Изв. вузов «ПНД», т.9, № 2, 2001 УДК 530.1

ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

В.М. Журавлев

С помощью метода обобщенных тождеств Лагранжа для сопряженных уравнений строится представление Лакса точно интегрируемой модели взаимодействия волн в непрерывном спектре в неоднородной среде. Проводится общий анализ полученных уравнений и способов их использования в теоретических и прикладных физических задачах нелинейных волновых процессов.

Точно интегрируемые модели резонансного взаимодействия волн в диспергирующей слабонелинейной среде (см. например, [1-4]) имеют широкое применение в различных прикладных задачах нелинейной оптики, теории плазмы, гидродинамики и т.д. (см. например, [2,5]). Типичная физическая задача, которая описывается такой моделью, это возбуждение волн на комбинационных частотах под воздействием нескольких (обычно не более 3) когерентных источников монохроматических волн в слабонелинейной (с квадратичной нелинейностью) среде. В реальности чаще приходится иметь дело с ситуацией, когда в нелинейной среде распространяется сигнал, имеющий непрерывный спектр, слабо эволюционирующий при прохождении сигнала через среду. В задаче о самофокусировке излучения такой подход использован в недавней работе [6]. Эволюция спектра в таких задачах, в частности, связана с тем, что в непрерывном спектре всегда существует бесконечно много компонент, которые связаны резонансными соотношениями для волновых чисел типа $k_1+k_2=k_3$. В результате возникает задача о том, при каких условиях динамика спектра оказывается точно интегрируемой, что можно рассматривать как условие устойчивости такого спектра по отношению к совместному действию дисперсионных эффектов и эффектов нелинейности.

Другой не менее важной проблемой, приводящей к аналогичной задаче, является проблема построения и исследования многомерных нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [7,8]. Формально, процедура построения представлений типа Лакса - Захарова - Шабата (ЛЗШ) на основе тождеств Лагранжа, предложенная в [3,4], позволяет строить такие представления для многомерных уравнений. Однако при этом возникают серьезные технические трудности, связанные с громоздкостью вычислений. Но, если от части координат избавиться с помощью преобразований Фурье-Лапласа, то соответствующие нелинейные уравнения сводятся к бесконечной (нумеруемой набором непрерывных параметров) совокупности нелинейных уравнений в размерности 1+1, для которой метод тождеств Лагранжа позволяет получить решение проблемы построения представления ЛЗШ в компактной форме.

В простейшем варианте обе сформулированные задачи эквивалентны исследованию на интегрируемость с помощью МОЗР следующей совокупности уравнений

$$\partial a_k/\partial t + v_k(x,t)\partial a_k/\partial x = \int_{-\infty}^{\infty} w_{kk'}(x,t)a_{k'}\,dk'. \qquad (1)$$

Здесь $a_k = a_k(x,t)$ - амплитуды Фурье распространяющегося в среде возмущения. В случае, если рассматривается задача о медленной эволюции Фурье-компонент возмущения в слабонелинейной среде, то x,t - «медленные» координаты, и полный волновой процесс получается обратным Фурье-преобразованием по «быстрым» координатам. В этом случае $v_k(x,t)$ - групповая скорость Фурье-компоненты с номером k. Если же система получается с помощью понижения координатной размерности, то полный волновой процесс представляется в виде

$$u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_k(x,t)e^{iky}dk, \qquad (2)$$

и $v_k(x,t)$ описывает дисперсию по дополнительной координате y. Подобный подход применен в работе [6]. В обоих случаях ядро $w_{kk'} = w_{kk'}(x,t)$ интегрального оператора в правой части уравнения (1) описывает взаимодействие отдельных Фурье-компонент возмущения или сигнала за счет нелинейности среды и, возможно, ее неоднородности.

Рассмотрим задачу описания всех моделей типа (1), определяемых функциями $v_k(x,t)$, $w_{kk'}(x,t)$, которые имеют представление ЛЗШ и, следовательно, интегрируются с помощью МОЗР. По аналогии с [3,4] применим для этого метод тождеств Лагранжа.

