Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т.9, № 2, 2001

УДК 517.9, 517.92, 519

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД К НЕАВТОНОМНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ: ФАЗА БЕРРИ И ПРОБЛЕМЫ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ, СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ, КВАНТУЕМОСТИ

К. Ю. Блиох

В работе обсуждаются преимущества и перспективы применения функционального подхода к неавтономным динамическим системам. При таком подходе характеристики системы полагаются зависящими от времени не явно, а через произвольные функции параметров. Демонстрируются основные результаты применения функционального подхода к линейным адиабатическим системам - они связывают геометрические фазы Берри, проблемы определения гамильтоновости системы, квантования и сильной устойчивости.

Основные результаты, упоминаемые в этой статье, были получены в работе [1]. Там можно найти их подробное изложение и строгие доказательства. Целью данной статьи является обсуждение функционального подхода к неавтономным динамическим системам, благодаря которому М. Берри обнаружил геометрические фазы [2, 3], и с помощью которого в [1] был проведен с новых позиций анализ линейных адиабатических систем. Традиционным в теории неавтономных систем является временной подход, когда параметры системы предполагаются известными функциями независимой переменной (времени) и анализ системы проводится в фазовом пространстве, расширенном одним измерением времени. При функциональном подходе изменяющиеся параметры системы предполагаются произвольными функциями времени и искомые решения анализируются как функционалы параметров. Фазовое пространство расширяется теперь помимо времени несколькими измерениями пространства параметров. Функциональный подход кажется более сложным по сравнению с временным, и, может быть, поэтому в его применении не видели смысла. Тем более, что всякая задача в функциональной постановке может быть сведена к соответствующей временной задаче.

Но, несмотря на это, результаты применения функционального подхода к неавтономным системам оказались весьма успешными. С неожиданной легкостью функциональный подход позволил получить новые фундаментальные результаты. Это подтверждается тем, как была создана теория геометрических фаз Берри [3]. Тогда Берри и его последователи применили функциональный подход к адиабатическим системам, которые до этого казались полностью изученными при традиционном временном подходе. Однако внимание исследователей геометрических фаз в первую очередь было направлено на изучение свойств самого эффекта и не обратилось к подходу, постановке задачи, которая позволила его обнаружить. В работе [1] и в настоящей статье демонстрируются результаты, полученные при последовательном функциональном подходе к линейным адиабатическим системам. Оказалось, что функциональный подход позволяет по-новому осветить и связать между собой различные фундаментальные вопросы теории динамических систем.

Ниже мы сформулируем основную идею функционального подхода, продемонстрируем его возможности и перспективы в теории динамических систем.

1. Основная идея

Рассмотрим неавтономную линейную задачу в двух постановках

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mu(t))\mathbf{x}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}(t)$ - искомая вектор-функция, $\mathbf{A}$ - невырожденная квадратная матрица. Постановку задачи (1) назовем *временно́й* - матрица системы является некоторой функцией времени. Можно ставить вопрос о гамильтоновости, устойчивости и сильной устойчивости системы (1). Например, к уравнению (1) применимо замечание Биркгофа [4] о том, что в окрестности неособой точки всегда существует замена координат, приводящая его к тривиальной гамильтоновой форме (локальное выпрямление фазовых траекторий). Постановку задачи (2) будем называть *функциональной* - здесь матрица системы является сложной функцией и зависит от времени через произвольные ограниченные функции некоторых параметров $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t))$. Во многих физических задачах такая постановка представляется более естественной.

