



МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ГАРМОНИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ

Б.П. Безручко, Д.А. Смирнов

Предлагается общий подход к построению глобальных моделей гармонически возбуждаемых систем по временным рядам. Он является модификацией стандартного метода глобальной реконструкции дифференциальных уравнений: в модельные уравнения входит полином, аргументами которого являются не только последовательные производные наблюдаемой, но и функции, явно зависящие от времени. Работоспособность и детали предложенного подхода демонстрируются в численных экспериментах.

Введение

Методы реконструкции обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по временным рядам развиваются уже более десяти лет [1-4]. Они достаточно успешно применяются для прогноза [5], качественного описания динамики [5,6], расчета характеристик аттрактора [7], классификации систем [8,9]. Успех моделирования по временному ряду в решающей степени зависит от выбора *структуры модельных уравнений* (количества уравнений и вида функций в их правых частях), адекватной наблюдаемым переменным. Этот выбор является наиболее трудной частью процедуры реконструкции, и вряд ли здесь можно рассчитывать на универсальные рецепты. Тем не менее используемые методы ориентированы, как правило, на реконструкцию ОДУ в универсальном виде (без учета специфики исследуемой системы). Например, согласно распространенному подходу [4-7,10], который мы будем называть *стандартным*, уравнения восстанавливаются в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ &\dots \\ \dot{y}_D &= f(y_1, y_2, \dots, y_D), \end{aligned} \tag{1}$$

где y_1 - наблюдаемая, а функция f является полиномом порядка K

$$f(y_1, y_2, \dots, y_D) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K c_{l_1, l_2, \dots, l_D} \prod_{j=0}^D y_j^{l_j}, \quad \sum_{j=1}^D l_j \leq K. \quad (2)$$

Однако во многих случаях подобные методики оказываются не работоспособными - в частности, стандартные модели часто оказываются весьма громоздкими и дают расходящиеся решения. Эти трудности возникают, например, при моделировании систем, находящихся под внешним воздействием, которым посвящена данная работа.

Перспективным путем развития методов глобальной реконструкции ОДУ представляется модификация универсальных подходов применительно к некоторым достаточно узким классам объектов. Применительно к гармонически возбуждаемым осцилляторам, такая модификация стандартного подхода использовалась в [11-13]. Модификация состояла в том, что реконструировались *неавтономные* ОДУ, то есть в уравнения модели включались функции, явно зависящие от времени (внешнее воздействие)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= f(y_1, y_2) + a \cos \omega t + b \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

где f - полином (2). Эта структура модельных уравнений отражает частный случай, один из возможных способов внесения воздействия - аддитивный (силовой).

В данной работе предлагается общий подход к глобальному нелинейному моделированию объектов, находящихся под гармоническим воздействием. Согласно этому подходу стандартная структура (1) модифицируется таким образом, что аргументами функции f являются не только y_1, \dots, y_D , но и слагаемые $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, описывающие внешнее воздействие. Однако и такая модель может оказаться весьма громоздкой, поэтому для многих ситуаций целесообразно использовать упрощенную структуру модели. Упрощенный подход состоит в том, что модель имеет вид (1)-(2), но все коэффициенты могут зависеть от времени, то есть величины c_{l_1, l_2, \dots, l_D} заменяются выражениями $(c_{l_1, l_2, \dots, l_D} + a_{l_1, l_2, \dots, l_D} \cos \omega t + b_{l_1, l_2, \dots, l_D} \sin \omega t)$.

Далее, в п. 1 обсуждаются возможности стандартного метода и причины его неэффективности. Предлагаемые подходы описываются и обосновываются в п. 1. В разделе 2 их эффективность демонстрируется на различных численных примерах.

1. Методы построения модели по временному ряду

1.1. Стандартный подход. Рассмотрим кратко стандартный подход к глобальной реконструкции и обсудим возможные причины его неэффективности. Пусть имеется скалярный временной ряд - конечный набор значений некоторой величины v , измеренных в дискретные моменты времени, разделенные интервалом выборки Δt : $\{v_i\}_{i=1}^{N_v}$, $v_i = v(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, $i=1, \dots, N_v$. Пусть выборка произведена достаточно часто, то есть последовательные значения v отличаются друг от друга достаточно слабо по сравнению с общим размахом колебаний. Требуется построить систему ОДУ (модель), которая достаточно хорошо воспроизводит наблюдаемый ряд.

Схема решения этой задачи при стандартном подходе выглядит следующим образом. Выбирается некоторое значение размерности модели D . Восстанавливаются векторы состояния $y(t_i)$ методом последовательных производных (производные находятся по временному ряду численно [5,10]).