Для решения этой задачи совместно с уравнениями (1) рассмотрим сопряженную систему уравнений

$$-\partial\phi_k/\partial t - \partial/\partial x[v_k(x,t)\phi_k] = \int_{-\infty}^{\infty} w_{k'k}\phi_{k'}dk'. \qquad (3)$$

Здесь $\phi_k(x,t)$ - функции, сопряженные к функциям a_k. Умножая уравнения (1) на ϕ_k слева, а уравнения (3) на a_k справа, интегрируя их по k, и затем, вычитая полученные соотношения, приходим к обобщенному закону сохранения

$$\partial/\partial t\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k a_k dk + \partial/\partial x\int_{-\infty}^{\infty} v_k(x,t)\phi_k a_k dk = 0, \qquad (4)$$

который автоматически выполняется, если существует такая функция $\psi(x,t)$, что

$$\partial\psi/\partial x = -\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k a_k dk, \qquad \partial\psi/\partial t = \int_{-\infty}^{\infty} v_k(x,t)\phi_k a_k dk. \qquad (5)$$

Рассмотрим вспомогательную вектор-функцию $\Psi(\mathbf{k})=\mathrm{colon}(\psi,\phi_k)$ и дополнительно функции $b_{k,k'}(x,t)$ и $c_k(x,t)$ такие, что

$$\partial\phi_k/\partial x = \int_{-\infty}^{\infty} b_{kk'}\phi_k' dk' + c_k\psi. \qquad (6)$$

Тогда совокупность уравнений (3), (5) и (6) может быть представлена в виде двух интегро-дифференциальных уравнений относительно вектор-функции Ψ

$$\partial\Psi(\mathbf{k})/\partial x = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(k,k')\Psi(k')dk', \qquad \partial\Psi(\mathbf{k})/\partial t = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{V}(k,k')\Psi(k')dk', \qquad (7)$$

где $\mathbf{U}(k,k')$ и $\mathbf{V}(k,k')$ - две матрицы размерности 2×2, имеющие вид

$$\mathbb{U}(k,k',x,t) = \begin{pmatrix} 0 & a_{k'} \\ c_k\delta(k') & b_{kk'} \end{pmatrix},$$
$$\mathbb{V}(k,k',x,t) = \begin{pmatrix} 0 & v_{k'}a_{k'} \\ -v_k c_k\delta(k') & d_{kk'} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $d_{kk'}=-w_{k'k}-v_k b_{kk'}-v_{k,x}\delta(k-k')$, а $\delta(k)$ - δ-функция Дирака. Совокупность уравнений (3) и (5) содержит в себе исходную систему уравнений (1), поэтому соотношения (6), не вносящие никаких дополнительных ограничений на вид функций ϕ_k, ψ и a_k, приводят к тому, что вся совокупность уравнений (7) содержит в себе исходную систему уравнений (1). Условие совместности системы (7) может быть записано в форме обобщенного условия «нулевой кривизны» Захарова - Шабата [2]

$$\mathbf{U}(k,k')_{,t} - \mathbf{V}(k,k')_{,x} + \int_{-\infty}^{\infty}[\mathbf{U}(k,k''),\mathbf{V}(k'',k')]dk'' = 0, \tag{9}$$

где [,]-обычный матричный коммутатор. Условия (9) эквивалентны исходному уравнению и некоторому дополнительному набору уравнений на вспомогательные функции $b_{kk'}(x,t)$ и $c_k(x,t)$. Вид этих уравнений устанавливается с помощью явного вычисления условий (9). Таким образом, уравнения (7)-(9) образуют некоторый аналог представления Лакса исходной системы уравнений.

Согласно [3,4], чтобы (7)-(9) в точности являлись представлением Лакса, в матрицах (8) должен содержаться произвольный комплексный параметр λ, превращающий систему (7) в нетривиальную систему двух спектральных задач, от которого не зависят неизвестные функции a_k исходного уравнения. Эти условия выполняются, если предположить, что от λ линейно зависят вспомогательные функции $b_{kk'}$ и c_k, в простейшем случае только $b_{kk'}$. Поэтому полагаем

$$b_{kk'}(x,t) = P_k(x,t)\lambda\delta(k-k') + q_{kk'}, \tag{10}$$

где

$$q_{kk'}(x,t) = Q_{kk'}(x,t) + iR_k(x,t)\delta(k-k')$$

при условии, что $Q_{kk}=0$. Подстановка (10) в (9) приводит к следующему выражению для матрицы взаимодействия $w_{kk'}$

$$w_{kk'} = P_{k'}(v_k-v_{k'})/(P_k-P_{k'})[Q_{k'k} + iR_k(x,t)\delta(k-k')] + (iN_k - \partial v_k/\partial x)\delta_{kk'}$$

