошо видна пороговая линия  $C=1$ . Выше этой линии каскад удвоений развивается при уменьшении амплитуды воздействия, в отличие от стандартного синус-отображения окружности. При этом окна периодичности, характерные для фейгенбаумовского сценария, оказываются продолжением соответствующих языков синхронизации в области  $C < 1$ .)

В последующей работе [12] Динг детально рассмотрел динамику одномерного отображения (3) в обеих областях. Было установлено много интересных закономерностей, для их изучения мы рекомендуем обратиться к оригинальной работе. Отметим лишь, что считающаяся классической для квазипериодики универсальность [2, 20] для системы с импульсным возбуждением типа (3) оказывается несправедливой. Действуют иные закономерности, связанные с кусочно-линейным характером отображения для фазы, в отличие от кубической точки перегиба в традиционном случае [22]. В более поздних работах Дингом с соавторами высказывалась гипотеза, что картина синхронизации, характерная для модели (3) и обладающая рядом особенностей, присуща всем системам, характеризующимся в автономном режиме предельным циклом (например, для броселлятора, системы Ван дер Поля и др.) [13, 14].

Отметим еще работу [15], в которой авторы также рассматривали систему уравнений (2). Однако они не только указали на наличие областей с различным поведением, но и детально рассмотрели переходы между областями с периодическими, квазипериодическими и хаотическими режимами.

К описанным исследованиям примыкает наша работа [19], в которой рассматривалась задача о динамике осциллятора Ван дер Поля с  $\delta$ -образным периодическим воздействием:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT), \quad (5)$$

где  $x$  - динамическая переменная,  $\lambda$  - управляющий параметр,  $T$  - период следования внешних импульсов,  $B$  - их амплитуда.

Для данной системы было получено двумерное отображение

$$z_{n+1} = z_n e^{\lambda T/2 - iT} / [1 + |z_n|^2 (e^{\lambda T} - 1) / 4\lambda]^{1/2} + iB, \quad (6)$$

где  $z = x + iy$ , и одномерное

$$\theta_{n+1} = \arctg((\sin \theta_n + C) / \cos \theta_n) - T. \quad (7)$$

Здесь

$$C = B / (2\lambda^{1/2}) \quad (8)$$

имеет смысл нормированной амплитуды внешнего воздействия. Хотя отображения (6) и (7) были получены ранее для модели «prototypical kicked oscillator» [11, 12, 15], но в этих работах не рассматривалась проблема соотношения дифференциальных уравнений и модельных отображений. Напомним, что для системы (2) отображение (6) является точным, а в рамках задачи (5) - это приближенное отображение, полученное методом медленно меняющихся амплитуд. Эффективность этих отображений в таком контексте и их взаимная связь тщательно изучены в работе [19]. С другой стороны, двумерное (6) и одномерное (7) отображения, если посмотреть на них формально, представляют самостоятельный интерес и приводят к новой, по сравнению со стандартным синус-отображением окружности, картине явления синхронизации. При этом метаморфозы языков синхронизации как в исходной дифференциальной системе (5), так и в двумерном отображении (6) с ростом управляющего параметра оказались нетривиальными и интересными.

### Синхронизация короткими импульсами в системе Ван дер Поля - Дуффинга

В данной работе мы рассматриваем систему Ван дер Поля - Дуффинга под импульсным воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2) \dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT), \quad (9)$$

где  $x$  - динамическая переменная,  $\lambda$  - управляющий параметр,  $T$  - период следования внешних импульсов,  $B$  - их амплитуда. Заметим, что система (9) представляет собой модификацию осциллятора Ван дер Поля, в который добавлено кубическое слагаемое  $\beta x^3$ ; таким образом,  $\beta$  - это параметр нелинейности осциллятора.

Получим сначала по аналогии с [19] для рассматриваемой системы аппроксимирующее двумерное отображение. Для этого применим метод медленно меняющихся амплитуд, так как в промежутке между импульсами правая часть уравнения (9) обращается в ноль, и оно принимает вид:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = 0. \quad (10)$$

Для решения последнего уравнения представим  $x$  в виде:

$$x = 1/2 a e^{it} + 1/2 a^* e^{-it}, \quad (11)$$

где  $a(t)$  и  $a^*(t)$  - комплексная и комплексно-сопряженная медленно меняющиеся амплитуды. Метод медленно меняющихся амплитуд - классический в нелинейной динамике. Его работоспособность определяется условием реализации квазигармонических колебаний в системе, что формально достигается за счет малости управляющего параметра  $\lambda$ . Однако, как показало численное исследование системы Ван дер Поля с импульсным возбуждением [19], метод медленно меняющихся амплитуд в промежутке между импульсами хорошо работает вплоть до  $\lambda \approx 1$ .

Подставив выражение для  $x$  в уравнение (10) и учитывая дополнительное условие

$$\dot{a} e^{it} + \dot{a}^* e^{-it} = 0, \quad (12)$$

после несложных преобразований относительно медленно меняющейся комплексной амплитуды  $a(t)$  получим «укороченное» уравнение следующего вида:

$$\dot{a} - 1/2 \lambda a + 1/8 |a|^2 a - i 3/8 \beta |a|^2 a = 0. \quad (13)$$

Введем теперь действительные амплитуду  $R(t)$  и фазу  $\varphi(t)$ , используя соотношение:

$$a(t) = R(t) e^{i\varphi(t)}. \quad (14)$$

Такая подстановка позволяет выделить в «укороченном» уравнении (13) действительную и мнимую части. В итоге получаем для действительных амплитуды и фазы систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{R} = 1/2 \lambda R - 1/8 R^3, \quad (15)$$

$$\dot{\varphi} = 3/8 \beta R^2.$$

Решив систему (15) и учитывая начальные условия, которые состоят в том, что сразу после  $n$ -го импульса

$$R(t=0) = R_n, \quad (16)$$

$$\varphi(t=0) = \varphi_n,$$

получим выражения, задающие зависимость действительной амплитуды и фазы от времени в промежутке между  $n$  и  $(n+1)$ -м импульсами:

$$R(t) = R_n e^{\lambda t/2} / [1 + R_n^2 (e^{\lambda t} - 1) / (4\lambda)]^{1/2}, \quad (17)$$

$$\varphi(t) = \varphi_n + 3/2 \beta \ln |R_n^2 (e^{\lambda t} - 1) / (4\lambda) + 1|.$$