Проводится аппроксимация зависимости $\dot{y}_D(y)$ полиномом (2). Значения коэффициентов полинома c_{1, t_2, \dots, t_D} определяются методом наименьших квадратов, то есть так, чтобы минимизировать средний квадрат погрешности аппроксимации

$$\varepsilon^2 = 1/N \sum_{i=1}^N (\dot{y}_D(t_i) - f(y_1(t_i), \dots, y_D(t_i)))^2, \quad (4)$$

где N - количество векторов, восстановленных по скалярному временному ряду. Поскольку коэффициенты линейно входят в выражение для f , задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Наконец, проверяется эффективность полученной модели. Критерии эффективности определяются, вообще говоря, целями моделирования, но в качестве наиболее часто используемых можно указать следующие. Для проверки *качественного сходства* поведения объекта и модели фазовая траектория модели сравнивается с траекторией, восстановленной по временному ряду. Точность *количественного описания* оценивается, например, по дальности прогноза [14]. Для ее расчета сначала вычисляется величина $\sigma(\tau)$ - среднеквадратичная¹ погрешность прогноза наблюдаемой переменной v с упреждением τ , нормированная на стандартное отклонение величины v . Затем определяется такое упреждение τ_{pred} , когда величина $\sigma(\tau)$ становится больше некоторого порогового значения: $\sigma(\tau_{pred}) \geq \sigma_c$. Это время упреждения τ_{pred} и называется *дальностью прогноза*. Если модель неэффективна, то следует изменять (как правило, увеличивать) порядок полинома K или размерность D и строить новую модель.

Однако опыт использования этой процедуры показывает, что стандартная структура модели очень часто (особенно при больших значениях D , то есть больше 3-4) оказывается не эффективной. Восстановленные уравнения во многих случаях демонстрируют поведение, качественно отличное от поведения объекта, в том числе дают расходящиеся решения [5,6]. Видимых причин этого несколько. Во-первых, при большом значении размерности нужно численно определять производные высокого порядка, что сопряжено с существенными погрешностями из-за влияния шумов. Во-вторых, для аппроксимации сложной зависимости $\dot{y}_D(y)$ может потребоваться полином высокого порядка, который содержит огромное число коэффициентов $M=(D+K)!/(D!K!)$. Это приводит к снижению надежности оценок их значений. В-третьих, траектория в фазовом пространстве модели может выйти за пределы области, обеспеченной экспериментальными данными, а тогда дальнейшее поведение модели перестает сколько-нибудь соответствовать объекту. В результате модельная траектория может (что часто и происходит) уйти на бесконечность.

Итак, причиной неудач применения стандартного подхода является громоздкость получающихся моделей. Это практически неизбежно, так как для существующего многообразия реальных систем вариант модели (1)-(2), как правило, не является естественным, наилучшим образом соответствующим объекту, а использование такой структуры уравнений требует построения моделей высокой размерности. Это хорошо видно на примере реконструкции динамических систем². Согласно результатам работ [16,17] почти любую систему ОДУ можно привести к виду (1) для почти любой наблюдаемой v . Но для того чтобы в общем

¹ Усреднение проводится по различным начальным условиям. Причем, начальные условия объекта берутся из той части временного ряда, которая не использовалась для построения модели. Прогноз рассчитывается при одинаковых начальных условиях модели и объекта.

² Мы называем динамической системой только математический объект, в отличие от существующей практики применения этого термина к реальным системам [15].

случае гарантировать взаимно однозначное соответствие векторов состояния исходной динамической системы («объекта») и модели (1), величина D должна удовлетворять условию $D > 2d$. Здесь d - размерность гладкого многообразия, внутри которого происходит наблюдаемое движение исходной системы (или фрактальная размерность аттрактора, если движение происходит на хаотическом аттракторе).

Таким образом, можно наметить направление совершенствования стандартной модели - уменьшение D и K за счет изменений ее структуры, учитывающих специфику объекта (ценой отказа от части претензий на универсальность).