и системе уравнений относительно функций a_k и $Q_{kk'}$:

$$\partial a_k/\partial t + \partial(v_k(x,t)a_k)/\partial x + i(N_k+\nu_k)a_k = -i\int_{-\infty}^{\infty}(v_k-v_{k'})Q_{k'k}a_{k'}dk'/(P_k-P_k') \tag{11}$$

$$\partial/\partial t\, Q_{kk'} + \partial/\partial x[g_{k,k'}(x,t)Q_{kk'}] + \omega_k(v_{k'}-v_k)a_{k'}a^*_k+i(N_k-N_{k'})Q_{kk'} = -i\int_{-\infty}^{\infty}G_{k,k',k''}q_{kk''}q_{k''k'}dk'', \tag{12}$$

при дополнительной редукции $c_k=\omega_k a^*_k$. Здесь

$$g_{k,k'}(x,t) = (P_k v_k - P_{k'}v_{k'})/(P_k - P_{k'}),$$

$$G_{k,k',k''}(x,t) = [P_k(v_k - v_{k''})(P_{k''} - P_{k'}) - P_{k'}(v_{k''} - v_{k'})(P_k-P_{k''})]/(P_k - P_{k'}),$$

$$\nu_k(x,t) = \lim_{k\to k'}[P_k(v_k-v_{k'})R_{k'}(x,t)/(P_k-P_{k'})].$$

Кроме этого должны выполняться следующие соотношения

$$\partial/\partial t[R_k(x,t)] + \partial/\partial x[N_k(x,t)] = 0,$$

$$\partial/\partial t[P_k(x,t)] + \partial/\partial x[v_k(x,t)P_k(x,t)] = 0,$$

$$\omega_{k'}Q_{k'k} + Q^*_{kk'}\omega_k = 0.$$

Обратим внимание на то, что система явно содержит два различных класса полевых переменных: a_k и $Q_{kk'}$. Остальные функции описывают, условно, характеристики среды, в которой происходит движение.

Эти уравнения естественным образом переходят в хорошо известную точно интегрируемую систему $N(N+1)/2$ волн в случае

$$a_k(x,t) = i\sum_{m=1}^{N} A_m(x,t)\delta(k-k_m),$$

$$Q_{kk'}(x,t) = i\sum_{m,n=1}^{N} B_{mn}(x,t)\delta(k-k'-k_m+k_n)$$

и условии, что $B_{mn}=B^*_{nm}$, $m=1,\ldots,N$ и k_μ связаны резонансными соотношениями: $k_l-k_m+k_n=k_i$, для всех номеров l,n,m,i в диапазоне от 1 до N. Это решение представляет собой частное (дискретное) решение общей задачи о точно интегрируемой модели взаимодействия волн в непрерывном спектре. В представленной "непрерывной" форме записи резонансный характер взаимодействия, описываемый такой системой, выглядит гораздо естественней, нежели в поэлементной.

Отметим также еще одно свойство непрерывной записи. Именно, явное разбиение системы уравнений (11) на две подсистемы относительно функций a_k и $Q_{kk'}$ дает повод интерпретировать ее как систему, описывающую динамику «частиц» со свойствами, задаваемыми функциями a_k, взаимодействующих с «полем», которое описывается с помощью функции $Q_{kk'}$. Такая формулировка вполне согласуется с общей тенденцией в физике вводить в рассмотрение частицеподобные «квантовые» возбуждения типа фотонов, фононов и т.д. Это свойство системы просматривается уже в дискретном ее варианте для случая $N(N+1)/2$ волн. Компоненты, соответствующие частицам в односолитонном решении, описываются функциями типа солитонов $\mathrm{ch}^{-1}(x-ut)$, а соответствующие «модам» поля - функциями типа «кинков» $\mathrm{th}(x-ut)$.

Аналогичные свойства, по-видимому, сохраняются и в случае $N\to\infty$. Соответствующие формулы в компактной форме дают представление ЛЗШ для счетного набора гармоник. Использование МОЗР для такой счетной системы, по-видимому, не должно существенно усложнять построение решения. Интегрирование же этой системы в случае непрерывной зависимости от k всех функций в них с помощью МОЗР представляет собой отдельную проблему, решение которой здесь рассматривать нецелесообразно (в основном из-за недостатка места).