Согласно последнему соотношению мы получили, что в рамках метода медленно меняющихся амплитуд фаза системы зависит от времени нелинейно. Это позволяет говорить о наличии в системе *фазовой нелинейности*, а так как эта

зависимость характеризуется параметром  $\beta$ , то его можно назвать параметром фазовой нелинейности. Кроме того, из второго соотношения в (17) видно, что фаза зависит и от амплитуды колебаний, то есть рассматриваемая система *неизохронна* по сравнению с ранее исследованной Гласом, Дингом и их соавторами моделью (2). При этом следует иметь в виду, что эти утверждения относятся к случаю описания системы в терминах укороченных уравнений, так как сама исходная дифференциальная система Ван дер Поля при больших значениях управляющего параметра  $\lambda$  в области релаксационных колебаний становится неизохронной. Поэтому для дифференциальной системы мы будем называть  $\beta$  просто параметром нелинейности, имея тем не менее в виду, что для квазигармонических режимов он отвечает за неизохронность и фазовую нелинейность.

Соотношения (11), (12) позволяют найти зависимости динамической переменной  $x$  и скорости ее изменения  $\dot{x}$  от времени в промежутке между импульсами. Если учесть, что к моменту начала  $(n+1)$ -го импульса проходит время, равное периоду внешнего воздействия  $T$ , а внешнее воздействие носит  $\delta$ -образный характер, то величина  $x$  после импульса не изменится, а  $\dot{x}$  получит добавку, равную амплитуде внешнего воздействия  $B$ . Тогда для динамической переменной  $x$  и скорости ее изменения  $\dot{x}$  сразу после  $(n+1)$ -го импульса получаем:

$$x_{n+1} = R_n e^{\lambda T/2} \cos(T + \varphi_n + \psi_n) / [1 + R_n^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2}, \quad (18)$$

$$\dot{x}_{n+1} = -R_n e^{\lambda T/2} \sin(T + \varphi_n + \psi_n) / [1 + R_n^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1/2} + B,$$

где

$$\psi_n = 3/2 \beta \ln |R_n^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda) + 1|. \quad (19)$$

Это и есть искомое двумерное отображение, задающее зависимости динамической переменной  $x$  и скорости ее изменения  $\dot{x}$  сразу после  $(n+1)$ -го импульса от их значений сразу после  $n$ -го импульса. Их удобнее переписать в комплексной форме, введя новую комплексную переменную

$$z = x + i\dot{x}. \quad (20)$$

Тогда, подставив выражения для  $x_{n+1}$  и  $\dot{x}_{n+1}$  в (20), после несложных преобразований для комплексной переменной  $z$  получаем искомое двумерное отображение:

$$z_{n+1} = z_n e^{(\lambda T/2) - iT} e^{-i\psi_n} / [1 + |z_n|^2 (e^{\lambda T} - 1) / (4\lambda)]^{1-2} + iB, \quad (21)$$

где  $\psi_n$  определяется выражением (19), в котором вместо  $R_n^2$  стоит  $|z_n|^2$ . Подчеркнем, что поскольку отображение (21) получено в рамках метода медленно меняющихся амплитуд, то можно говорить о том, что его отличие от системы (6) состоит в учете фазовой нелинейности и неизохронности колебаний. Более того, поскольку уравнения для амплитуды и фазы (15) представляют собой фактически полную нормальную форму для бифуркаций Андронова - Хопфа, то можно говорить о том, что полученные отображения обобщают модель «prototypical kicked oscillator» (2) Гласа и Динга на случай учета неизохронности колебаний.

Получим теперь аналог одномерного отображения Гласа (7) в исследуемом случае. Для этого предположим, что в промежутке между импульсами фазовая траектория успевает вернуться на предельный цикл. Это формально отвечает выполнению условия  $\lambda T \gg 1$  [19]. (Заметим, что оно не противоречит условию применимости метода медленно меняющихся амплитуд, поскольку может

достигаться за счет больших периодов воздействия  $T$ . При этом следует иметь в виду, что в силу принятой нормировки воздействие на собственной частоте осциллятора отвечает значению  $T=2\pi$ . Подробнее эффективность различных приближений обсуждается в [19].) Теперь от двумерного отображения можно перейти к одномерному. Для этого преобразуем выражения (18), умножая числитель и знаменатель на  $e^{\lambda T/2}$  и учитывая, что  $e^{-\lambda T} \rightarrow 0$  при  $\lambda T \gg 1$ . В итоге получим:

$$x_{n+1} = 2\lambda^{1/2} \cos(T + \varphi_n + 3/2 \beta \lambda T + 3/2 \beta \ln |R_n^2 / (4\lambda)|), \quad (22)$$

$$\dot{x}_{n+1} = -2\lambda^{1/2} \sin(T + \varphi_n + 3/2 \beta \lambda T + 3/2 \beta \ln |R_n^2 / (4\lambda)|) + B.$$

Заметим, что для комплексной переменной  $z$  справедливо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{n+1} = -\dot{x}_{n+1} / x_{n+1} = & [\sin(T + \varphi_n + 3/2 \beta \lambda T + 3/2 \beta \ln |R_n^2 / (4\lambda)|) - \\ & - C] / \cos(T + \varphi_n + 3/2 \beta \lambda T + 3/2 \beta \ln |R_n^2 / (4\lambda)|). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь введена новая переменная

$$C = B / (2\lambda^{1/2}), \quad (24)$$

имеющая смысл нормированной амплитуды внешнего воздействия. Теперь сделаем замену переменных, введя новую фазу

$$\theta = -\varphi - T - 3/2 \beta \lambda T - 3/2 \beta \ln |R_n^2 / (4\lambda)|. \quad (25)$$

(Заметим, что если «старая» фаза  $\varphi$  отсчитывается по часовой стрелке, то новая фаза  $\theta$  - против.) Тогда, учитывая, что

$$R_n^2 = x_n^2 + \dot{x}_n^2 = 4\lambda(1 + 2C \sin \theta_n + C^2), \quad (26)$$

для новой фазы  $\theta$  получаем следующее одномерное отображение:

$$\theta_{n+1} = \operatorname{arctg}((\sin \theta_n + C) / \cos \theta_n) - \Omega - 3/2 \beta \ln(1 + 2C \sin \theta_n + C^2), \quad (27)$$

где

$$\Omega = T(1 + 3/2 \beta \lambda) \quad (28)$$

имеет смысл нормированного периода. Это и есть обобщение отображения Гласа (7), полученного и исследованного в работах [11-13, 17, 18, 21, 22], на неизохронный случай. В этом случае  $\beta$  играет роль параметра неизохронности, так что при  $\beta=0$  приходим к отображению Гласа. Заметим также, что отображение (27) представляет собой новую разновидность отображения окружности.