Действительно, в физических системах изменяются во времени параметры этих систем: длина маятника, жесткость пружины, плотность среды и т. п. При этом система характеризуется тем, как эти параметры входят в уравнения, то есть в рассматриваемом случае - зависимостью $\mathbf{A}(\mu)$. (Вот почему естественно расширять фазовое пространство системы пространством параметров, а не временем.) Независимо от того, изменяются ли параметры по какому-то одному закону $\mu=\mu^{(1)}(t)$ или по другому закону $\mu=\mu^{(2)}(t)$, мы имеем дело с одной и той же физической системой. В конце концов, конкретизация зависимости параметров от времени часто является следствием определенной аппроксимации или идеализации системы, и на одном временном интервале зависимость параметров от времени может аппроксимироваться функцией $\mu^{(1)}(t)$, а на другом - функцией $\mu^{(2)}(t)$. Поэтому определение фундаментальных свойств системы - гамильтоновости, сильной устойчивости и т. п. - не должно зависеть от того, как именно изменяются параметры во времени. Видимо, этим объясняется эффективность применения функционального подхода при решении таких общих вопросов.

Функциональность постановки задачи важна, когда речь идет о заменах координат

$$\mathbf{x}=\mathbf{D}[\mu(t)]\mathbf{y}, \tag{3}$$

где $\mathbf{D}[\mu(t)]$ является матрицей-функционалом параметров. Можно выделить два типа замен (3).

• *Локальные* - $\mathbf{D}[\mu(t)]=\mathbf{D}(\mu(t))$ является функцией параметров и зависит только от их *текущих* значений;

• *Интегральные* - $\mathbf{D}[\mu(t)]$ является интегральным функционалом $\mu(t)$ и зависит от *предыдущих* значений параметров, то есть от предыстории системы. Интегральные замены, вообще говоря, расходятся при $t\to\infty$.

Применение функционального подхода и смысл разделения замен координат на локальные и интегральные продемонстрируем в приближении адиабатического изменения параметров: $\mu=\mu(\varepsilon t)$, $\varepsilon<<1$. Ниже мы сформулируем, следуя [1], основы функциональной теории линейных адиабатических систем (2), пренебрегая в уравнении и его решениях членами порядка ε^2 и выше и считая, что матрица **A** имеет различные ненулевые текущие собственные значения.

2. Общий формализм

С помощью определенной локальной замены

$$\mathbf{x}=\mathbf{D}(\mu(\varepsilon t),\ \mu'(\varepsilon t))\mathbf{y}$$

уравнение (2) приводится к почти диагональному виду (недиагональные слагаемые имеют порядок ε^2) и тогда легко строятся n независимых асимптотических экспоненциальных решений

$$y_j(t) \approx y_j(0)\exp\{\int_0^t \lambda_j(\mu(\varepsilon\tau),\ \mu'(\varepsilon\tau))d\tau\}, \tag{4}$$

где $j=1,\dots,n$. Разделив слагаемые порядка ε^0 и ε^1, эффективные собственные числа λ_j можно представить в виде

$$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + \lambda_j^{(1)}. \tag{5}$$

Слагаемые нулевого порядка являются функциями параметров

$$\lambda_j^{(0)} = \lambda_j^{(0)}(\mu(\varepsilon t)) \tag{6}$$

(на самом деле это текущие собственные числа матрицы **A** исходной системы (2)). Слагаемые первого порядка пропорциональны $\mu'(\varepsilon t)\sim\varepsilon$, то есть представимы в виде

$$\lambda_j^{(1)} = \chi_j(\mu(\varepsilon t))\mu'(\varepsilon t). \tag{7}$$

Здесь $\chi_j(\mu)$ - некоторые поля на μ-пространстве параметров. Как мы увидим ниже, в нетривиальном случае эти поля непотенциальны.

Подставив (5) - (7) в (4), получим

$$y_j(t) \approx y_j(0)\exp\{\int_0^t \lambda_j^{(0)}(\mu(\varepsilon\tau))d\tau + \psi_j(l)\}, \tag{8}$$

где

$$\psi_j(l) = \int_0^t \chi_j(\mu(\varepsilon\tau))\ \mu'(\varepsilon\tau)d\tau = \int_l \chi_j(\mu)d\mu \tag{9}$$

- интеграл по времени от $\lambda_j^{(1)}$ сводится к контурному интегралу в μ-пространстве.