1.2. Модификация структуры модельных уравнений. Для моделирования систем, находящихся под гармоническим воздействием, мы предлагаем использовать специальную структуру уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ &\dots \\ \dot{y}_D &= F(y_1, y_2, \dots, y_D, \cos\omega t, \sin\omega t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $y_1 = v$, а функция F зависит явно от времени через функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. Ее можно выбрать в виде полинома степени K от $D+2$ переменных и далее использовать алгоритм п. 1. Однако здесь возникает проблема: при $K \geq 2$ в такой полином будут входить линейно зависимые слагаемые, например, $\cos^2\omega t$ и $\sin^2\omega t$, и задача расчета коэффициентов не будет иметь единственного решения. Необходимо исключить из полинома лишние слагаемые. Для этого запишем функцию F в виде

$$F(y_1, y_2, \dots, y_D, \cos\omega t, \sin\omega t) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K P_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^L (\cos\omega t, \sin\omega t) \prod_{j=1}^D y_j^{l_j}, \quad (6)$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_D + L = K,$$

где по сравнению с (2) вместо каждого коэффициента $c_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}$ стоит функция $P_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^L (\cos\omega t, \sin\omega t)$ - полином порядка L , который не содержит линейно зависимых слагаемых. Чтобы получить выражение для него, нужно записать полный стандартный полином порядка L от двух переменных ($\cos\omega t$ и $\sin\omega t$) и в нем всюду заменить $\sin^2\omega t$ на $1 - \cos^2\omega t$. При этом, опуская нижний индекс полинома, получим

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= c, \\ P^{(1)} &= c + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t, \\ P^{(2)} &= c + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos^2\omega t + b_2 \sin\omega t \cos\omega t, \\ &\dots \\ P^{(L)} &= c + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + \dots + a_L \cos^L\omega t + b_L \sin\omega t \cos^{L-1}\omega t. \end{aligned} \quad (7)$$

Изложенный подход позволяет по скалярному временному ряду реконструировать уравнения динамической системы под гармоническим внешним воздействием в общем случае. Он имеет следующие преимущества по сравнению со стандартным подходом:

- в большинстве случаев требуется меньше уравнений для описания движения,

следовательно, меньше производных нужно рассчитывать путем численного дифференцирования и, как правило, меньше коэффициентов необходимо учесть в функции F ;

- непосредственный учет внешнего воздействия позволяет в ряде случаев “ухватить” существенные черты исследуемой системы и получить качественное сходство поведения модели и объекта.

Однако предложенный подход не лишен полностью недостатков, свойственных стандартному методу. Он лишь позволяет в ряде случаев несколько ослабить их влияние. Так, в общем случае получающаяся модель тоже громоздка, но все-таки более компактная, чем стандартная. По всей видимости, такой подход наиболее эффективен для тех случаев, когда достаточно использовать модель невысокой размерности с полиномом невысокого порядка (см. последний пример в разделе 2).

Возможным шагом в направлении упрощения структуры модели и увеличения ее эффективности является переход к модели (5) с мультипликативным воздействием

$$F(y_1, y_2, \dots, y_D, \cos\omega t, \sin\omega t) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_D=0}^K (c_{l_1, l_2, \dots, l_D} + a_{l_1, l_2, \dots, l_D} \cos\omega t + b_{l_1, l_2, \dots, l_D} \sin\omega t) \prod_{j=1}^D y_j^{l_j}, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^D l_j \leq K.$$

Функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ входят в выражение (8) линейно. Такая модель содержит значительно меньше коэффициентов $M = 3(D+K)!/(D!K!)$, чем общая модель (5)-(7). В то же время выражение (8) служит вполне эффективной аппроксимацией для достаточно широкого класса систем (см. примеры раздела 3). Таким образом, на практике мы рекомендуем использовать для моделирования гармонически возмущаемых систем уравнения (5), (8), только в крайнем случае прибегая к уравнениям более общего вида (5)-(7).

Для построения моделей (5)-(7) или (5), (8) можно воспользоваться стандартной процедурой п. 1, если предварительно рассчитать по временному ряду значение периода воздействия T . Способ вычисления периода воздействия предложен в [13] и может быть использован без изменений и в нашем случае. В той же работе показано, что при реконструкции неавтономных уравнений требуется высокая точность определения периода воздействия, иначе на исследуемом временном интервале может произойти значительный «набег фазы» между истинным воздействием и его аппроксимацией.

2. Численные примеры

Далее мы проиллюстрируем преимущества предлагаемого подхода на численных примерах. Исходные скалярные временные ряды во всех случаях были получены путем интегрирования известных систем ОДУ (объектов моделирования) методом Рунге - Кутты 4-го порядка с шагом $\Delta t = 0.01$. Длина ряда в каждом случае составляла 6000 значений (примерно 10 характерных периодов колебаний). По исходному ряду реконструировались стандартная модель (1)-(2) и неавтономная - (5), (8). Приведены также результаты, которых удается достичь с помощью модели с аддитивным воздействием. Последний пример иллюстрирует

применение модели общего вида (5)-(7). Для каждого из подходов представлены только результаты, относящиеся к наиболее эффективной модели. Для оценки эффективности используются критерии, изложенные в п. 1. Для расчета дальности прогноза τ_{pred} мы приняли пороговое значение ошибки равным $\sigma_c=0.05$. Величина τ_{pred} приводится в единицах периода воздействия T , так как это характерный временной масштаб для всех примеров.