При условии малой амплитуды воздействия  $C \ll 1$ , из (27) получаем

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - (1 + 9\beta^2)^{1/2} C \sin \theta_n. \quad (29)$$

Это стандартное синус-отображение окружности [20]. Как известно, оно может демонстрировать нетривиальную динамику (перекрывание языков синхронизации, удвоения периода, хаос), если коэффициент перед синусом больше или порядка единицы. Легко видеть из (29), что при малой нелинейности, характеризуемой параметром  $\beta$ , и условии  $C \ll 1$  такая сложная динамика невозможна. В этом случае на плоскости период  $\Omega$  - амплитуда воздействия  $C$  наблюдаются

изолированные языки синхронизации, не имеющие внутреннего устройства. Если же нелинейность велика, то соотношение (29) можно переписать в виде

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - 3\beta C \sin \theta_n. \quad (30)$$

Таким образом, в этом случае указанное выше условие нетривиальной динамики  $3\beta C \sim 1$  может быть обеспечено даже при малых  $C$ , если  $\beta$  достаточно велико. Соответственно, при  $C \approx 1/(1+9\beta^2)^{1/2}$  функция, задающая одномерное отображение (27), будет иметь кубическую точку перегиба. В этом случае в одномерном отображении будет наблюдаться перекрытие языков синхронизации и классическая универсальность [20].

Итак, замечательное свойство отображения (27) состоит в том, что по мере роста параметра нелинейности  $\beta$  оно демонстрирует переход от свойств отображения Гласа с присущей ему универсальностью [11-13] к стандартному синус-отображению окружности и классической универсальности [20].

Мы в этой работе сосредоточимся на описании устройства плоскости параметров период - амплитуда воздействия. Из приведенного выше рассуждения и из самих результатов компьютерных исследований вытекает, что имеет смысл рассмотреть наиболее детально два случая - малых и больших значений параметра нелинейности  $\beta$ .

### Картина синхронизации в случае небольших значений параметра нелинейности $\beta$

Начнем более подробное рассмотрение со случая небольших значений параметра нелинейности  $\beta$ . Пусть  $\beta=0.2$ .

Сначала рассмотрим особенности картины синхронизации в одномерном отображении (27). Функция  $f(\theta)$ , задающая это отображение, построенная для нескольких значений нормированной амплитуды внешнего воздействия  $C$  при фиксированном значении нормированного периода, представлена на рис. 1. Видно, что одномерное отображение (27) характеризуется следующим поведением.

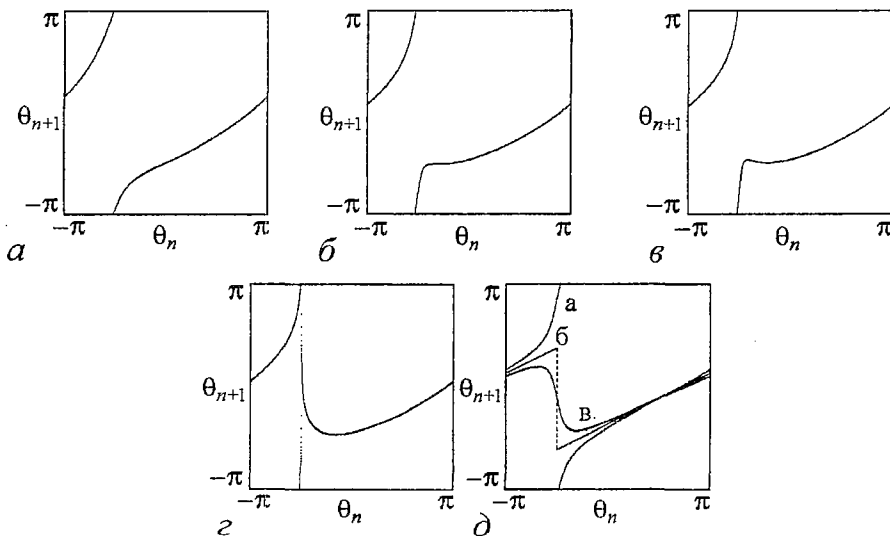


Рис. 1. Вид функции, задающей одномерное отображение (27) в случае небольших значений параметра нелинейности  $\beta=0,2$  (а-г) и в случае  $\beta=0,0$  (д). Рисунки построены при фиксированном значении нормированного периода внешнего воздействия. На рис.а-г нормированная амплитуда внешнего воздействия  $C$  принимает следующие значения: а - 0.6, б - 0.857, в - 0.9, г - 1.0; а на рис. д  $C=0.8$  (график а),  $C=1$  (график б) и  $C=1,2$  (график в)

1. При  $C < 1/(1+9\beta^2)^{1/2} \approx 0.8575$  оно монотонно возрастает и является обратимым (рис. 1, а).

2. При  $C \approx 1/(1+9\beta^2)^{1/2} \approx 0.8575$  одномерное отображение имеет кубическую точку перегиба и теряет обратимость (рис. 1, б). При этом в отображении должно наблюдаться перекрытие языков синхронизации.

3. При  $C > 1/(1+9\beta^2)^{1/2} \approx 0.8575$  оно становится необратимым и бимодальным (рис. 1, в).

4. При  $C=1$  отображение имеет особую точку нового типа (рис. 1, г). Если обратиться к виду отображения (27), то нетрудно понять, что эта особенность носит логарифмический характер - при  $C=1$  выражение под знаком логарифма может обратиться в ноль.

