



ДВУХМАСШТАБНЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС: от параметрического резонанса в осцилляторе до термодинамических циклов

К.Ю. Блюх, О.В. Усатенко

Рассматривается влияние двухмасштабных изменений параметров на поведение различных динамических систем. Обнаружено возникновение параметрической неустойчивости, названной нами двухмасштабным геометрическим резонансом. Этот эффект может быть описан с помощью некоторых геометрических структур на расширенном фазовом пространстве; он обладает общими свойствами и описывается подобным образом в, казалось бы, совершенно непохожих системах. В статье предложены общие модели двухмасштабного геометрического резонанса и рассмотрены конкретные примеры: классический осциллятор, осциллятор Ван дер Поля и термодинамическая система с идеальным газом.

Введение

В последние годы физики и математики уделяют много внимания системам с иерархией эволюций. В движении таких систем можно выделить «быстрые» и «медленные» компоненты. С одной стороны, для анализа таких систем имеются традиционные асимптотические методы - метод усреднения, метод многих масштабов и т. п. (см., например, [1, 2]). С другой стороны, бурно развивающиеся геометрические методы математической физики позволили найти интересные и, возможно, более адекватные формы для описания систем с различными масштабами эволюций. На втором пути были обнаружены не замеченные ранее важные особенности поведения как классических, так и квантовых систем. Так, введенные в 80-х годах Берри и Ханнеем геометрические фазы сразу же стали неотъемлемой частью адиабатической теории систем с параметрами (см. обзор [3] и ссылки там). Появились и работы, демонстрирующие возможность возникновения параметрических неустойчивостей, связанных с геометрическими структурами и обладающих необычными «геометрическими» свойствами [4, 5].

В данной работе рассматривается явление параметрической неустойчивости, которая также возникает вследствие разделения масштабов эволюции и может быть описана в рамках некоторой геометрической структуры. Эта неустойчивость присутствует во многих динамических системах общего вида: от простейших, типа осциллятора, и до сложных статистических систем, типа газа частиц. Насколько нам известно, этот тип неустойчивости до сих пор не рассматривался как самостоятельный, и в отдельных примерах соответствующее ему изменение энергии системы рассчитывалось из других физических соображений и моделей.

Это, по-видимому, связано со следующим обстоятельством. Как отмечалось, до недавнего времени для анализа динамики неавтономных систем с параметрами использовались, в основном, различные асимптотические методы. При этом обычно сравниваются характерный обратный временной масштаб изменения параметров ϵ и характерный обратный масштаб изменения решений ω при постоянных значениях параметров. Хорошо известны два предельных случая соотношения этих величин: $\epsilon \ll \omega$ – адиабатическое приближение; $\epsilon \gg \omega$ – высокочастотное приближение. Иногда также можно построить точные решения для случая, когда зависимость параметров от времени является достаточно простой функцией (например, гармонической). При этом изменения параметров во времени снова имеют свой единственный характерный масштаб ϵ (в гармоническом случае – частоту), и возможно рассмотрение случая $\epsilon \sim \omega$.

Подобные методы обнаружили в физических системах общего положения только один, наиболее известный тип параметрической неустойчивости – *параметрический резонанс* (ПР), который наблюдается во всех осцилляторных системах. ПР возникает при периодической зависимости параметров от времени, причем период T должен быть равен одному из значений бесконечной дискретной последовательности, которая начинается в области, соответствующей $\epsilon \sim \omega$, и продолжается в область, соответствующую адиабатичности $\epsilon \ll \omega$. Зависимость инкремента ПР от периода изменений параметра во времени носит характер острых пиков с вершинами в точках резонансных периодов; высота этих пиков экспоненциально уменьшается с ростом периода (то есть в сторону уменьшения $\epsilon \sim T^{-1} \ll \omega$).

В данной работе в противоположность рассматривавшимся ранее *одномасштабным* изменениям параметров (с одним характерным масштабом) проведен анализ *двухмасштабных* изменений параметров. Под двухмасштабными мы понимаем осцилляции параметров, в которых на одном характерном периоде чередуются участки с большим и малым временным градиентом. То есть в пределах одной осцилляции параметра есть два характерных масштаба изменения: на одних участках параметры изменяются адиабатически ($\epsilon \ll \omega$), а на других – неадиабатически ($\epsilon \gg \omega$). Характерные виды двухмасштабных изменений параметров показаны на рис. 1. В общем случае (рис. 1, а) форма такой зависимости параметров от времени напоминает релаксационные колебания, также представляющие пример двухмасштабной зависимости (см., например, [6]). На рис. 1, б приведен предельный случай двухмасштабных вариаций параметров – участки постоянных значений параметров ($\epsilon = 0$) чередуются с их мгновенными скачками ($\epsilon = \infty$). Такие зависимости параметров от времени будем называть *предельно двухмасштабными*.

Известные асимптотические методы основываются на одном характерном масштабе изменения параметров и не применимы в данном случае¹. Оказывается, при непрерывном, даже не периодическом, двухмасштабном осцилляции параметров в системе общего вида возникает параметрическая неустойчивость. Мы будем называть ее *двухмасштабным геометрическим резонансом* (ДГР); смысл этого названия станет ясен ниже.

Возникновение ДГР обусловлено тем фактом, что эволюция системы различна при адиабатических и неадиабатических изменениях параметра. В

¹ При использовании метода разных масштабов можно рассматривать зависимость параметров от времени как комбинацию (например, сумму или произведение) двух компонент с разными масштабами. При этом может быть, что одна компонента меняется адиабатически, а другая осциллирует с высокой частотой, но каждая из них демонстрирует уже одномасштабную зависимость от времени. Однако рассматриваемая нами двухмасштабная зависимость не может быть представлена в виде комбинации двух одномасштабных компонент.

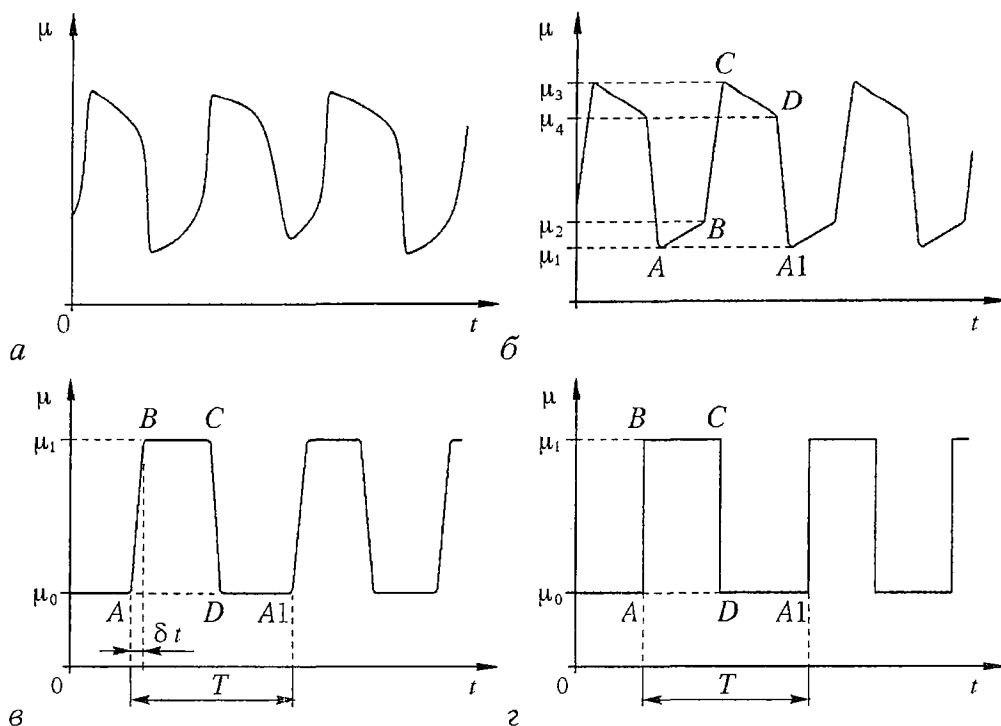


Рис. 1. Примеры двухмасштабных зависимостей $\mu(t)$: а – общий вид; б, в – различные схемы; z – «предельно двухмасштабный» случай

результате при проведении замкнутого цикла изменений параметра, в котором адиабатические изменения чередуются с неадиабатическими, возникает своего рода гистерезис и полная работа, совершаемая внешними силами при проведении такого цикла, отлична от нуля. Таким образом, при постоянных циклических двухмасштабных изменениях параметра в системах без потерь энергия будет все время неограниченно увеличиваться.