Первый пример иллюстрирует работоспособность предложенной методики при наличии шума. Наблюдаемый временной ряд - хаотическая временная реализация координаты y_1 гармонически возбуждаемого осциллятора Дуффинга

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\gamma_0 y_2 - y_1 - y_1^3 + A_0 \cos \omega_0 t, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\gamma_0 = 0.1$, $A_0 = 35$, $\omega_0 = 1$. Систему (9) можно привести к виду (1) с $D = 4$ и полиномом 3-го порядка. Для этого дважды продифференцируем по времени второе уравнение и в полученное равенство вместо $A_0 \cos \omega_0 t$ подставим его выражение из (9). Получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_4, \\ \dot{y}_4 &= -\gamma_0 y_4 - (1 + 3y_1^2 + \omega_0^2) y_3 - 6y_1 y_2^2 - \omega_0^2 \gamma_0 y_2 - \omega_0^2 (y_1 + y_1^3). \end{aligned} \quad (10)$$

Естественно, что наилучшая модель (1)-(2) получена при $D = 4$, $K = 3$, а наилучшая модель (5), (8) - при $D = 2$, $K = 3$. В обоих случаях коэффициенты восстановленных уравнений отличаются от соответствующих исходных значений меньше, чем на 1%. Время прогноза τ_{pred} достаточно велико для обеих моделей: $6T$ и $7T$, соответственно. Здесь стандартный метод также дал хороший результат, поскольку структура исходной системы приводится в точности к виду (1)-(2). Однако заметим, что для построения стандартной модели пришлось рассчитывать четыре производных, а для неавтономной - только две. Поэтому при добавлении к тому же временному ряду нормального белого шума (10^{-3} от уровня сигнала) стандартный метод уже не приводит к успеху из-за огромных погрешностей в определении четвертой производной, а неавтономная модель (5), (8) еще вполне эффективна.

Второй пример. Наблюдаемый ряд - хаотическая временная реализация координаты гармонически возбуждаемого осциллятора Тоуды (фазовая траектория показана рис. 1, а)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -0.45y_2 + (5 + 4\cos t)(\exp(-y_1) - 1) + 7\sin t. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично первому примеру можно показать, что уравнения (11) приводятся к виду (1) с $D = 4$ и сложной функцией в правой части

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_4, \\ \dot{y}_4 &= -0.45y_4 + (y_3 + 0.45y_2)[8/7y_2 \exp(y_1) - 1] + \exp(-y_1)[y_2^2 - y_3 - 8/7y_2(\exp(-y_1) - 1)] \times \\ &\times \frac{16/7(\exp(-y_1) - 1)(y_3 + 0.45y_2) + 4[y_4 + 0.45y_3 - 10y_2 \exp(-y_1)] + 35}{7 - 4y_2 \exp(-y_1) + 16/7[\exp(-y_1) - 1]^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