Таким образом, наличие даже малой нелинейности, задаваемой параметром  $\beta$ , существенно меняет свойства одномерного отображения. Для характерной линии перекрытия языков  $C=1$  меняется вид особенности - от кусочно-линейного разрыва в изохронном случае ( $\beta=0$ ) (рис. 1, д) к логарифмической особенности в неизохронном случае (рис. 1, з).

В то же время наличие такой нелинейности понижает по амплитуде воздействия  $C$  порог перекрытия языков (в нашем случае примерно до 0.85). Теперь это явление оказывается связанным с традиционной кубической точкой перегиба. (Из сказанного следует, что предельный переход к нулевой неизохронности  $\beta=0$  с позиций критических явлений и концепции универсальности, по-видимому, представляет собой самостоятельную и нетривиальную задачу, поскольку при этом встречаются два разных класса универсальности систем с квазипериодической динамикой.)

Более детальные выводы о картине синхронизации в одномерном отображении (27) можно сделать, если рассмотреть карты динамических режимов, построенные на плоскости параметров нормированные период  $\Omega$  - амплитуда  $C$  внешнего воздействия (рис. 2). На рис. 2, а представлена такая карта для значения параметра  $\beta=0.2$ , а на рис. 2, б представлена аналогичная карта в случае отсутствия нелинейности  $\beta=0$ .

Карта динамических режимов представляет собой плоскость параметров, на которой оттенками серого цвета обозначены области существования режимов различных периодов. Так, белый цвет отвечает режиму периода 1, светло серый - 2 и т.д., а черный цвет отвечает хаотическим и квазипериодическим режимам и режимам больших периодов. Для построения карты динамических режимов надо в каждой точке плоскости параметров сначала сделать предварительные итерации системы, необходимые для выхода на установившийся режим, а потом численно определить период режима [20]. Карты динамических режимов обычно строятся с

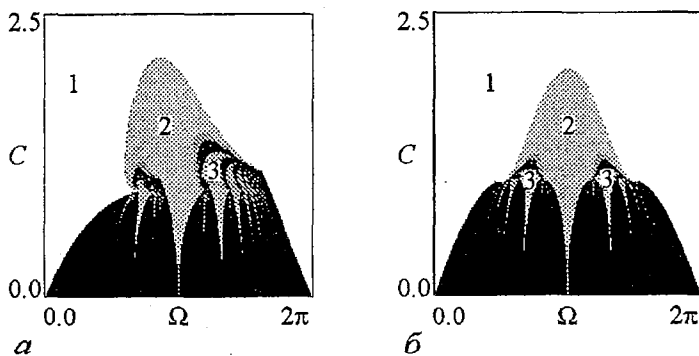


Рис. 2 Карты динамических режимов одномерного отображения (27). а - малые значения параметра нелинейности,  $\beta=0.2$ ; б -  $\beta=0.0$



наследованием начальных условий (в качестве начальных условий для динамических переменных берутся их значения, полученные в предыдущей точке), но возможно построение карт и без наследования. Это повлияет лишь на области мультистабильности. Они могут выглядеть по-разному в зависимости от того, строится ли карта с наследованием начальных условий или без. На вид областей мультистабильности влияет и направление движения по плоскости параметров. В данной работе все карты динамических режимов строились с наследованием начальных условий, а плоскость параметров сканировалась снизу вверх и слева направо.

Теперь вернемся к картам динамических режимов, представленным на рис. 2. Сопоставляя их, видим, что, как и следовало ожидать, наличие малой нелинейности, характеризуемой параметром  $\beta$ , не меняет устройство языков синхронизации у их основания. С другой стороны, даже такая малая нелинейность существенно трансформирует картину в области перекрытия языков синхронизации. Кроме того, наличие нелинейности ( $\beta \neq 0$ ) трансформирует и вершины языков синхронизации, расположенные в области  $C > 1$ : они теряют симметрию, наклоняясь в область меньших значений нормированного периода внешнего воздействия  $\Omega$ .

Теперь рассмотрим особенности картины синхронизации в двумерном отображении (21). Для него также построены карты динамических режимов на плоскости нормированные период  $\Omega$  – амплитуда  $C$  внешнего воздействия, но уже для нескольких значений управляющего параметра  $\lambda$  (рис. 3). Сравнивая их между собой и с картой динамических режимов одномерного отображения (27) (рис. 2, а), видим, что при небольших значениях параметра  $\lambda = 0.2$  (рис. 3, а) они не похожи. С ростом параметра  $\lambda$  соответствие между картами улучшается (рис. 3, б-д). Однако теперь даже при достаточно большом значении  $\lambda = 3.2$  карты для двумерного (21)