ДГР обладает свойством *геометричности*. Изменение энергии и инкремент неустойчивости не зависят от того, как именно изменялся параметр во времени (разумеется, в пределах сделанных предположений о двухмасштабном характере этих изменений), а определяются только значениями параметра в начальных и конечных точках его адиабатических и неадиабатических изменений. Изменение энергии при ДГР может быть представлено в виде контурного интеграла в некоторой параметро–энергетической плоскости; тогда очевидно, что изменение энергии не зависит явно от времени, а только от траектории изображающей точки системы в этой плоскости. Геометричность ДГР приводит к тому, что прирост энергии на одном двухмасштабном цикле зависит только от амплитуды изменения параметров и не зависит от времени совершения цикла. Это означает, что эффективный инкремент неустойчивости обратно пропорционален характерному периоду изменения параметров и не имеет «пиковой» резонансной зависимости².

² Полностью аналогичная ситуация реализуется и при *геометрической неустойчивости* (ГН), связанной с наличием в линейной осцилляторной системе комплексных фаз Берри [4]. Там речь идет об адиабатических изменениях нескольких независимых параметров. Изменение энергии при ГН зависит от геометрии пути изображающей точки системы в пространстве параметров и пропорционально площади, ограниченной соответствующим контуром. Однако ГН присутствует лишь в негамильтоновых осцилляторных системах и поэтому в физике может считаться скорее случаем исключительным [5].

Тем не менее, рассматриваемый здесь эффект ДГР мы назвали резонансом. Это связано с тем, что в простейшем предельном случае классического осциллятора с периодической зависимостью собственной частоты от времени ДГР переходит в обычный параметрический резонанс. Однако такой двухмасштабный параметрический резонанс существенно отличается от параметрического резонанса при гармонической зависимости собственной частоты от времени. Зоны неустойчивости одинаково плотно закрывают всю область $T \gg \omega$, а огибающая зависимости инкремента неустойчивости от периода T демонстрирует свойство геометричности – обратно пропорциональную зависимость (п. 2.2).

Возникновение гистерезиса, площадь которого равна совершаемой работе, наводит на мысль об аналогии с работой, совершаемой над идеальным газом при термодинамических циклах. И действительно, там имеем дело именно с двухмасштабным изменением параметра. Пусть дан идеальный газ в сосуде с поршнем; параметром является положение поршня или объем газа. Рассмотрим цикл, состоящий из происходящих поочередно изотермических и адиабатических (в термодинамическом понимании) процессов³. При адиабатическом процессе поршень перемещается быстро (характерное время движения поршня много меньше характерного времени теплообмена с окружающей средой). При изотермическом процессе поршень перемещается медленно, чтобы температура газа в каждый момент времени успевала сравняться с заданной температурой окружающей среды (характерное время движения много больше характерного времени теплообмена). При таком цикле энергия системы не растет, поскольку мы имеем дело с неконсервативной системой, отдающей свою энергию окружающей среде. Однако при постоянном проведении циклов работа, производимая внешним источником при движении поршня, растет неограниченно. Если подобные циклы проводить в замкнутой термодинамической системе, то энергия (температура) системы будет неограниченно расти, причем ее рост будет обладать всеми свойствами ДГР.

В данной статье даны общие обоснования эффекта ДГР (пп. 1.1, 1.2) и рассмотрен ряд характерных примеров динамических систем, в которых данный эффект может наблюдаться. Во всех из них обнаружен ДГР, который проявляет себя в разных случаях по-разному, но описывается подобным образом. В качестве простейшей линейной системы подробно рассмотрен классический осциллятор (пп. 2.1, 2.2). Далее рассматривается нелинейная система с предельным циклом – генератор Ван дер Поля (п. 3.1). Наконец, последовательные рассуждения приводят нас к обнаружению эффекта ДГР в идеальном газе (п. 3.2).

1. Общие модели эффекта

В этом разделе представлены две общего вида модели, которые объясняют эффект ДГР и его свойства в одномасштабных осцилляторных системах и двухмасштабных осцилляторных системах с медленной релаксацией. В следующих разделах рассмотрен ДГР на примерах конкретных физических систем и отмечены сходства и особенности возникновения ДГР в этих системах по сравнению с

³ При упоминании «адиабатического процесса» нужно быть внимательным, чтобы избежать путаницы. Адиабатический процесс в механике означает достаточно медленное изменение параметра. Адиабатический процесс в рассматриваемых термодинамических системах означает достаточно быстрое изменение параметра, чтобы система не успевала обмениваться энергией с окружающей средой, и в то же время достаточно медленное, чтобы успевало устанавливаться внутреннее равновесие.

предложенными здесь моделями. Общим местом всех рассуждений и основным условием возникновения ДГР является различие эволюции системы при разных характерных временных масштабах изменений параметра.

1.1. Одномасштабная система. Рассмотрим консервативную осцилляторную одномасштабную систему. Под одномасштабностью системы подразумеваем, что все ее собственные частоты являются величинами одного порядка, что позволяет традиционным образом различать адиабатические и неадиабатические изменения параметров. Пусть состояние этой системы характеризуется ее полной энергией E и значением некоторого вещественного энергоемкого параметра $\mu > 0$. Предположим, что при заданных начальных условиях и характере изменения параметра энергия системы определяется только текущим значением параметра. Например, при адиабатических изменениях параметра такую связь задает адиабатический инвариант системы. Тогда в общем виде можно записать дифференциал энергии системы при адиабатическом изменении параметра

$$dE|_{\text{ad}} = f_1(E_0, \mu_0, \mu) d\mu, \quad (1)$$

где E_0 и μ_0 - значения энергии и параметра, соответственно, в начале адиабатического изменения μ . По аналогии с (1) положим, что дифференциалу энергии при неадиабатическом изменении μ соответствует некоторая другая функция $f_2(E, \mu)$

$$dE|_{\text{nonad}} = f_2(E_0, \mu_0, \mu) d\mu, \quad (2)$$

где E_0 и μ_0 обозначают теперь значения энергии и параметра в начале неадиабатического изменения μ . Выражения (1) и (2) определяют два пересекающихся семейства кривых в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$. Кривые каждого семейства не пересекаются между собой и отличаются значениями начальных условий подобно фазовым траекториям системы.

Рассмотрим теперь изменение энергии системы при одном двухмасштабном цикле. Пусть он, например, соответствует циклу А-В-С-D-A1 на рис. 1, б. Если зависимость энергии системы от параметра и фазовых переменных и зависимость параметра от времени являются гладкими непрерывными функциями, то величина $dE/d\mu$ непрерывна при изменениях параметра. Конечные значения энергии и параметра для участка адиабатического изменения μ являются начальными для следующего за ним неадиабатического участка и так далее. Тогда изображение двухмасштабного цикла в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ качественно соответствует картине, представленной на рис. 2. Изменение энергии системы, произошедшее в результате этого цикла,

$$\Delta E = \oint dE = \int_1 (dE/d\mu) d\mu \neq 0. \quad (3)$$

Как видно, ΔE сводится к контурному интегралу в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ и по модулю равно площади, ограничиваемой контуром А-В-С-D-A1 на рис. 2. Этот контур не замкнут, поскольку в результате цикла энергия изменяется и изображающая точка системы при конечном значении параметра, равном начальному, попадает на кривую, отличную от начальной.

Знак изменения энергии зависит от направления движения по контуру. Поскольку при одном двухмасштабном цикле изменение энергии отлично от нуля, то при постоянном двухмасштабном изменении параметра энергия будет непрерывно уменьшаться или расти. В первом случае ($\Delta E < 0$) контур асимптотически приближается подобно спирали к отрезку на оси абсцисс μ (см.