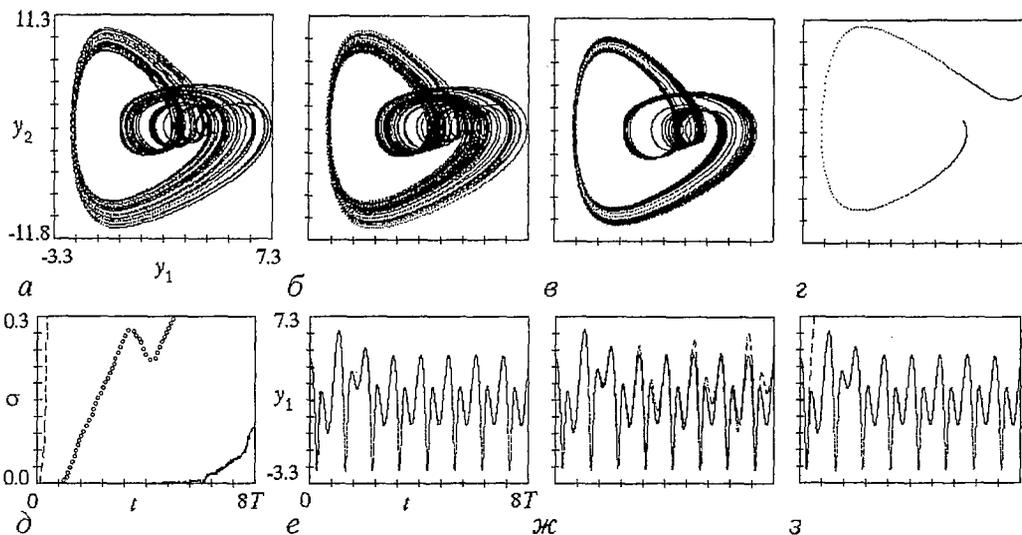


Рис. 1. а - Аттрактор осциллятора Тода (11); б, в, г - фазовые траектории модели (5), (8) ($D = 2$, $K = 9$), модели (3) ($D = 2$, $K = 10$) и стандартной модели ($D = 4$, $K = 6$), соответственно; д - ошибки прогноза для стандартной модели (штриховая линия), модели (3) (кружки) и модели (5), (8) (сплошная линия); е, ж, з - исходный временной ряд (сплошная линия) и прогноз (штриховая линия) с помощью моделей (5), (8), (3) и (1)-(2), соответственно

Наилучшая модель (5), (8) с $D = 2$ и $K = 9$ весьма эффективна (рис. 1, б, е). Значения ее коэффициентов близки к значениям соответствующих коэффициентов исходной системы (для такого сравнения в исходной системе нужно заменить экспоненту разложением в ряд Тейлора). Модель с аддитивным воздействием ($D = 2$ и $K = 10$) дает существенно худшие результаты (рис. 1, в, ж), так как учет только аддитивного воздействия недостаточен. Стандартный подход (даже в отсутствие шума) не приводит к успеху из-за того, что зависимость в правой части системы (1) слишком сложна для аппроксимации полиномом: оптимальная для прогноза стандартная модель ($D = 4$ и $K = 6$) имеет глобально неустойчивые траектории (рис. 1, г, з). Дальности прогноза для оптимальных моделей (5), (8), (3) и (1)-(2) равны соответственно $7T$, $1.5T$ и $0.15T$. На рис. 1, д приведены графики $\sigma(\tau)$, по которым определялась дальность прогноза, на рис. 1, е - з показаны исходные временные реализации и прогноз.

Третий пример. Наблюдаемый временной ряд - хаотическая временная реализация координаты x системы Рёсслера при воздействии на координату z

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b - cz + xz + A \cos t, \end{aligned} \quad (13)$$

где $a = 0.398$, $b = 2.0$, $c = 4.0$, $A = 1.0$. Система (13) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= ab - cy_1 + (ac - 1)y_2 + (a - c)y_3 + y_1^2 - ay_1y_2 + y_1y_3 - \\ & - \frac{y_2(y_1 + b - ay_2 + y_3)}{a + c - y_1} + \frac{-(1 - a^2)A \cos t + (1 - c^2 - 2cy_1 - y_2 - y_1^2)A \sin t}{a + c - y_1}, \end{aligned} \quad (14)$$

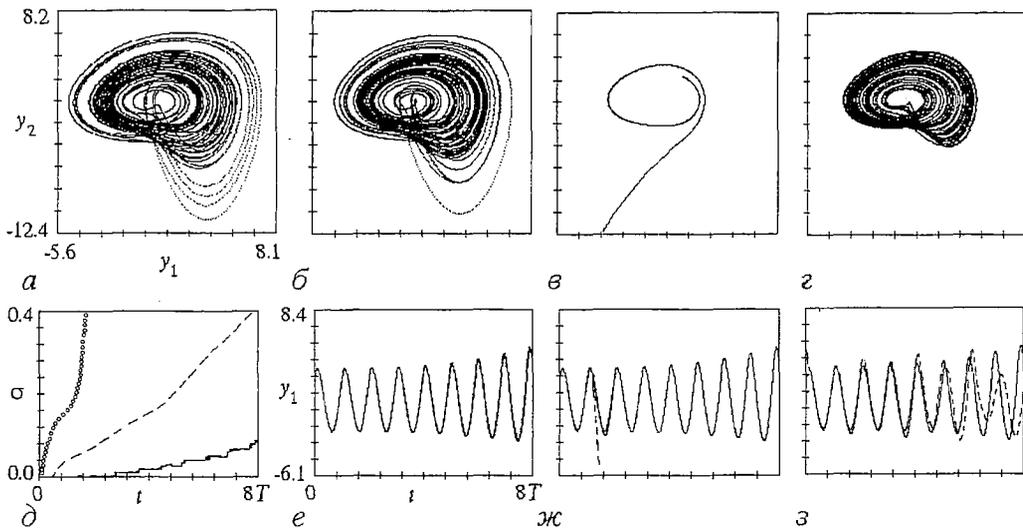


Рис. 2. а - Аттрактор системы Рёсслера (14); б, в, г - фазовые траектории модели (5), (8) ($D = 3$, $K = 5$), модели (3) ($D = 3$, $K = 5$) и стандартной модели ($D = 5$, $K = 3$), соответственно; д - ошибки прогноза для стандартной модели (штриховая линия), модели (3) (кружки) и модели (5), (8) (сплошная линия); е, ж, з - исходный временной ряд (сплошная линия) и прогноз (штриховая линия) с помощью моделей (5), (8), (3) и (1)-(2), соответственно