Заметим, что если поле $\chi_j(\mu)$ потенциально: $\chi_j(\mu)=\mathrm{grad}_\mu\varphi_j(\mu)$, то величина (9) является локальной

$$\psi_j = \varphi_j(\mu(\varepsilon t)) - \varphi_j(\mu(0))$$

и может быть сведена к нулю локальной заменой

$$y_j \to y_j\exp\{\varphi_j(\mu(0)) - \varphi_j(\mu(\varepsilon t))\}.$$

Поэтому, не ограничивая общности, мы рассматриваем только непотенциальные поля $\chi_j(\mu)$. В этом случае величины $\psi_j(l)$ нелокальны - они существенно зависят от геометрии контура l (то есть от предыстории системы) и по сути являются комплексными геометрическими фазами Берри [3].

3. Главные результаты

1. Показатели решений (8) определяют характеристические показатели уравнения

$$p_j(t) \equiv \ln(y_j(t)/y_j(0)) \approx \langle\lambda_j^{(0)}\rangle_t + \psi_j/t, \qquad (10)$$

где $\langle\lambda_j^{(0)}\rangle_t = 1/t \int_0^t \lambda_j^{(0)} d\tau$ - средние значения локальных собственных чисел. Второе слагаемое в (10), вообще говоря, не стремится к нулю при $t \to \infty$, так как геометрические фазы могут неограниченно расти даже при ограниченных вариациях параметров (например, если изображающая точка системы непрерывно циркулирует в μ - пространстве). Таким образом, геометрические фазы вместе с локальными собственными значениями определяют глобальный качественный портрет системы на больших временах $t \geq \varepsilon^{-1}$.

2. Оба слагаемых в (10) нелокальны и являются интегральными функционалами параметров. Локальные замены координат оставляют инвариантными собственные числа его матрицы $\lambda_j^{(0)}(\mu)$ и геометрические фазы (поля $\chi(\mu)$). Таким образом, локальные замены координат оставляют инвариантным глобальный качественный портрет системы, не влияя, в частности, на ее устойчивость. Напротив, используя интегральные замены координат, уравнение (2) всегда может быть приведено к тривиальной устойчивой гамильтоновой системе $\dot{y}=0$ (например, заменой $y_j \to y_j \exp\{-p_j(t)t\}$).

3. Если определять гамильтоновость системы как приводимость ее к канонической форме без изменений глобального качественного портрета, то упомянутый в первом разделе результат Биркгофа не будет иметь силы - предлагаемая им замена может оказаться нелокальной. Используемый функциональный подход позволяет решить задачу о гамильтоновости системы в таком случае. В частности, для осцилляторных систем (2) с чисто мнимыми текущими собственными значениями $\mathrm{Re}\lambda_j^{(0)}=0$ получается следующий асимптотический результат [1].

Множество гамильтоновых систем есть множество систем с чисто мнимой фазой Берри: $\mathrm{Re}\chi_j=0$*; оно же есть множество сильно устойчивых систем; оно же есть множество квантуемых систем.*

Заключение и перспективы

Предлагаемый функциональный подход к неавтономным динамическим системам имеет несколько преимуществ как уже используемых, так и перспективных.

- Геометрические фазы, являющиеся самостоятельным важным физическим эффектом, можно ввести только при функциональной постановке задачи (асимптотические решения адиабатической задачи во временной постановке (1) были известны задолго до введения фаз Берри).

• При этом геометрические фазы в адиабатических системах остаются обособленным и, в некотором смысле, экзотическим эффектом. Последовательный функциональный подход к решению задачи (2) позволяет показать, что комплексные геометрические фазы вместе с локальными собственными числами определяют глобальный качественный портрет системы и по сути являются вторыми членами в асимптотическом разложении характеристических показателей уравнения.