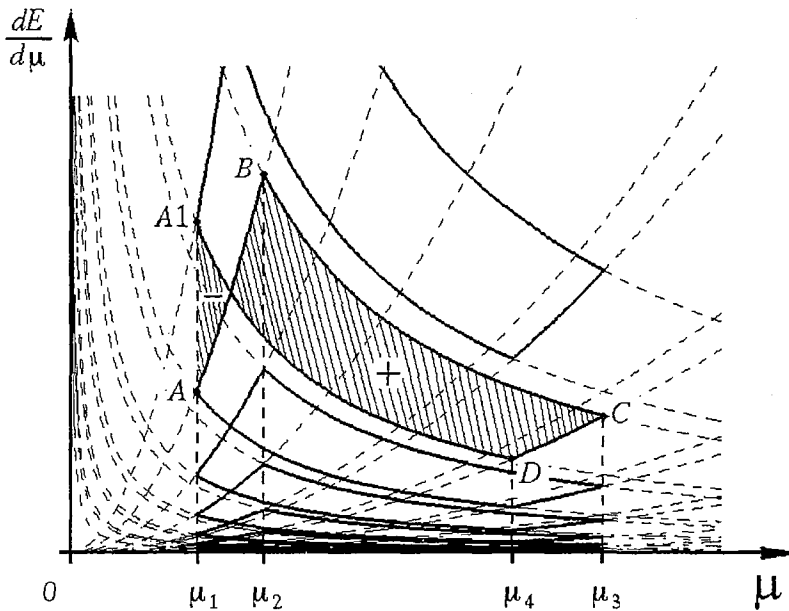


Рис. 2. Траектория изображающей точки абстрактной системы в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ при двухмасштабных вариациях параметра (сплошная линия). Штриховые параболы – кривые $f_1(E_0, \mu_0, \mu)$, а гиперболы – $f_2(E_0, \mu_0, \mu)$. Заштрихована площадь, ограниченная контуром, соответствующим одному двухмасштабному циклу А–В–С–D–А1 на рис. 1, б. Знаками «+» и «-» отмечены знаки ее вкладов в изменение энергии (3)

рис. 2), поскольку энергия системы должна быть ограничена снизу. Такое поведение контура соответствует тому, что

$$f_{1,2}(0, \mu_0, \mu) = \left. \frac{dE}{d\mu} \right|_{\substack{\text{ad, nonad} \\ E_0=0}} = 0. \quad (4)$$

Во втором случае ($\Delta E > 0$) движение происходит по тому же спиральному контуру в обратном направлении, он неограниченно расходится (см. рис. 2), и энергия системы, как будет видно из дальнейшего, экспоненциально растет.

Это и определяет неустойчивость системы – ДГР. Учитывая, что изменение энергии при ДГР определяется площадью контура в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$, которая не зависит явно от времени, несложно сформулировать основные геометрические свойства ДГР:

(I) приращение энергии на одном периоде изменений параметра не зависит от длительности периода, то есть инкремент на больших временах обратно пропорционален характерному периоду (под характерным периодом здесь понимается отношение полного времени к числу колебаний параметра);

(II) инкремент ДГР при малой амплитуде осцилляций параметра пропорционален квадрату этой амплитуды (так как площадь контура пропорциональна квадрату его линейного размера);

(III) рост энергии при ДГР не зависит (в отличие от ПР) от соотношения фаз изменения параметра и решений.

Важным следствием свойства (I) является то, что ДГР развивается как при периодических, так и при непериодических двухмасштабных вариациях параметров. Это делает его гораздо менее «чувствительным» к форме зависимости параметра от времени по сравнению с параметрическими резонансами.

Как уже отмечалось во введении, этими же свойствами обладает

геометрическая неустойчивость, при которой изменение энергии выражается контурным интегралом в пространстве нескольких параметров [4, 5].

1.2. Двухмасштабная система с релаксацией. Рассмотрим двухмасштабную систему, то есть систему, в эволюции которой присутствуют два характерных временных масштаба. Пусть система состоит из двух взаимодействующих частей: подсистемы 1 и подсистемы 2. Каждая из этих подсистем имеет осцилляторный характер движения с характерными временами одного порядка ω^{-1} . Пусть также в системе есть медленная релаксация энергии: энергия распределяется между подсистемами в некотором постоянном отношении (для простоты рассуждений считаем, что поровну). При этом характерное время релаксации $\tau \gg \omega^{-1}$. За характерное время эволюции системы принимаем большее из времен: τ . Тогда адиабатическими изменениями параметра системы будут изменения с характерным временем T

$$\tau \ll T. \quad (5)$$

Неадиабатическими назовем изменения параметра с характерным временем δt

$$\omega^{-1} \ll \delta t \ll \tau. \quad (6)$$

Как видно, неадиабатические для системы в целом изменения параметра являются адиабатическими для ее подсистем.

Рассмотрим двухмасштабный цикл из определенных таким образом адиабатических и неадиабатических изменений некоторого энергоемкого параметра подсистемы 1 (допустим, характерной частоты ее осцилляций). Считаем, что этот цикл соответствует циклу А-В-С-D-А1 на рис. 1, в. Состояния системы, соответствующие точкам А-А1, приведены в таблице (рис. 3). Пусть сначала (точка А на рис. 1, в) система находилась в равновесии, ее полная энергия была $E^{(A)}=E_0$, энергия каждой из подсистем - $E_0/2$. На участке А-В совершается неадиабатическое увеличение параметра в $\eta > 1$ раз. Это изменение адиабатично по колебаниям подсистемы 1, и существует некий адиабатический инвариант, который определяет изменение энергии этой подсистемы. Предположим для простоты, что этот адиабатический инвариант является таким же, как и для классического осциллятора: отношение энергии к частоте (значению нашего параметра) остается примерно постоянным. Тогда энергия подсистемы 1 увеличивается на участке А-В в η раз и становится равной $\eta E_0/2$. Энергия подсистемы 2 при этом не успевает измениться, так как время изменения параметра подсистемы 1 много меньше характерного времени обмена энергией между подсистемами. Полная энергия системы станет равна $E^{(B)}=(\eta+1)E_0/2$. Далее

Точка на рис. 1, в	Значения параметра	Энергия подсистемы 1	Энергия подсистемы 2	Полная энергия системы
А	μ_0	$(1/2)E_0$	$(1/2)E_0$	E_0
В	$\mu_1=\eta\mu_0$	$(\eta/2)E_0$	$(1/2)E_0$	$[(\eta+1)/2]E_0$
С	$\mu_1=\eta\mu_0$	$[(\eta+1)/4]E_0$	$[(\eta+1)/4]E_0$	$[(\eta+1)/2]E_0$
Д	μ_0	$[(\eta+1)/(4\eta)]E_0$	$[(\eta+1)/4]E_0$	$[(\eta+1)^2/(4\eta)]E_0$
А1	μ_0	$[(\eta+1)^2/(8\eta)]E_0$	$[(\eta+1)^2/(8\eta)]E_0$	$[(\eta+1)^2/(4\eta)]E_0$

Рис. 3. Таблица изменений значений параметра и энергии двухмасштабной системы с релаксацией, соответствующая циклу А-В-С-D-А1 на рис. 1, в

параметр претерпевает некоторое адиабатическое изменение. В простейшем случае его значение остается постоянным (участок В-С на рис. 1, в). В это время происходит релаксация и перераспределение энергии между двумя подсистемами. Поскольку полная энергия системы при этом не меняется, $E^{(C)} = (\eta+1)E_0/2$, энергия каждой подсистемы в точке С станет равна $(\eta+1)E_0/4$. Затем на участке С-Д параметр подсистемы 1 неадиабатически для всей системы (но адиабатически для подсистемы 1) уменьшается в η раз. Согласно нашей гипотезе об адиабатическом инварианте энергия подсистемы 1 при этом также уменьшается в η раз и в точке Д станет равна $(\eta+1)E_0/(4\eta)$. Энергия подсистемы 2 при этом не успевает измениться, а полная энергия будет равна $E^{(D)} = (\eta+1)E_0/(4\eta) + (\eta+1)E_0/4 = (\eta+1)^2E_0/(4\eta)$. И, наконец, на участке Д-А1 происходит равное распределение энергии между подсистемами без изменения полной энергии. В результате в точке А1 имеем: энергии подсистем равны $(\eta+1)^2E_0/(8\eta) > E_0/2$, полная энергия системы $E^{(A1)} = (\eta+1)^2E_0/(4\eta) > E_0$.

Таким образом, в результате двухмасштабного циклического изменения параметра полная энергия системы увеличилась в $(\eta+1)^2/(4\eta) > 1$ раз. Ясно, что при непрерывных двухмасштабных осцилляциях параметра энергия системы будет экспоненциально расти. Это и есть ДГР. Инкремент этого роста будет равен

$$\chi = \ln[(\eta+1)^2/(4\eta)]/T > 0, \quad (7)$$

где T - характерный период осцилляций параметра. Свойства (I)-(III) п. 1.1 также следуют непосредственно из (7) и проведенных здесь рассуждений. Свойство (II) имеет место при $\eta \rightarrow 1$. Действительно, полагая $\eta = 1 + \delta$, $\delta \ll 1$, из (7) получаем $\chi \approx \delta^2/(4T)$, что подтверждает сделанный выше вывод о пропорциональности инкремента квадрату малой амплитуды.

2. Простейшая одномасштабная система - классический осциллятор

Как известно, многие физические модели и теории, претендующие на некоторую общность, проверяются сначала на своего рода элементарном кирпичике теоретической физики - классическом осцилляторе. Наша работа не будет исключением.