где $y_1 = x$ (проекция фазовой траектории показана на рис. 2, а). Результаты сравнения фазовых траекторий различных моделей, свидетельствующие в пользу модели (5), (8), приведены на рис. 2, б - г. Дальности прогноза для оптимальных моделей (5), (8), (3) и (1)-(2) равны соответственно $4T$; $0.25T$ и $0.35T$ (рис. 3, д - з). Заметим, что хотя в исходные уравнения (13) воздействие входит аддитивно, модель (3) не работает, а модель (5), (8) эффективна.

Четвертый пример. Наблюдаемый временной ряд - хаотическая временная реализация координаты y неавтономной системы Рёсслера, отличающейся от (13) тем, что воздействие осуществляется на координату y . В этом случае система Рёсслера приводится к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2, \\
 \dot{y}_2 &= y_3, \\
 \dot{y}_3 &= -b - aA^2/2 - cy_1 + (ac - 1)y_2 + (a - c)y_3 - ay_1^2 + (a^2 + 1)y_1y_2 - ax_2^2 - ax_1x_3 + \\
 &+ x_2x_3 + A[(1 - 2a^2 + ac)\text{cost} + (1 + a - c - a^2)\text{ sint}] + y_1A[(1 - a^2)\text{cost} + a\text{ sint}] - \\
 &- y_2A\text{ sint} + y_3A\text{ cost} + [(a+1)/2]A^2\text{ sin}2t,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где $y_1 = y$ (проекция фазовой траектории показана на рис.3а). Здесь функция в правой части последнего уравнения содержит не только первые степени воздействия, но и вторую гармонику. Однако это слагаемое не вносит существенного вклада в качественное поведение системы, да и количественный его вклад не очень велик. Поэтому в данном случае предложенная методика работоспособна. Наилучшая модель (5), (8) имеет аттрактор, аналогичный исходному (рис. 3, б). Траектории моделей (1), (2) и (3) глобально неустойчивы (рис. 3, в, г). Дальности прогноза для оптимальных моделей (5), (8), (3) и (1)-(2) равны соответственно $1T$, $0.25T$ и $0.3T$ (см. рис. 3, д - з). Этот пример показывает, что структура (5), (8) пригодна для описания достаточно широкого класса гармонически возбуждаемых систем (когда за вклад внешнего гармонического воздействия в решение отвечают в основном его первые степени).

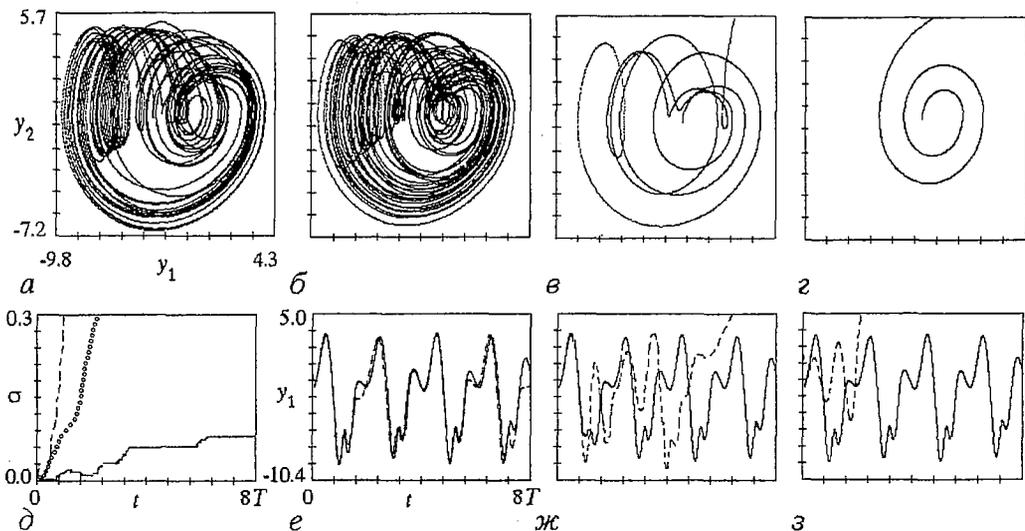


Рис. 3. а - Аттрактор системы Рёсслера (15); б, в, г - фазовые траектории модели (5), (8) ($D = 3$, $K = 5$), модели (3) ($D = 3$, $K = 2$) и стандартной модели ($D = 4$, $K = 3$), соответственно; д - ошибки прогноза для стандартной модели (штриховая линия), модели (3) (кружки) и модели (5), (8) (сплошная линия); е, ж, з - исходный временной ряд (сплошная линия) и прогноз (штриховая линия) с помощью моделей (5), (8), (3) и (1)-(2), соответственно