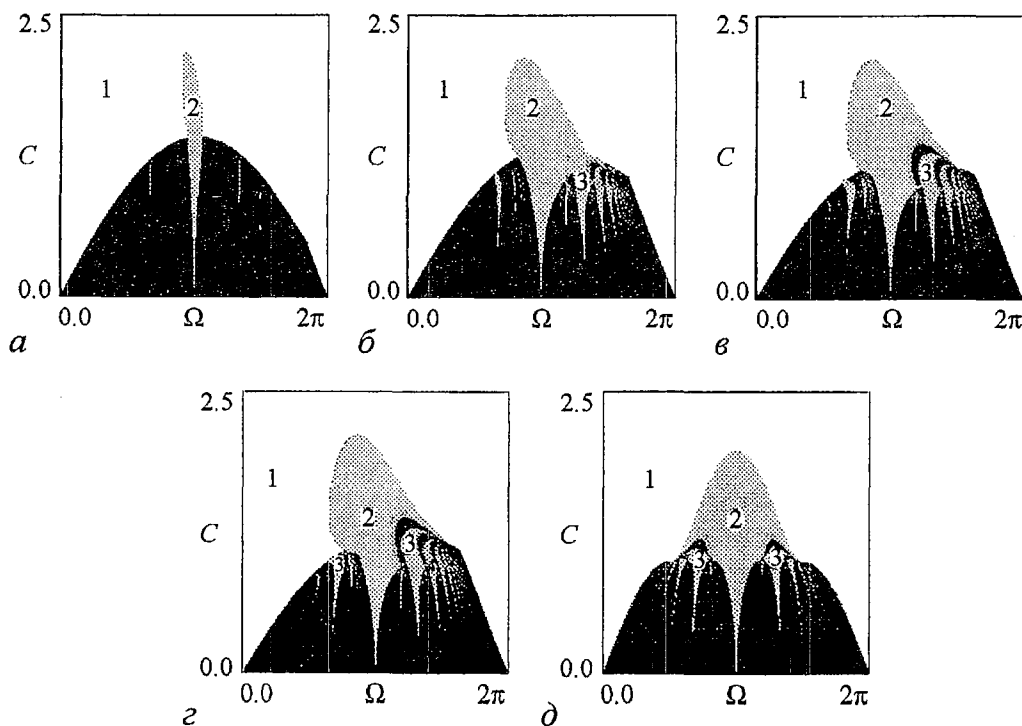


Рис. 3. Карты динамических режимов двумерного отображения (21) для случая малой нелинейности ( $\beta = 0.2$ ), при следующих значениях управляющего параметра  $\lambda$ : а - 0.2, б - 1,2, в - 2.2, г - 3.2 и д - для случая  $\beta = 0.0$  и  $\lambda = 3.2$

(рис. 3, з) и одномерного (27) (рис. 2, а) отображений все еще отличаются, особенно в области небольших значений периода внешнего воздействия. Отметим, что в изохронном случае при больших значениях управляющего параметра их устройство одинаково во всей рассматриваемой области пространства параметров (рис. 2, б и 3, д).

Обратимся, наконец, к картине синхронизации в дифференциальной системе (9). Для нее на плоскости параметров нормированные период  $\Omega$  – амплитуда  $C$  внешнего воздействия построены карты динамических режимов (рис. 4) для тех же значений параметра  $\lambda$ , что и для двумерного отображения.

Отметим, что теперь диапазон изменения параметра  $\Omega$  увеличен. И это не случайно. Плоскости параметров всех рассматриваемых систем обладают  $2\pi$ -периодической структурой. Однако параметр, по которому наблюдается периодичность, у них разный. Так, в дифференциальной системе – это период внешнего воздействия  $T$ . В одномерном и двумерном отображениях – это нормированный период  $\Omega$ . А так как параметры  $\Omega$  и  $T$  связаны между собой соотношением (28), в которое входят параметры  $\beta$  и  $\lambda$ , то с ростом параметра  $\lambda$  для достижения одного и того же диапазона по  $T$  надо брать больший диапазон по  $\Omega$ . И действительно, число повторяющихся структур на картах дифференциальной системы (9) с ростом параметра  $\lambda$  уменьшается: при  $\lambda=0.2$  их было три (рис. 4 а), при  $\lambda=3.2$  – две (рис. 4, з). Подчеркнем, что, как видно из (28), эта особенность характерна для системы при  $\beta \neq 0$ , в случае  $\beta=0$  она исчезает и  $\Omega=T$ .

Другая особенность картины синхронизации дифференциальной системы (9) состоит в том, что если при небольших значениях управляющего параметра  $\lambda$  (рис. 4, а, б) устройство языков синхронизации и их эволюция аналогичны двумерному отображению (21) – языки несимметричны, слегка наклонены в область меньших значений периода, внутри языков появляются области удвоенного периода и хаоса и наблюдается тенденция к образованию структуры, характерной для одномерного отображения (27), то при больших значениях параметра  $\lambda$  (рис. 4, в, з) их устройство начинает отличаться – с ростом  $\lambda$  языки не только становятся уже и вытягиваются вдоль вертикальной оси, но и при этом уменьшаются области режимов удвоенного периода и хаоса внутри языков, и образование структуры, характерной для одномерного отображения, не происходит.

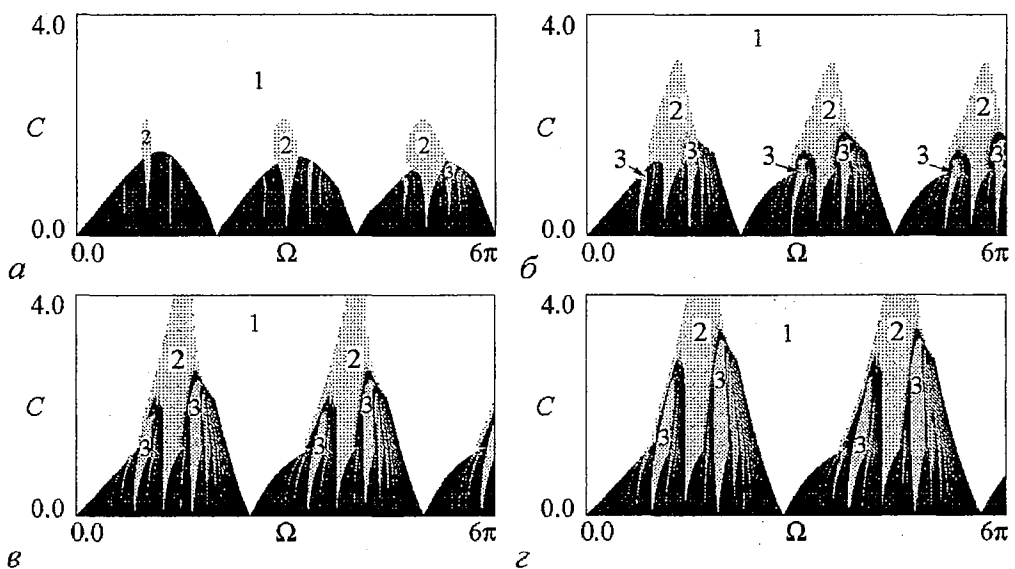


Рис. 4. Карты динамических режимов осциллятора Ван дер Поля – ДUFFинга (9) для  $\beta=0.2$  и следующих значений управляющего параметра  $\lambda$ : а - 0.2, б - 1.2, в - 2.2, з - 3.2

## Картина синхронизации в случае больших значений параметра нелинейности $\beta$

Теперь рассмотрим картину синхронизации в случае достаточно больших значений параметра нелинейности  $\beta$ . Пусть для определенности  $\beta=1$ .