• Это, в свою очередь, позволяет связать теорию фаз Берри с общими вопросами теории неавтономных уравнений: устойчивостью, гамильтоновостью, квантованием. Полученные результаты показывают, что геометрические фазы часто играют определяющую роль при решении этих проблем. Они позволяют связать новым образом указанные общие проблемы не только с геометрическими фазами, но и, с их помощью, между собой (курсив в конце предыдущего раздела). Соответствующие теоремы доказаны в [1] только благодаря функциональному подходу.

• Важно, что при функциональном подходе выявляются тесные связи между локальными и глобальными характеристиками системы. Если во временном подходе малая окрестность неособой точки не может сообщить никакой глобальной информации о системе, то при функциональном подходе некоторые выводы о важных глобальных характеристиках системы (гамильтоновость и пр.) можно сделать.

• Отдельно отметим, что упоминавшаяся выше проблема определения гамильтоновости системы - малоизученная и представляющая интерес для математической физики задача [5]. Мы показали, что она может быть сформулирована по-разному в зависимости от функциональной или временной постановки задачи. Функциональный подход может помочь более эффективному ее решению.

• Наконец, функциональный подход к неавтономным динамическим системам открывает новые возможности для изучения резонансов и неустойчивостей систем, вызванных вариациями параметров. При временном подходе универсальным является язык преобразований Фурье и анализа резонансных компонент в спектре конкретной зависимости параметров от времени. При функциональном подходе анализ проводится сразу для широкого класса функций зависимостей параметров от времени с помощью изучения геометрических структур на пространстве параметров системы. Уже получены первые результаты в этом направлении [6, 7].

Функциональный подход представляется нам более перспективным в теории неавтономных систем. Все результаты, применения временного подхода также получаются и в функциональном, но благодаря применению последнего можно получить еще и другие важные результаты. Простота и лаконичность результатов, полученных для линейных адиабатических систем, позволяют надеяться на аналогичные результаты в более сложных (нелинейных и неадиабатических) случаях, ведь сама идея функционального подхода, очевидно, распространяется на общий случай неавтономной системы. Исходя из функционального подхода, можно последовательно пересмотреть многие основные понятия теории неавтономных систем - эти исследования еще впереди.

Библиографический список

1. *Bliokh K.Yu.* //J. Phys. A: Math. Gen. 2001 (to be published).
2. *Berry M.V.* // Proc. R. Soc. A. 1984. Vol. 392. P. 45.

3. *Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П.* // УФН. 1990. Т. 160. С. 6.

4. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат. 1941.

5. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995.

6. *Bliokh K.Yu.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. P. 2551.

7. *Блиох К.Ю., Усатенко О.В.* Двухмасштабный геометрический резонанс: от параметрического резонанса в осцилляторе до термодинамических циклов // Изв. вуз. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9, № 2. С. 92.

Радиоастрономический институт НАН Украины *Поступила в редакцию 12.01.01*

FUNCTIONAL APPROACH TO NON-AUTONOMOUS DYNAMIC SYSTEMS: BERRY PHASE AND PROBLEMS OF HAMILTONIANNESS, STRONG STABILITY, QUANTIZATION

K. Yu. Bliokh

Advantages and perspectives of applying the functional approach to non-autonomous dynamic systems are discussed. Characteristics of the system are assumed to depend on time indirectly, through arbitrary functions of parameters under this approach. Main results of functional approach application to linear adiabatic systems are demonstrated. They connect geometric Berry phases, problems of determining whether the system is Hamiltonian, quantization and strong stability.

Блиох Константин Юрьевич - родился в Харькове (1976), окончил физический факультет Харьковского государственного университета (1998). Учится в аспирантуре и работает в Радиоастрономическом институте НАН Украины. Область научных интересов - динамические системы с параметрами и их неустойчивости, волны в неоднородных средах, взаимодействия колебаний. Имеет 10 публикаций в отечественных и зарубежных журналах. E-mail: kostya@bliokh.kharkiv.com