Можно, конечно, привести примеры систем, для моделирования которых предлагаемая методика неэффективна. Это системы (5) со сложной зависимостью функции f от воздействия, когда при аппроксимации недостаточно ограничиться первыми его степенями (8). В таких случаях иногда удается с успехом использовать модели вида (5)-(7). В качестве примера рассмотрим реализацию координаты y_1 осциллятора Дуффинга, возбуждаемого внешней гармонической силой, прошедшей нелинейное преобразование

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\gamma_0 y_2 - y_1 - y_1^3 + A_0 \cos^3 \omega_0 t, \end{aligned} \quad (16)$$

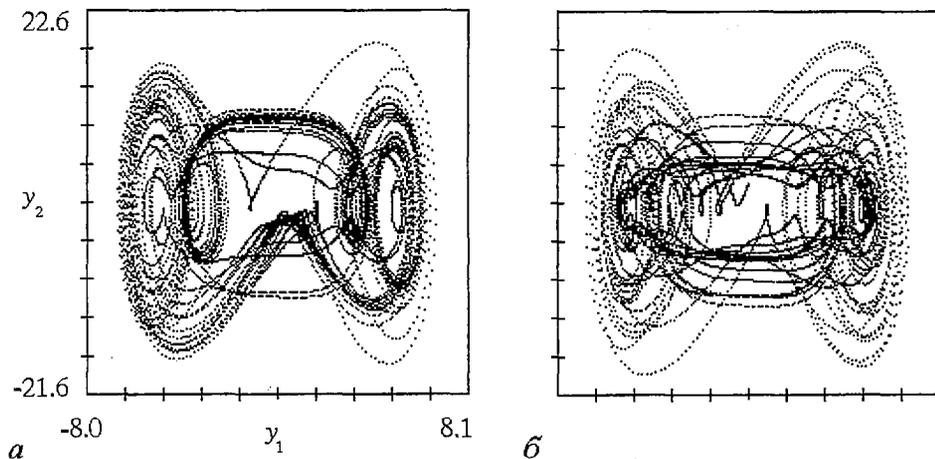


Рис. 4. а - Аттрактор осциллятора Дуффинга (16); б - аттрактор модели (5)-(7) ($D = 2$, $K = 3$)

где $\gamma_0 = 0.1$, $A_0 = 150$, $\omega_0 = 1$ (рис. 4, а). Здесь только модель общего вида (5)-(7) с $D = 2$ и $K = 3$ позволяет получить удовлетворительный результат: она демонстрирует качественно схожий аттрактор (рис. 4, б) и обеспечивает прогноз на $3T$ вперед³. Модели с другой структурой (использованные в предыдущих примерах) дают прогноз не более чем на $0.25T$ и не воспроизводят исходный аттрактор. Однако следует ожидать, что в общем случае модели (5)-(7) будут эффективны только при невысокой размерности D (и, особенно, если из них удастся исключить многие «лишние» слагаемые).

Заключение

Успех моделирования по временным рядам определяется выбором адекватного математического аппарата, информативных динамических переменных и соответствующей им структуры модельных уравнений, а также методикой вычисления значений входящих в них параметров. По-видимому, при этом можно рассчитывать на полезные рекомендации по выбору подхода лишь в отношении достаточно узких классов моделируемых объектов.

В данной работе предложена структура модельных уравнений для объектов, находящихся под внешним гармоническим воздействием. Эта структура выбирается с учетом априорной (или полученной экспериментально) информации о наличии воздействия и включает в себя полином, коэффициенты которого зависят от времени по гармоническому закону. Преимущество такого подхода заключается в том, что он позволяет обойтись моделью с меньшим (чем при стандартном методе) количеством уравнений и в которой, в то же время, учтены существенные специфические черты исходного объекта. На ряде примеров проиллюстрирована эффективность используемой структуры уравнений (как при силовом, так и при параметрическом характере воздействия).