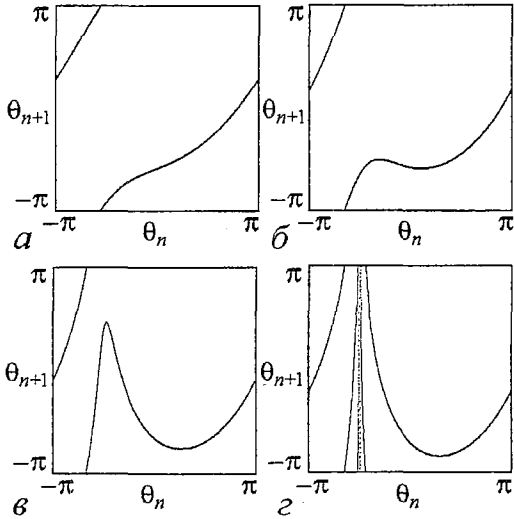
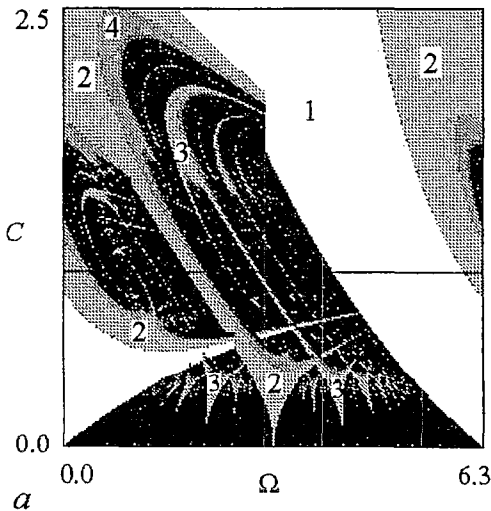


Рис. 5. Вид функции, задающей одномерное отображение (27) в случае больших значений параметра нелинейности ( $\beta=1$ ) для следующих значений нормированной амплитуды внешнего воздействия  $C$ : а - 0.2, б - 0.4, в - 0.8, г - 1.0. На всех рисунках величина нормированного периода фиксирована

таким же, как в стандартном синус-отображении окружности (рис. 6, б), и значительно трансформируется верхняя часть карты (см. рис. 6, а). Она становится более сложной: на ней теперь видны не только разнообразные по форме области режимов удвоенного периода, но и традиционные для двухпараметрических систем структуры типа «crossroad area».

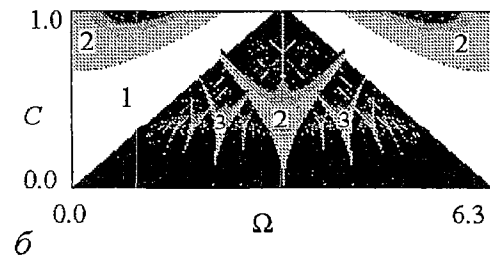
Мы теперь можем получить компьютерные подтверждения того, что в



Начнем, как и ранее, с одномерного отображения (27). На рис. 5 показан вид функции, задающей одномерное отображение (27). Видно, что с ростом параметра  $C$ , имеющего смысл нормированной амплитуды внешнего воздействия, кубическая точка перегиба появляется при меньших значениях  $C$  (см. рис. 1, б и 5, б); кроме этого, наблюдаемая при  $C=1$  логарифмическая особенность становится более выраженной (см. рис. 1, г и 5, г).

На рис. 6, а представлена карта динамических режимов одномерного отображения (27). Отметим, что теперь перекрытие языков синхронизации, а также развитие их внутренней структуры оказывается возможным уже при малых значениях нормированной амплитуды внешнего воздействия и связано с кубической точкой перегиба одномерного отображения. При этом трансформируются и языки синхронизации, устройство которых становится

Рис. 6. Карта динамических режимов: а - отображения (27) для больших значений параметра нелинейности  $\beta=1$ ; б - синус-отображения окружности (30)



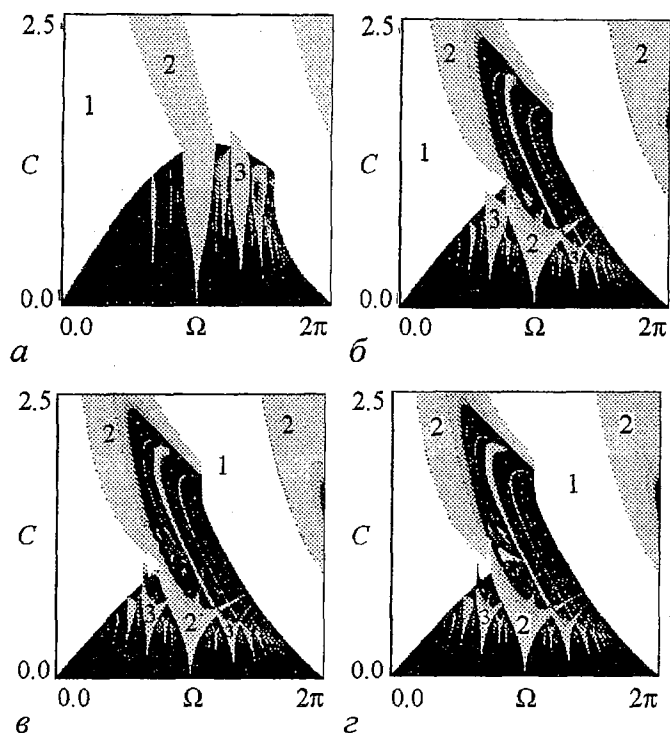


Рис. 7. Карты динамических режимов двумерного отображения (21) для  $\beta=1$  и следующих значений управляющего параметра  $\lambda$ : а - 0.2, б - 1.2, в - 2.2, г - 3.2

случае больших значений параметра  $\beta$  аппроксимация одномерного отображения (27) стандартным синус-отображением окружности (30) может дать классическую картину языков синхронизации в области их перекрытия. Это хорошо видно из сравнения рис. 6, а (карта общего отображения (27)) и рис. 6, б (карта стандартного синус-отображения (30)). Картинки построены так, чтобы сделать максимально наглядной эффективность стандартного отображения в определенной области умеренных амплитуд внешнего воздействия  $C$ . (Нам представляется, что рис. 6 имеет и определенный методический интерес, демонстрируя весьма наглядно возможную эффективность традиционного синус-отображения окружности для системы Ван дер Поля - Дуффинга для случая больших значений параметра нелинейности  $\beta$ .)