2.1. Общий случай. Рассмотрим уравнение классического гармонического осциллятора

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (8)$$

в котором роль параметра играет собственная частота $\mu \equiv \omega$. Полная энергия осциллятора записывается в виде

$$E = (x'^2 + \omega^2 x^2)/2 \quad (9)$$

(массу осциллятора полагаем равной единице). Общим решением уравнения (8) при постоянной частоте является

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (10)$$

где a и φ - соответственно амплитуда и фаза решения, задаваемые начальными условиями задачи. Подставляя (10) в (9), получим

$$E = a^2 \omega^2 / 2. \quad (11)$$

Рассмотрим дифференциалы энергии осциллятора при адиабатическом и неадиабатическом изменениях параметра и сравним их с моделью п. 1.1.

Пусть частота в некотором интервале времени изменяется адиабатически, значения энергии и частоты в начале интервала – E_0 и ω_0 , соответственно. При адиабатических изменениях параметра в гамильтоновой осцилляторной системе сохраняется определенная комбинация амплитуды решения и значения параметра, называемая адиабатическим инвариантом (см., например, [1, 7]). В данном случае адиабатическим инвариантом является величина

$$I = E/\omega \approx E_0/\omega_0. \quad (12)$$

Из (12) запишем адиабатический дифференциал энергии в виде

$$dE|_{\text{ad}} = (E_0/\omega_0)d\omega. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь неадиабатическое изменение частоты осциллятора. Предположим, что оно происходит с бесконечным временным градиентом ($\varepsilon=\infty$), что соответствует скачку параметра. При этом мы должны гладко сшить решения до и после скачка. Условием сшивания является непрерывность значений x и x' . В результате изменение энергии (9) при скачке частоты будет равно

$$(E - E_0)|_{\text{nonad}} = x^2(\omega^2 - \omega_0^2)/2, \quad (14)$$

где E_0 и ω_0 – значения соответственно энергии и частоты в начале скачка. Тогда, используя (10) и (11), получим из (14)

$$E|_{\text{nonad}} = E_0[1 + (\omega^2 - \omega_0^2)\cos^2\varphi_0/\omega_0^2], \quad (15)$$

где φ_0 – значение фазы решения в момент скачка параметра. Дифференцируя теперь выражение (15), получим

$$dE|_{\text{nonad}} = (2E_0\omega/\omega_0^2)\cos^2\varphi_0 d\omega. \quad (16)$$

Заметим, что при неадиабатическом изменении частоты изменение энергии, зависит, в отличие от (2), не только от значений энергии и параметра, но еще и от фазы решения в момент скачка параметра. Тем не менее, адиабатический и неадиабатический дифференциалы энергии (13) и (16) имеют различный вид, как мы и предполагали в п. 1.1, и это определяет разницу адиабатической и неадиабатической эволюции системы. Выражения (13) и (16) описывают два семейства кривых в плоскости $(dE/d\omega, \omega)$: адиабатическим изменениям частоты соответствуют отрезки прямых, параллельных оси абсцисс; неадиабатическим – отрезки прямых, проходящих под разными углами через начало координат.

На самом деле для возникновения ДГР в адиабатических изменениях параметра нет необходимости. Подобно тому, как для неадиабатических изменений параметра мы рассматривали для простоты предельный случай мгновенного скачка ($\varepsilon=\infty$), положим, что адиабатические изменения параметра происходят предельно медленно, то есть с нулевой скоростью $\varepsilon=0$. Это означает просто постоянство параметра на любом конечном интервале адиабатических изменений (см. рис. 1, 2). Рассмотрим возникновение ДГР и инкремент решений осциллятора при таком «предельно двухмасштабном» изменении частоты.

Используя (15) и учитывая, что энергия системы не меняется при постоянном значении параметра, получаем выражение для энергии осциллятора после N двухмасштабных циклов

$$E_N = E_0 \prod_{i=1}^N [1 + (\omega_1^2 - \omega_0^2)\cos^2\varphi_i/\omega_0^2][1 + (\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos^2\varphi'_i/\omega_1^2], \quad (17)$$

где φ_i и φ'_i – фазы решения (10) в моменты скачков частоты соответственно от ω_0 к ω_1 и обратно. Значение энергии (17) существенно зависит от фаз решения в моменты скачков параметра. Однако, если мы рассматриваем ансамбль систем со случайными фазами или одну систему со случайными скачками параметра в течение достаточно долгого времени, то по фазам можно провести усреднение.

Как будет ясно из дальнейшего, в результате ДГР решение экспоненциально растет, поэтому усреднять по фазам надо логарифм энергии. Из (17) в результате усреднения по φ_i и φ' имеем

$$\langle \ln E_N/E_0 \rangle = 2N \ln[(\omega_0 + \omega_1)^2 / (4\omega_0\omega_1)], \quad (18)$$

где использовано тождество

$$\langle \ln(1 + \alpha \cos^2 x) \rangle \equiv 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \ln(1 + \alpha \cos^2 x) dx = 2 \ln\{[1 + (1 + \alpha)^{1/2}]/2\}.$$

Из (18) видно, что усредненный по фазам логарифм энергии линейно растет с числом двухмасштабных циклов. То есть энергия примерно экспоненциально растет со временем на интервалах, много больших времени одного цикла: $E \approx E_0 \exp(\chi t)$. Инкремент при этом равен

$$\chi = (2/T) \ln[(\omega_0 + \omega_1)^2 / (4\omega_0\omega_1)] = (2/T) \ln[1/(1 - A^2)] > 0, \quad (19)$$

где $T = t/N$ – средняя продолжительность одного двухмасштабного цикла. Здесь мы ввели относительную амплитуду модуляции параметра

$$A = (\omega_1 - \omega_0) / (\omega_1 + \omega_0) \in [0, 1). \quad (20)$$

Отметим, что выражение для инкремента ДГР в осцилляторе (19) с точностью до множителя 2 совпадает с формулой (7), полученной для совершенно другой системы. Свойства ДГР (I) и (II), сформулированные в п. 1.1, проверяются так же, как и для формулы (7). Свойство (III) при этом не корректно, так как мы рассматриваем систему со случайными фазами.

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования ДГР в классическом осцилляторе и их сопоставление с аналитическими результатами. На рис. 4, а показана двухмасштабная зависимость частоты от времени, с помощью которой моделировался ДГР. Характерные времена связаны соотношениями $\delta t \ll 2\pi/\omega \ll T$, разделяющими малое неадиабатическое время скачков и большое адиабатическое время среднего периода. Период двухмасштабного цикла имеет неопределенность $\delta T > 2\pi/\omega_0$, что позволяет считать фазы решений в моменты скачков параметров случайными. Рис. 4, б демонстрирует траекторию изображающей точки системы в плоскости $(dE/d\omega, \omega)$. Заштрихована площадь, ограниченная контуром, соответствующим одному двухмасштабному циклу изменения $\omega(t)$. Как и предполагалось в п. 1.1, траектория представляет собой разворачивающийся спиралевидный контур, площадь которого с каждым витком увеличивается (ср. с рис. 2). Неадиабатическим скачкам частоты соответствуют согласно (16) участки контура, близкие к отрезкам прямых, проходящих через начало координат. При постоянной частоте изображающая точка системы покоится, а на малых участках максимальной кривизны функции $\omega(t)$ (см. рис. 4, а), где осуществляется переход между адиабатическим и неадиабатическим приближениями изменения частоты, величина $dE/d\omega$ сильно меняется при практически неизменной частоте. Этим участкам соответствуют участки контура, близкие к отрезкам вертикальных прямых. (В случае предельно двухмасштабного цикла (см. рис. 1, з), когда переход между адиабатичностью и неадиабатичностью происходит в одной точке, контур в плоскости $(dE/d\omega, \omega)$ становится разрывным и