Предложенная структура модели может оказаться непригодной для моделирования некоторых систем (когда необходимо учесть не только первые степени воздействия, но и более высокие). Для таких случаев предложена более общая структура уравнений, применение которой, однако, затрудняется тем, что она слишком громоздка. Тем не менее она может оказаться полезной при невысокой размерности и исключении некоторых («лишних» для моделирования данного объекта) слагаемых. Таким образом, представляется, что предложенный подход имеет достаточно широкую область применимости и может, во многих случаях, существенно облегчить построение моделей гармонически возбуждаемых систем.

Работа выполнена при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (грант REC-006) и РФФИ (гранты 99-02-17735 и 01-02-06039).

Библиографический список

1. Cremers J., Hubler A. Construction of differential equations from experimental data // Z. Naturforschung A. 1987. Vol. 42. P. 797.

³ Не очень высокая дальность прогноза обусловлена тем, что модель содержит много лишних слагаемых, которые вносят искажения. Теоретически, соответствующие коэффициенты должны быть равны нулю, но на практике они отличаются от нуля из-за погрешностей вычислений.

2. *Baake E., Baake M., Bock H.J., Briggs K.M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 45. P. 5524.
3. *Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R.* Modeling and synchronizing chaotic systems from time-series data // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3784.
4. *Gouesbet G., Letellier C.* Global vector-field approximation by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 4955.
5. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // *Радиотехника и электроника.* 1994. Т. 39, вып. 2. С. 269.
6. *Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по экспериментальным данным // *Изв. вуз. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 3. С. 112.
7. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23, № 8. С. 7.
8. *Kadtke J.* Classification of highly noisy signals using global dynamical models // *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 203. P. 196.
9. *Kadtke J., Kremliovsky M.* Estimating statistics for detecting determinism using global dynamical models // *Phys. Lett. A.* 1997. Vol. 229. P. 97.
10. *Gouesbet G., Maquet J.* Construction of phenomenological models from numerical scalar time series // *Physica D.* 1992. Vol. 58. P. 202.
11. *Hegger R., Kantz H., Schmuser F., Diestelhorst M., Kapsch R.-P., Beige H.* Dynamical properties of a ferroelectric capacitors observed through nonlinear time series analysis // *Chaos.* 1998. Vol. 8, № 3. P. 727.
12. *Безручко Б.П., Диканев Т.В., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Восстановление дифференциальных уравнений неавтономной динамической системы по экспериментальным данным // *Тез. докл. V Международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур - ХАОС'98».* Саратов, 1998. С.68-69; Constructing a model of a non-autonomous piecewise-linear electronic circuit from a scalar time series // *Proceedings of 5th International specialist workshop NDES. Denmark, 1999.* P. 65.
13. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду: модели, эксперимент // *Изв. вуз. Прикладная нелинейная динамика.* 1999. Т. 7, № 1. С. 49.
14. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.
15. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во СГУ, 1999. 368 с.
16. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical systems and turbulence.* Warwick, 1980 / Eds. D.Rang and L.S.Young. Lecture notes in mathematics. Vol. 898. P. 366.
17. *Sauer T., Yorke J., Casdgli M.* Embedology // *Journal of Statistical Physics.* 1991. Vol. 65, № 3-4. P. 579.
18. *Hasler M.* Electrical circuits with chaotic behavior // *Proceedings of the IEEE.* 1987. Vol. 75. P. 40.

Институт радиотехники
и электроники РАН,
Саратовское отделение
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 19.12.2000
после доработки 18.05.2001

METHOD FOR RECONSTRUCTION OF EQUATIONS WITH HARMONIC DRIVING FROM TIME SERIES

B.P. Bezruchko, D.A. Smirnov

We propose a general approach to constructing global models of harmonically driven systems from time series. It is a modification of the standard method of global reconstruction of differential equations - a polynomial, which arguments are sequential derivatives of an observable along with explicit functions of time, enters in model equations. Efficiency and details of the approach are demonstrated by various numerical examples.



Безручко Борис Петрович - родился в 1946 году, окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1969). Профессор кафедры электроники и волновых процессов СГУ; ведущий научный сотрудник (по совместительству) Саратовского филиала института радиотехники и электроники РАН; доктор физико-математических наук. Область научных интересов - экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментальной наблюдаемой. Имеет более 100 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

E-mail: BezruchkoBP@info.sgu.ru



Смирнов Дмитрий Алексеевич - родился в Ершове Саратовской области (1977). Окончил Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ, специальность - радиофизика. Соросовский студент (1996-1999), Соросовский аспирант (2000). Область научных интересов: конструирование математических моделей по экспериментальным временным рядам. Автор и соавтор 26 научных публикаций по данной тематике.