Теперь рассмотрим двумерное отображение (21). Карты динамических режимов для него на плоскости параметров нормированные период  $\Omega$  - амплитуда  $C$  внешнего воздействия представлены на рис. 7. Хорошо видно, что при небольших значениях  $\lambda=0.2$  (рис. 7, а) карта двумерного отображения (21) отличается от одномерного (27): внутри языков синхронизации не наблюдаются области удвоенного периода и хаоса, к тому же они сильнее вытянуты вдоль вертикальной оси, чем в одномерном отображении. С ростом  $\lambda$  (см. рис. 7, б-г) устройство языков синхронизации трансформируется к тому, которое наблюдается в одномерном отображении: внутри языков появились области удвоенного периода и хаоса. Однако важно отметить, что при всех значениях  $\lambda$  сходство между картами двумерного (см. рис. 7) и одномерного (см. рис. 6, а) отображений наблюдается лишь в области небольших значений нормированной амплитуды внешнего воздействия, то есть в области, где располагаются языки синхронизации.

В заключение, рассмотрим картину синхронизации в дифференциальной системе (9). Карты динамических режимов для нее на плоскости параметров нормированные период  $\Omega$  - амплитуда  $C$  внешнего воздействия для параметра

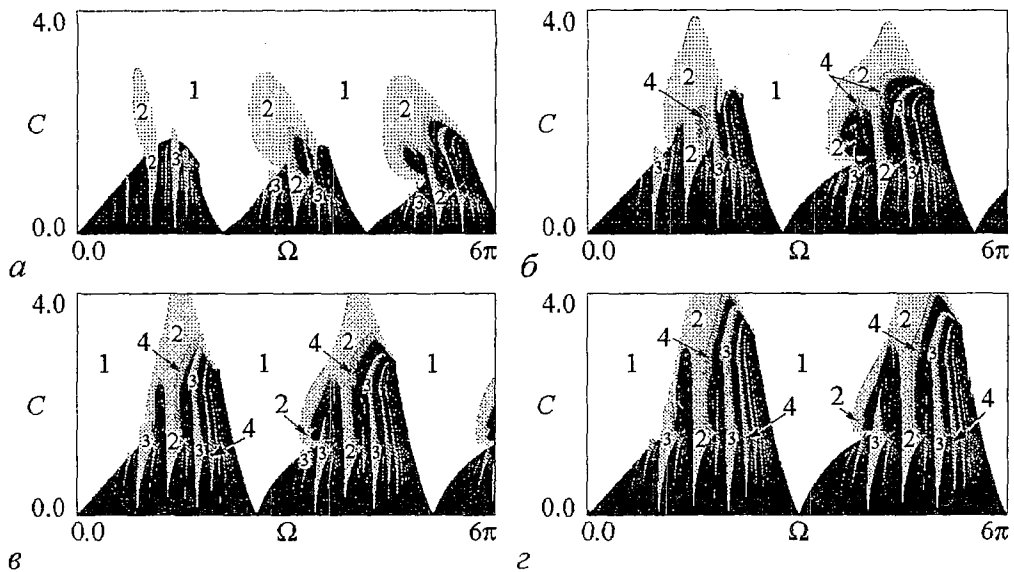


Рис. 8. Карты динамических режимов для осциллятора Ван дер Поля - Дуффинга (9) для  $\beta=1$  и следующих значений управляющего параметра  $\lambda$ : а - 0.2, б - 1.2, в - 2.2, г - 3.2

нелинейности  $\beta=1$  и нескольких значений управляющего параметра  $\lambda$  представлены на рис. 8. Сопоставляя их с картой для одномерного отображения (27) (см. рис. 6, а), можно заметить, что работоспособность одномерной аппроксимации весьма высока даже для небольших значений  $\lambda$  (особенно в области больших значений периода внешнего воздействия). Так, даже при очень малом  $\lambda=0.2$  (рис. 8, а), хотя большая часть карты дифференциальной системы и отличается от одномерного случая (см. рис. 6, а), тем не менее, для больших значений периодов воздействия между ними наблюдается неплохое сходство. При дальнейшем росте управляющего параметра  $\lambda$  (рис. 8, б) соответствие между картами улучшается. Различие состоит лишь в увеличении необходимой амплитуды воздействия, что связано с «вытягиванием» предельного цикла автономной дифференциальной системы по оси ординат в фазовом пространстве. Однако область перекрытия языков синхронизации даже в этом случае сохраняет традиционный для классической универсальности вид. Более того, при  $\lambda=2.2$  и  $\lambda=3.2$  соответствие между дифференциальной системой (9) (рис. 8, в, г) и одномерным отображением (27) (см. рис. 6, а) не ухудшается. Хотя внешне устройство языков синхронизации и выглядит иначе, но качественно оно такое же, как и в одномерном отображении.

## Выводы

В данной работе была рассмотрена синхронизация короткими импульсами в системе Ван дер Поля - Дуффинга и полученные для этой системы отображения. Представлен краткий обзор основных результатов, полученных ранее для неавтономных систем с предельным циклом в виде окружности, и системы Ван дер Поля под действием периодической последовательности дельта-импульсов. В этом случае картина синхронизации в одномерном отображении отличается от классической. Так, перекрытие языков синхронизации связано не с кубической точкой перегиба как в стандартном синус-отображении окружности, а с образованием кусочно-линейного разрыва.

Переход от системы Ван дер Поля к системе Ван дер Поля - Дуффинга позволяет получить соответствующие двумерное и одномерное модифицированные отображения. При этом параметр нелинейности осциллятора  $\beta$  в случае квазигармонических колебаний в промежутках между импульсами отвечает за неизохронность колебаний в системе. (Соответствующие уравнения для амплитуды и фазы имеют вид, отвечающий нормальной форме бифуркации Андронова - Хопфа.) Было проведено исследование полученных отображений и исходной дифференциальной системы. Показано, что в неизохронном случае даже при малом значении соответствующего параметра нелинейности  $\beta$  картина радикально меняется. При критическом значении нормированной амплитуды воздействия  $C=1$  меняется характер особенности в одномерном отображении для фазы - от кусочно-линейного разрыва к логарифмической особенности. А при несколько меньших значениях амплитуды  $C$  перекрытие языков синхронизации уже связано с кубической точкой перегиба, как и в традиционном синус-отображении окружности. Таким образом, случай малых значений параметра нелинейности  $\beta$  представляет некоторую самостоятельную задачу и требует специального анализа.