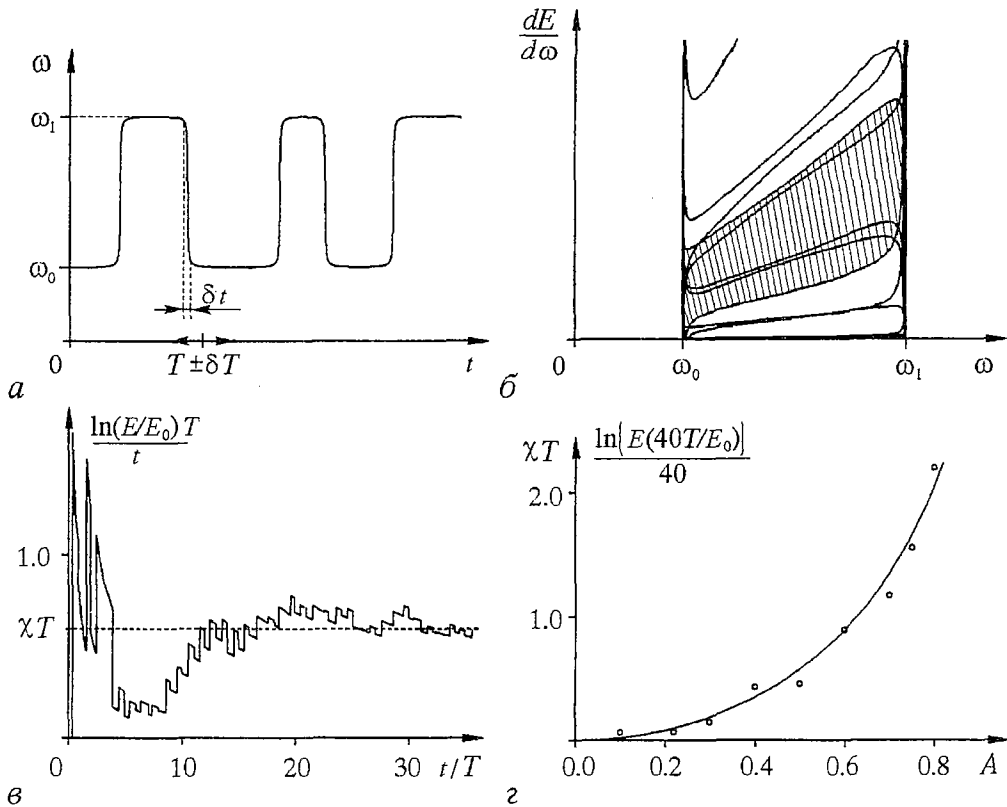


Рис. 4. Результаты численного моделирования ДГР в классическом осцилляторе

состоит только из отдельных отрезков прямых, проходящих через начало координат.) На рис. 4, в приведена зависимость эффективного инкремента роста энергии $\ln(E/E_0)/t$ от времени в безразмерных единицах периода T . Видно, что на временах порядка нескольких десятков периодов и больше эффективный инкремент близок к теоретическому, рассчитанному по формуле (19). Наконец, на рис. 4, г сравниваются зависимости теоретического инкремента (19) и эффективного инкремента роста энергии на сорока двухмасштабных периодах от относительной амплитуды модуляции параметра A . Видно, что формула (19) хорошо соответствует расчетам как при малых, так и при больших (когда A близко к единице) амплитудах. Отметим, что некоторые отклонения рассчитанных значений инкремента на рис. 4, в, г от теоретических (19) могут быть связаны с тем, что формула (19) получена в предположении случайности и равновероятности фаз решений при скачках параметра. При численном же моделировании обеспечивалась только случайность фаз, вероятность появления различных фаз имеет некоторую функцию распределения, отличную от константы.

2.2. Периодические двухмасштабные изменения параметра и переход к параметрическому резонансу. Как следует из предыдущего пункта, изменение энергии осциллятора при двухмасштабных вариациях частоты существенно зависит от соотношения фаз решения и изменения параметра. Мы оставили без внимания это свойство, считая эти соотношения случайными и проведя по ним усреднение. Если рассматривать строго периодические двухмасштабные изменения параметра, то соотношение фаз решения и параметра будут определенными. Тогда коэффициенты преобразования решений на одном периоде изменения частоты

(мультипликаторы) будут более сложным образом зависеть от амплитуды и периода изменений параметра.

Для описания такой ситуации по-прежнему рассматриваем «предельно двухмасштабные» изменения параметра (см. рис. 1, з), то есть мгновенные скачки частоты, между которыми она постоянна. В этом случае с помощью сшивания решений и их производных в моменты скачков частоты несложно найти мультипликаторы системы (эта задача решена, например, в [8])

$$\lambda_{1,2} = b \pm (b^2 - 1)^{1/2}, \quad (21)$$

$$b = \cos[(1+A)\tilde{\omega}T/2]\cos[(1-A)\tilde{\omega}T/2] - (1+A^2)/(1-A^2)\sin[(1+A)\tilde{\omega}T/2]\sin[(1-A)\tilde{\omega}T/2]. \quad (22)$$

Здесь использована относительная амплитуда A изменений параметра, введенная в (20); $\tilde{\omega}=(\omega_0+\omega_1)/2$ - средняя частота. Согласно теореме Флоке - Ляпунова, инкременты решений выражаются через мультипликаторы (21) как

$$\chi_{1,2} = (1/T)\ln|\lambda_{1,2}|. \quad (23)$$

Отсюда и из (21) видно, что решения будут обладать ненулевыми инкрементами при

$$|b| > 1. \quad (24)$$

Это условие, примененное к выражению (22), определяет области неустойчивости системы.

При малых амплитудах изменений параметра $A \ll 1$ из (22) получим

$$b \approx \cos\tilde{\omega}T + O(A^2).$$

Отсюда (см. (24)) заключаем, что неустойчивость может наблюдаться лишь вблизи

$$\tilde{\omega}T = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Таким образом, при малых амплитудах периодических двухмасштабных вариаций параметра неустойчивость представляет собой разновидность обычного параметрического резонанса. Однако по сравнению с классическим случаем параметрического резонанса, когда $\omega(t)$ является гармонической функцией, имеются и существенные отличия. Проиллюстрируем это несколькими рисунками.

На рис. 5 приведены области неустойчивости (они закрашены черным цветом) в полуполосе $(T, A) = (0, \infty) \otimes [0, 1]$ для рассмотренного случая предельно двухмасштабных изменений частоты (рис. 5, а, б) и случая гармонического параметрического резонанса, когда $\omega = \tilde{\omega}(1 + A \cos(2\pi t/T))$ (рис. 5, в, г).

При гармоническом параметрическом резонансе при фиксированной малой амплитуде A самой широкой является первая зона неустойчивости $T = \pi/\tilde{\omega}$, а с ростом периода T ширина зон экспоненциально убывает [14, 15]. При $T \rightarrow \infty$ отношение площади областей неустойчивости к полной площади полуполосы (T, A) стремится к нулю, $S_{inst}/S \approx 0$. Заметим, что при ДГР, когда нет фазовых соотношений, неустойчивость наблюдается при любых A и T , то есть $S_{inst}/S = 1$.

В случае периодических двухмасштабных изменений параметра ширина зон неустойчивости при фиксированной малой амплитуде не уменьшается с

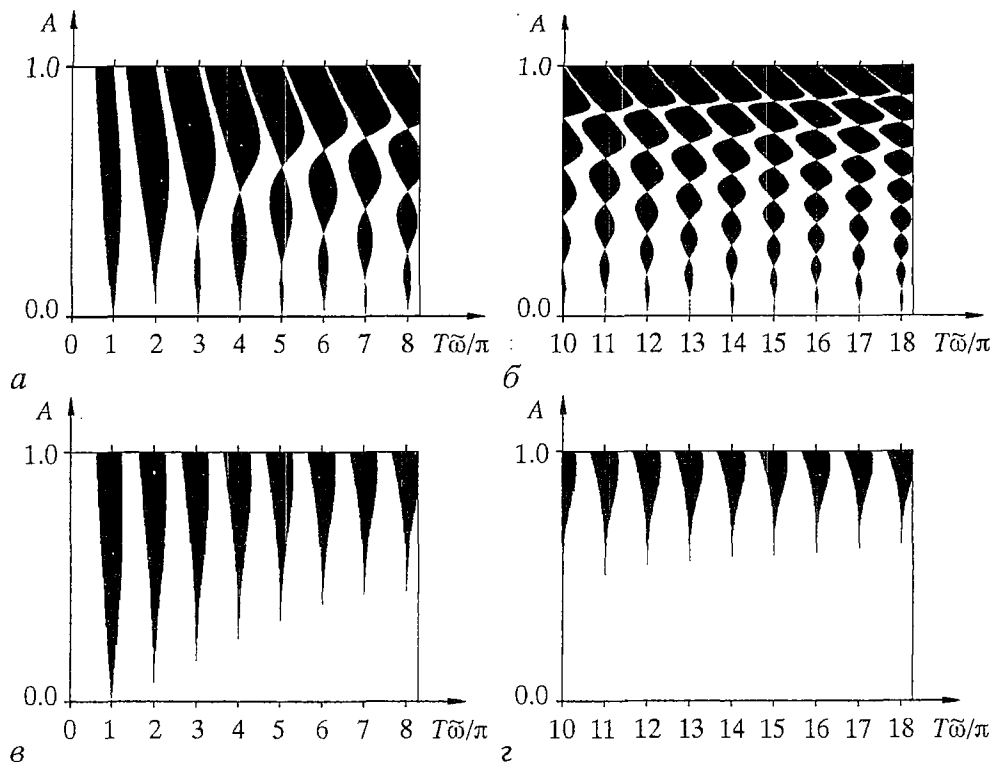


Рис. 5. Области неустойчивости классического осциллятора при периодических вариациях частоты: а, б - двухмасштабных; в, г - синусоидальных. По координатным осям отложены характеристики зависимости $\omega(t)$: по оси абсцисс - безразмерный период, где $\tilde{\omega}$ - среднее значение частоты; по оси ординат - безразмерная амплитуда $A \in [0,1)$

ростом периода (ширина нечетных зон $\Delta T \approx 2A/\tilde{\omega}$). Области неустойчивости изменяют свою форму, происходит перестройка их структуры, однако плотность, с которой они заполняют плоскость, остается примерно постоянной. Численно было найдено, что отношение площади областей неустойчивости к полной площади полуполосы (T, A) стремится к величине $S_{inst}/S \approx 0.44$.