В заключение обратим внимание на следующие важные особенности построенной точно интегрируемой системы. Во-первых, эта система в непрерывном случае описывает распространение нелинейных волн в среде с произвольной дисперсией, что задается зависимостью групповых скоростей v_k от k. Фактически это означает, что, по-видимому, можно найти такие условия, что данная система после Фурье-преобразования вида

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} a_k(x,t)\exp(ikx-\Omega_k t)dk$$

при некоторых функциях Ω_k будет давать точное решение для всех других типов нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью МОЗР в размерности 1+1, например, КдВ и т.п. Эти условия должны быть связаны с выбором зависимости неизвестных функций a_k и $Q_{kk'}$ от параметров k и k'. Можно предположить, что такой подход даст возможность в более приемлемой с точки зрения физики форме, чем методы конечнозонного интегрирования (см. например, [2]), решить задачу о совместном описании солитонов и «радиационного фона», возникающего при взаимодействии солитонов с границами области, в которой происходит движение.

Во-вторых, можно также предположить, что такой подход дает «универсальное» представление интегрируемых с помощью МОЗР многомерных уравнений в размерности 1+2 и выше, о чем уже говорилось во вводной части данной статьи. Действительно, используя (2) при условии $v_k=k$, первое уравнение системы (1) можно преобразовать к виду

$$u_t - iu_{xy}= \int Q(x,t,y;y')u(x,t,y')dy'. \qquad (13)$$

Это уравнение описывает нелинейные волны в двумерном координатном пространстве с нелокальным в направлении координаты y взаимодействием. Это взаимодействие задается функцией

$$Q(x,t,y;y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{kk'}(x,t)\exp[i(ky-k'y')]dkdk',$$

для описания которой служит второе уравнение в (1), преобразующееся аналогично первому. Для того, чтобы получить системы в большей координатной размерности, достаточно ввести двух-, трех- и т.д. параметрическую нумерацию функций частиц и полей, то есть рассматривать уравнения (1) и (11) относительно $a_{k_1k_2k_3\ldots}$ и соответствующие Фурье-преобразования типа (2) по всем дополнительным параметрам.

В-третьих, рассмотренная система (1) имеет первый порядок по координатным производным, что соответствует в дискретных задачах линейной дисперсии. Однако в работе [4] была получена точно интегрируемая система взаимодействия $N(N+1)/2$ волн для случая квадратичной дисперсии среды. Рассмотренное непрерывное обобщение дискретной задачи возможно и в этом случае, и в случае более высоких порядков дисперсии среды. В связи с этим обратим внимание на то, что последнее уравнение (13) очень похоже на уравнение Шредингера. Точного соответствия можно добиться как раз при увеличении исходного порядка дисперсии до двух. Последнее может быть полезным при решении квантовых задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00260)

Библиографический список

1. *Захаров В.Е., Манаков С.В.*// ЖЭТФ. 1975. Т. 69, № 5. С. 1654.

2. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.

3. *Журавлев В.М.*// Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61, вып. 4. С. 254.

4. *Журавлев В.М.*// ЖЭТФ. 1996. Т. 110, № 6. С. 910.

5. *Сухоруков А.П.* Нелинейные волновые процессы взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988.

6. *Изъюров С.А., Козлов С.А.*// Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 71, вып. 11. С. 666.

7. *Захаров В.Е.* Метод обратной задачи рассеяния // Солитоны / Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. М.: Мир, 1983. 270 с.

8. *Захаров В.Е., Манаков С.В.* // Функц. анализ и его прил. 1985.Т. 19, вып. 2. С.11.

Ульяновский государственный университет
Институт теоретической физики

Поступила в редакцию 20.12.2000
после доработки 11.03.2001

EXACTLY INTEGRABLE MODELS OF THE WAVE INTERACTION WITH CONTINUOUS SPECTRUM

V.M. Zhuravlev

Interaction with a continuous spectrum in inhomogeneous media is constructed the Laks representation of exactly integrable model of the wave by the generalized Lagrange identities method for the conjugated equations. The general analysis of the obtained equations and ways of their use in theoretical and applied physical problems of non-linear wave processes are carried out.

Журавлев Виктор Михайлович - родился в Алма-Ате (1953). Окончил физический факультет Московского государственного университета (1976). После окончания МГУ работал в Морском гидрофизическом институте АН УССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГИ АН УССР (1987) в области физики взаимодействия атмосферы и океана. С 1992 года - преподаватель Ульяновского государственного университета. В настоящее время декан физико-технического факультета этого университета. Опубликовал более 80 научных статей по направлениям: физика взаимодействия атмосферы и океана, обработка данных, теория нелинейных волновых процессов, теория гравитации и космология. E-mail: zhuravl@sv.univen.ru