Заметим далее, что в изохронном случае переход от двумерного отображения к одномерному отображению Гласа с ростом управляющего параметра сопровождается нетривиальными метаморфозами языков синхронизации. Следствием этого является достаточно низкая эффективность одномерного отображения для описания исходной системы Ван дер Поля [19]. В случае  $\beta \neq 0$  при умеренных и больших значениях этого параметра работоспособность одномерного отображения намного выше. Оно хорошо описывает устройство языков синхронизации не только в двумерном отображении, но и в дифференциальной системе, даже при достаточно больших значениях управляющего параметра  $\lambda$ . Отметим, что при больших значениях параметра нелинейности  $\beta$  в качестве аппроксимации одномерного отображения в области небольших амплитуд внешнего воздействия эффективно стандартное синус-отображение окружности, которое правильно передает устройство плоскости параметров в области перекрытия языков синхронизации.

*Работа поддержана грантами АФГИР REC-006, № Y2-P-06-13 в рамках программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» и Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 03-02-16074.*

## Библиографический список

1. Берже П., Помо И., Видадь К. Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991, 368с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1990. 240с.
3. Ott E. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge University press, 1993.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. Winfree A.T. The Geometry of Biological Time. Springer, Berlin, 1980.
6. Caldas I.L., Tasson H. Limit cycles of periodically forced oscillations // Phys. Lett. 1989. Vol. A135. P. 264.
7. Steeb W.H., Kunick A. Chaos in limit-cycle systems with external periodic excitation // Int. J. of Nonlinear Mechanics. 1987. № 22. P. 349.
8. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization. Cambridge, 2001.
9. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica. 1997. Vol. D104. P. 219.
10. Gonzalez D.L. and Piro O. Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, № 12. P. 870.

11. *Ding E.J.* Analytic treatment of periodic orbit systematics for a nonlinear driven oscillator // *Phys. Rev.* 1986. Vol. A34, № 4. P. 3547.
12. *Ding E.J.* Analytic treatment of a driven oscillator with a limit cycle // *Phys. Rev.* 1987. Vol. A35, № 6. P. 2669.
13. *Ding E.J.* Structure of parameter space for a prototype nonlinear oscillator // *Phys. Rev.* 1987. Vol. A36, № 3. P. 1488.
14. *Ding E.J.* Structure of the parameter space for the van der Pol oscillator // *Physica Scripta.* 1988. Vol.38. P. 9.
15. *Ullmann K. and Caldas I.L.* Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system // *Chaos, Solitons & Fractals.* 1996. № 11. P. 1913.
16. *Keener J.P., Glass L.* Global bifurcation of a periodically forced nonlinear oscillator // *J Math. Biology.* 1984. № 21. P. 175.
17. *Glass L., Sun J.* Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // *Phys. Rev.* 1994. Vol.50. № 6. P. 5077.
18. *Ding E.J. and Hemmer P.C.* Exact treatment of mode locking for a piecewise linear map // *Journal of Statistical Physics.* 1987. Vol.46, № 1-2. P. 99.
19. *А.П. Кузнецов, Л.В. Тюрюкина* Осциллятор Ван дер Поля с импульсным воздействием: от потока к отображениям // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2001. Т. 9, № 6. С. 69.
20. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001, 296 с.
21. *Glass L. et. al.* Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // *Phys. Rev. A.* 1983. № 29. P. 1348.
22. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002, 292с.

*Саратовское отделение ИРЭ РАН  
Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 26.01.2004  
после переработки 20.11.2004*

## SYNCHRONIZATION OF SELF-OSCILLATING VAN DER POL - DUFFING SYSTEM BY THE SHORT PULSES

*A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina*

The brief review of the works devoted to features of dynamics of nonautonomous systems with a limit cycle as a circle and Van der Pol system under the periodic sequence of delta-pulses is given. Dynamics of Van der Pol - Duffing system under such sequence of pulses is considered. 2D and 1D maps are constructed using the method of slow amplitudes. Structure of the parameter space (period and amplitude of the pulses) of these maps and differential system is studied. The role of cubic nonlinearity typical for Van der Pol - Duffing system is discussed.



*Кузнецов Александр Петрович* - родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Соросовский профессор (2000, 2001), научный руководитель студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» и заочной школы факультета нелинейных процессов. Опубликовал более 100 научных работ.

Автор нескольких оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов и лицея прикладных наук СГУ, шести учебных пособий и монографии «Нелинейные колебания» (совместно с С.П. Кузнецовым и Н.М. Рыскиным. М.: Физматлит, 2002). Член редколлегии журнала «Империя математики». E-mail: [alkuz@sgu.ru](mailto:alkuz@sgu.ru); [www.sgtnd.tserv.ru](http://www.sgtnd.tserv.ru)



*Тюрюкина Людмила Владимировна* – родилась в 1977 году. В 2000 году окончила факультет нелинейных процессов СГУ. Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, ассистент базовой кафедры динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Область научных интересов – динамический хаос, критические явления на пороге хаоса, сложная динамика нелинейных осцилляторов и автоколебательных систем с внешним периодическим воздействием в контексте сопоставления различных подходов к их описанию, синхронизация короткими импульсами и управление неустойчивыми режимами с посредством коротких импульсов. Автор 26 научных публикаций, в том числе 7 статей в российских и зарубежных журналах. Участвовала в 28 научных конференциях, в том числе в 14 международных.

Лауреат стипендии Президента РФ для студентов (1999-2000) и аспирантов (2001-2002). В 2001 и 2002 годах получила персональные гранты РФФИ для молодых исследователей (№ 01-02-06391, № 02-02-06469). Принимает участие в работе международных научных коллективов. Совершила пять научных визитов в Датский технический университет и научный визит в группу статистической физики и нелинейной динамики Потсдамского университета, Германия.