Итак, плотность зон неустойчивости при периодических двухмасштабных вариациях частоты лежит между минимальным значением 0, соответствующим гармоническому параметрическому резонансу, и максимальным значением 1, соответствующим ДГР.

На рис. 6 показаны зависимости инкремента неустойчивости от периода при двухмасштабных и синусоидальных изменениях параметра для различных значений относительной амплитуды A . При синусоидальных вариациях частоты инкремент имеет резонансную пиковую структуру, огибающая которой экспоненциально уменьшается с ростом T (см., например, [15]). При двухмасштабных изменениях частоты зависимость произведения χT от периода T также имеет резонансную пиковую структуру, но с равными главными максимумами. То есть крупномасштабная огибающая этого графика ведет себя так, как было бы при ДГР: $\chi \sim T^{-1}$ - свойство геометричности (I) (см. п. 1.1).

Подытожим результаты проведенного выше сравнительного анализа плотностей зон неустойчивости и зависимостей инкремента от периода. Периодичность $\omega(t)$ обуславливает появление фазовых условий, которые приводят к резонансной структуре неустойчивости. Двухмасштабность $\omega(t)$ вызывает появление у нее геометрических свойств. В результате неустойчивость, возникающая при периодических двухмасштабных изменениях параметра, носит в

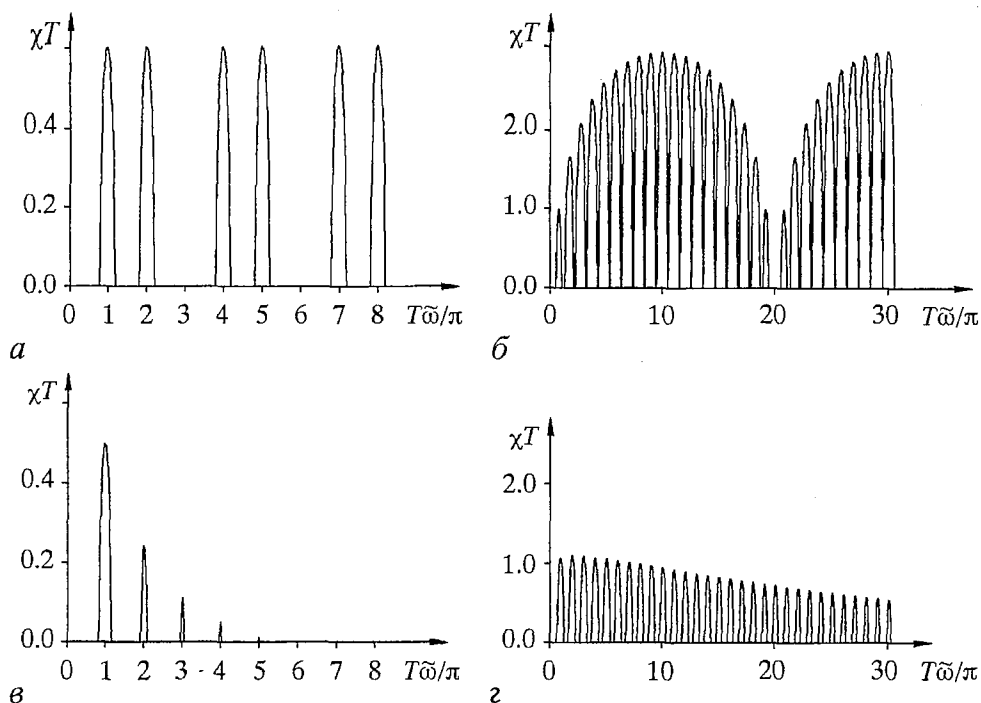


Рис. 6. Зависимости инкремента χ неустойчивости классического осциллятора от периода T вариаций частоты при двухмасштабных ($a, б$) и синусоидальных ($в, г$) зависимостях $\omega(t)$. Значение амплитуды A : $1/3$ ($a, в$); $9/10$ ($б, г$)

себе черты обоих явлений – гармонического параметрического резонанса и ДГР – и ее можно рассматривать как промежуточный случай между ними.

3. Двухмасштабные системы с релаксацией

В этом разделе рассмотрим проявления ДГР в системах с двумя характерными масштабами движения: быстрыми осцилляциями и медленной релаксацией. Покажем полную аналогию частных случаев с общей моделью п. 1.2 и увидим, что она описывает ДГР в таких различных системах, как нелинейный осциллятор и идеальный газ.

3.1. Уравнение Ван дер Поля. Простейшей двухмасштабной системой с релаксацией можно считать осциллятор с предельным циклом, описываемый уравнением Ван дер Поля

$$m\dot{x}'' - \beta\dot{x}' + \alpha x'^3 + kx = 0. \quad (26)$$

Заменой

$$y = (\beta/\sigma)^{1/2}x$$

уравнение (26) приводится к виду

$$y'' - \tau^{-1}(y' - y^3) + \omega^2 y = 0. \quad (27)$$

Здесь $\tau^{-1} = \beta/m$, $\omega^2 = k/m$. Асимптотическим решением уравнения (27) при $\tau^{-1} \rightarrow 0$ является (см., например, [2])

$$y \approx 2C \sin \omega t / [C^2 \omega^2 - (C^2 \omega^2 - 4)e^{-t/\tau}]^{1/2} + O(\tau^{-1}), \quad (28)$$

где C - константа интегрирования. Решение (28) содержит два движения с двумя разными масштабами: синусоидальные осцилляции с частотой ω и экспоненциальную релаксацию к предельному циклу с характерным временем τ . Полагаем

$$\tau \gg \omega^{-1},$$

тогда решение на предельном цикле при $C=2/\omega$ будет иметь вид

$$y^{(C)} = (2/\omega) \sin \omega t. \quad (29)$$

Предположим, что коэффициент k в исходном уравнении (26), а вместе с ним и частота ω в уравнении (27), совершают двухмасштабные осцилляции согласно модели п. 1.2 и рис. 1, в. То есть участки изменения частоты с характерным временем δt чередуются с участками, где частота постоянна в течение достаточно большого времени порядка T и для характерных времен выполнены условия (5) и (6).

Поскольку система с предельным циклом неконсервативна и ее энергия всегда стремится к постоянному значению на предельном цикле, мы не можем говорить об изменении энергии за счет двухмасштабных изменений параметра. Вместо этого подсчитаем работу, которую совершает над системой внешний источник, проводящий один двухмасштабный цикл изменения частоты.

Рассмотрим цикл А-В-С-D-A1 на рис. 1, в. Пусть вначале система находилась на предельном цикле, определяемом решением (29) с $\omega = \omega_0$. При скачке частоты на участке А-В благодаря соотношениям (6) можно пренебречь медленными релаксационными процессами и определить работу как изменение энергии обычного осциллятора при адиабатическом изменении частоты. Тогда, учитывая, что решение (29) имеет амплитуду $a=2/\omega$, из (11)-(13) получим

$$W_1 = \Delta E_1 = 2(\omega_1 - \omega_0)/\omega_0. \quad (30)$$

На следующем участке, В-С, система успевает благодаря (5) приблизиться к новому положению предельного цикла, определяемого решением (29) с $\omega = \omega_1$. Работа при этом, очевидно, не совершается. По аналогии с (30) вычисляется работа, совершаемая при скачке С-D,

$$W_2 = \Delta E_2 = 2(\omega_0 - \omega_1)/\omega_1. \quad (31)$$

На заключительном участке D-A1 система вновь релаксирует к исходному предельному циклу (29) с $\omega = \omega_0$. Полная энергия системы остается неизменной, а полная работа, совершенная внешним источником, изменявшим частоту системы, равна

$$W = W_1 + W_2 = 2(\omega_1 - \omega_0)^2 / (\omega_1 \omega_0) > 0. \quad (32)$$

Отметим, что работа, совершаемая при одном двухмасштабном цикле, не зависит от его периода. Кроме того, ввиду адиабатичности изменений частоты (второе неравенство (6)) совершаемая работа не зависит от фаз решения. Наконец, как несложно увидеть, при малых амплитудах осцилляций параметра работа (32) пропорциональна квадрату этой амплитуды. Налицо полная аналогия со свойствами геометричности (I)-(III) п. 1.1.

Этот результат можно трактовать в русле рассуждений, приведенных в п. 1.2, где рассматривались две релаксирующие подсистемы, составляющие одну консервативную систему. Предположим, что одна из подсистем - это конечная рассматриваемая система, а другая - бесконечно большая подсистема, *окружаю-*

щая среда. Тогда плотность энергии окружающей среды не меняется вследствие ее бесконечного размера, и энергия рассматриваемой системы всегда релаксирует к одному и тому же значению, определяющему равновесие с окружающей средой. В осцилляторе Ван дер Поля все происходит именно таким образом. Два средних члена уравнений (26), (27) описывают знакопеременное затухание, и предельный цикл определяет равновесие осциллятора с некоторыми внешними источниками энергии. Таким образом, можно говорить, что имеет место ДГР, выполнены все его свойства. Изменения же энергии мы не наблюдаем, потому что следим только за одной неконсервативной подсистемой, а полная система обладает бесконечно большой энергией.

Следующий пункт продемонстрирует правомочность и логичность такой трактовки результатов.

3.2 Идеальный газ. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 7. Сосуд, заполненный идеальным газом, разделен на две части перегородкой, пропускающей тепло и не пропускающей частицы газа. Число частиц в двух частях газа равно N_1 и N_2 . Объемы двух частей сосуда равны V_1 и V_2 , причем объем первой части можно изменять с помощью перемещающегося поршня: $V_1 = V_1(t)$. Эта величина является параметром.

Очевидна полная аналогия этой системы с системой, рассмотренной в п. 1.2. Двумя подсистемами являются части газа в двух частях сосуда. Осцилляторное движение подсистем представляет собой движение молекул газа между стенками и имеет в данном случае случайный характер. Характерное время пролета частицы между стенками равно $\omega^{-1} = L/v$, где L - расстояние между стенками, а v - среднее значение модуля скорости частиц. Ясно, что величина ω^{-1} изменяется вместе с изменением объема газа. Во-первых, изменяется расстояние между стенками, а во-вторых, изменяется температура и среднее значение модуля скорости частиц в соответствии с уравнением состояния идеального газа. Таким образом, изменяя параметр системы, мы как и раньше изменяем характерную частоту колебаний в подсистеме. Релаксацией между двумя подсистемами является теплообмен между частями газа через перегородку. При этом, как известно, устанавливается равное распределение плотности энергии. Характерное время теплообмена $\tau \gg \omega^{-1}$.

Вычислим изменение состояния рассматриваемой системы при двухмасштабном изменении параметра V_1 в соответствии с рис. 1, в. Характерные времена τ и T удовлетворяют условиям (5) и (6). На участках А-В и С-Д изменения объема V_1 можно пренебречь теплообменом и считать, что вторая часть газа не меняет своего состояния, а первая изменяет свои характеристики в соответствии с уравнением адиабатического (в термодинамическом смысле) процесса

$$\Theta_1 V_1^{\gamma-1} = \text{const}, \quad (33)$$

где Θ - температура газа, а γ - показатель адиабаты. Выражение (33) является одновременно и адиабатическим инвариантом в механическом смысле для подсистемы 1. На участках В-С и D-A1 постоянства объема V_1 происходит теплообмен и устанавливается тепловое равновесие между двумя частями газа. Начальные и конечные значения величин связываются с помощью закона сохранения энергии. Учитывая, что энергия газа $E \sim N\Theta$, получим

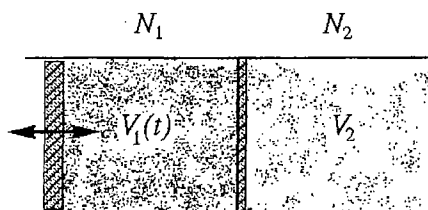


Рис. 7. Термодинамическая двухмасштабная система с релаксацией

$$N_1\Theta_1 + N_2\Theta_2 = \text{const.} \quad (34)$$

С помощью уравнений (33) и (34) для соответствующих участков процесса несложно получить значение температуры газа в конечной точке А1

$$\Theta^{(A1)} = \Theta^{(A)}[N_1N_2\eta^2 + (N_1^2 + N_2^2)\eta + N_1N_2]/[(N_1 + N_2)^2\eta] > \Theta^{(A)}. \quad (35)$$

Здесь $\Theta^{(A)}$ - начальная температура частей газа в точке А, $\eta = (V_{11}/V_{10})^{\gamma-1}$, а V_{10} и V_{11} соответственно минимальное и максимальное значения, между которыми изменяется параметр V_1 . При постоянных двухмасштабных осцилляциях объема V_1 температура системы будет экспоненциально расти с инкрементом

$$\chi = (1/T) \ln\{[N_1N_2\eta^2 + (N_1^2 + N_2^2)\eta + N_1N_2]/[(N_1 + N_2)^2\eta]\} > 0. \quad (36)$$

Очевидно, что мы имеем дело с ДГР и свойства (I)-(III) п. 1.1 несложно проверить, как и в предыдущих случаях. При $N_1 = N_2$ формула (36) совпадает с формулой (7), полученной в общей модели п. 1.2.

Рассмотрим другой предельный случай $N_2 \rightarrow \infty$. Тогда подсистема 2 играет роль бесконечной окружающей среды (мы говорили о таком подходе в конце предыдущего пункта). В этом случае температура (35) стремится к начальной, $\Theta^{(A1)} \rightarrow \Theta^{(A)}$, а инкремент (36) - к нулю, $\chi \rightarrow 0$. Это вполне понятно с физической точки зрения - температура есть полная энергия, деленная на полное число частиц, и при бесконечном числе частиц и конечных изменениях энергии ее изменение равно нулю. Тем не менее, полная энергия этой бесконечной системы все время растет. Подсчитаем работу, которую совершает за один двухмасштабный цикл внешний источник, изменяющий параметр V_1 . Она равна изменению полной энергии системы

$$W = \Delta E = (N_1 + N_2)(\Theta^{(A1)} - \Theta^{(A)}).$$

Подставляя (35), получим

$$W = \Delta E = [N_1N_2/(N_1 + N_2)]\Theta^{(A)}(\eta - 1)^2/\eta > 0. \quad (37)$$

При $N_2 \rightarrow \infty$ (37) принимает вид

$$W = \Delta E = N_1\Theta^{(A)}(\eta - 1)^2/\eta > 0. \quad (38)$$

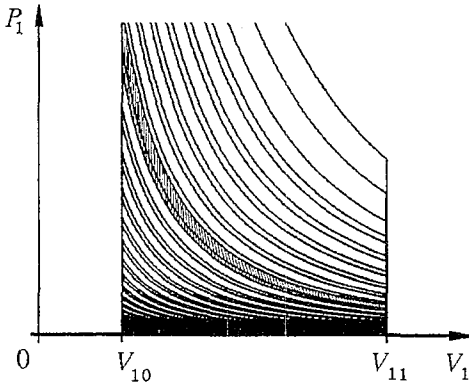


Рис. 8. Траектория изображающей точки термодинамической системы (рис. 7) в плоскости (P_1, V_1) . Движение происходит по спирали по часовой стрелке. Заштрихована площадь, ограниченная контуром, соответствующим одному двухмасштабному циклу изменения V_1

Видно, что эта формула с точностью до постоянного множителя совпадает с (32), полученной для осциллятора Ван дер Поля - системы, также находящейся в контакте с бесконечной окружающей средой. Заметим, что, поскольку при $N_2 \rightarrow \infty$ температура системы не меняется, $\Theta^{(A1)} = \Theta^{(A)}$, работа и полная энергия при непрерывных двухмасштабных осцилляциях параметра растут линейно во времени, а не экспоненциально.

В заключение приведем изображение рассмотренного процесса в плоскости (P_1, V_1) (рис. 8). Один двухмасштабный цикл состоит из двух адиабатических и двух изохорических

процессов. При конечном числе частиц двух частей газа контур, соответствующий одному двухмасштабному циклу, не замыкается и при дальнейших двухмасштабных осцилляциях разматывается спиральным образом (ср. с рис.2 и рис. 4, б). Работа и изменение энергии системы, как известно, равны $W = \Delta E = \int P dV$, то есть площади, ограниченной контуром в (P, V) -плоскости. В случае, когда одна из подсистем является бесконечной ($N_2 \rightarrow \infty$), контур, соответствующий одному двухмасштабному циклу, замыкается и в дальнейшем повторяет сам себя. Налицо полная аналогия с осцилляторными системами: моделью п. 1.1 (см. рис. 2) и классическим осциллятором (п. 2.1, рис. 4, б). Соответствие между плоскостью $(dE/d\mu, \mu)$ и (P, V) -плоскостью объясняет термодинамическое соотношение $P = -(\partial E / \partial V)_S$, где S - энтропия.

Заключение

Выше мы ввели понятие двухмасштабного геометрического резонанса как явления общего для динамических систем, привели ряд примеров и попытались создать общие модели для его описания. Является ли такой подход всего лишь новой формой описания уже известных явлений или за ним стоят более глубокие физические основания?

В пользу первого говорит то, что некоторые рассмотренные в статье задачи известны из других областей. Во-первых, уравнение осциллятора с периодическими скачками частоты (п. 2.2) хорошо известно в квантовой механике, физике твердого тела (модель Кронига - Пенни) [9-11] и оптике слоистых сред [12-14]. Оптические зоны непрозрачности и запрещенные зоны, получаемые в квантовой механике, являются зонами неустойчивости в нашем случае. Это связано с тем, что вместе с экспоненциально растущим всегда присутствует и экспоненциально затухающее решение, и в задачах с ограниченными решениями экспоненциально растущее решение отбрасывается как не удовлетворяющее граничным условиям. В оптике слоистых сред имеются и активные системы с пучками, в которых допускаются неограниченные решения и рассматриваемые зоны также являются зонами неустойчивости [17]. Для анализа этих задач применяются известные методы теории уравнений с периодическими коэффициентами. Во-вторых, уравнение осциллятора со случайными скачками частоты (п. 2.1) также использовалось для квантовой частицы и волновых возмущений в неоднородных средах. Отсюда известен эффект локализации Андерсона [18-20] - подобно тому, как мы отмечали экспоненциальный рост решений, в этом случае для волновой функции частицы оставляется решение с соответствующим экспоненциальным затуханием в пространстве: частица оказывается локализована. Эта задача решалась с помощью теории уравнений со случайными коэффициентами [21].

Задачи с двухмасштабным изменением параметра в осцилляторе Ван дер Поля (п. 3.1) и в системе с идеальным газом (п. 3.2), по-видимому, не рассматривались ранее. Кроме того, до сих пор не было предпосылок к рассмотрению приведенных задач в одном русле, сложно было найти между ними что-либо общее. Так же и методы, применяемые в одном типе задач, малоприспособны для другого. Вряд ли имеет смысл рассчитывать изменение температуры в несложной термодинамической системе с помощью методов теории уравнений со случайными коэффициентами и сравнивать результаты с решением уравнения осциллятора.

Между тем, общность рассмотренных задач несомненно имеет место. В этих задачах при подобных двухмасштабных вариациях энергоемкого параметра

решения обнаруживают экспоненциальный рост. Запишем эффективный инкремент (36) роста температуры в термодинамической системе в виде

$$\chi = (1/T) \ln\{1 + \xi/(\xi + 1)^2 (\eta - 1)^2/\eta\} > 0. \quad (39)$$

Напомним, что здесь T - характерный период изменения параметра $V_1^{\gamma-1}$, η - отношение максимальной на периоде величины параметра к минимальной, а $\xi = N_2/N_1$ - отношение чисел частиц в двух сосудах. Если положить $\xi=1$, то формула (39) с точностью до множителя 2 соответствует формуле (19) - инкременту ДГР в осцилляторе, где роль параметра η играет собственная частота ω . Если задать $\xi \rightarrow \infty$, то рассматривая работу, пропорциональную $N_1(\xi+1)(\exp(\chi T)-1)$, из (39) с точностью до постоянного множителя можно получить выражение (32), описывающее ДГР в осцилляторе Ван дер Поля (в этом случае роль одного из сосудов играет бесконечная окружающая среда).

Таким образом, в столь разных задачах неустойчивость при двухмасштабных изменениях параметра описывается фактически одной и той же формулой! А учитывая нетривиальный вид формулы (39), трудно допустить случайность такого совпадения. Это дает основание считать универсальной физическую природу эффекта. Она, по-видимому, связана с различием в эволюции систем при адиабатических и неадиабатических изменениях параметра. Мы предложили вариант описания ДГР в рамках некоторой геометрической структуры, возникающей на расширенном фазовом пространстве. Как в осцилляторе, так и в системе с идеальным газом изменение энергии при ДГР можно представить в виде контурного интеграла в плоскости $(dE/d\mu, \mu)$ и получить отсюда основные свойства (I)-(III) эффекта. В целом, предложенный нами формализм лежит в русле разнообразных геометрических методов, получивших широкое применение в теории динамических систем. Геометрический язык в теории резонансов и неустойчивостей представляет собой альтернативу формальному алгебраическому языку Фурье-компонент и, кажется, в некоторых случаях адекватнее отражает физическую суть явлений.

Можно надеяться, что введение понятия ДГР, с одной стороны, позволит по-новому взглянуть на многие задачи с параметрами, выявить структуры, определяющие их эволюции, а с другой стороны, поможет предсказать новые физические явления - возникновение неустойчивостей при двухмасштабных вариациях параметров в различных системах. В заключение отметим, что нам нигде не встречалось описание системы, рассмотренной в п. 3.2, где при ограниченных перемещениях поршня наблюдается неограниченный рост температуры. Возможно, такой недиссипативный механизм перевода механической энергии в тепловую представляет отдельный интерес.

Библиографический список

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
3. Веницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П. Топологические фазы в квантовой механике и поляризаационной оптике // УФН. 1990. Т. 160. С. 6.
4. Bliokh K.Yu. The appearance of a geometric-type instability in dynamic systems with adiabatically varying parameters // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. P. 2551.
5. Bliokh K.Yu. Geometric amplitude, adiabatic invariants, quantization and strong stability of Hamiltonian systems // J. Phys. A: Math. Gen. 2001 (to be published).
6. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
7. Бакай А.С., Степановский Ю.П. Адиабатические инварианты. Киев: Наукова думка, 1981.

8. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1980.
9. Kronig R. de L., Penney W.G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // Proc. Roy. Soc. A. (London). 1931. Vol. 103. P. 499.
10. Альбеверио С., Гестези Ф., Хезг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
11. Зеегер К. Физика полупроводников. М.: Мир, 1977.
12. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Издательство иностранной литературы, 1959.
13. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
14. Элаши Ш. Волны в активных и пассивных периодических структурах // ТИИЭР. 1976. Т. 64. С. 12.
15. Bell M. A note on Mathieu functions // Proceedings of the Glasgow Mathematical Association. 1957. Vol. 3. P. 132.
16. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая механика. М.: Наука, 1965.
17. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989.
18. Anderson P.W. Absence of diffusion in certain random lattices // Phys. Rev. 1958. Vol. 109. P. 1492.
19. Займан Дж. Модели беспорядка. М.: Мир, 1982.
20. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. Случайные и почти периодические самосопряженные операторы. М.: Наука, 1991.
21. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.

Радиоастрономический институт
НАН Украины,
Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию 30.11.2000

TWO-SCALE GEOMETRIC RESONANCE: from parametric resonance in oscillator to thermodynamic cycles

K.Yu. Bliokh, O.V. Usatenko

Influence of two-scale variations of parameters on the behavior of different dynamic systems is considered. Parametric instability is discovered under these conditions. We call it «two-scale geometric resonance». It can be described with the help of certain geometric structures on the extended phase space. Two-scale geometric resonance possesses similar properties and it is described in similar ways in seemingly absolutely different systems. General models are presented in the paper for the two-scale geometric resonance description and specific examples are considered: classical oscillator, Van der Pol oscillator and thermodynamic system with ideal gas.



Usatenko Oleg Viktorovich - родился в городе Валуйки (1946). Окончил физический факультет Харьковского государственного университета (1969). Работает на кафедре теоретической физики ХГУ, а с недавнего времени в Институте радиофизики и электроники НАН Украины. Защитил кандидатскую диссертацию «Длинноволновые возбуждения в металлах со сложной поверхностью Ферми» (1978). В 1984 - 1987 годах преподавал в университете Константины, Алжир. В 1994 - 1996 годах был приглашенным профессором университета Ниццы, Франция. Область научных интересов: нелинейная динамика и волны, динамические системы с адиабатически изменяющимися параметрами, спектры квазипериодических систем, физическая лингвистика, финансовые модели и эконофизика. Имеет более 40 публикаций.