



САМООРГАНИЗОВАННАЯ КРИТИЧНОСТЬ И АНАЛИЗ РИСКА

А.В. Подлазов

Обзор посвящен анализу катастрофического поведения, присущего многим сложным системам, с точки зрения теории самоорганизованной критичности. Эта теория сегодня является одной из наиболее быстро развивающихся областей нелинейной динамики.

Основное внимание уделено изложению и обобщению представлений теории самоорганизованной критичности, связанных с управлением риском. К их числу относятся явления фликкер-шума и прерванного равновесия, степенные законы распределения вероятностей и свойство целостности.

Введение

История человечества превращается в гонку между образованием и катастрофой.

Герберт Джордж Уэллс

Современное развитие нелинейной динамики связано с формированием новой парадигмы, которую можно определить как *парадигму сложности*. В сферу ее интересов попадают необратимо развивающиеся сложные системы (экономика, экология, общество, системы вооружений), объекты, способные к рефлексивному поведению (психика человека, рынки, наука, мораль) процессы в целостных многокомпонентных системах (земная кора, техносфера, биосфера).

Становление любой научной парадигмы связано с новыми областями приложения и новыми концептуальными представлениями. Как ни парадоксально это прозвучит, но, с точки зрения самой науки, первое сейчас значительно важнее второго. Дело даже не столько в том, что неприменение научных результатов является достаточным условием для уничтожения науки, сколько в стремительном нарастании разрыва между достигнутым пониманием в важнейших областях и неизменными способами принятия решений, связанных с рассматриваемыми в этих областях проблемами. Сейчас наступает этап, когда фундаментальная наука становится достаточно зрелой, чтобы рассуждать на темы, традиционно относимые к наукам гуманитарным или вообще не рассматриваемые как научные. Поэтому особенно важным становится социальный заказ. Для того, чтобы этот заказ был в должной мере осознан и в конечном счете удовлетворен, научное сообщество должно пройти свою часть пути, то есть выявить те задачи, решая которые, оно может послужить обществу, а не только себе.

Среди новых областей приложения нелинейной науки особое место занимает описание и прогноз катастроф и стихийных бедствий, объяснение их природы.

Будущее человечества непосредственно зависит от нашей способности соизмерять выгоды и опасность, понимать принципиальные ограничения наших возможностей и своевременно осознавать новые угрозы. Работы в этом направлении тесно связаны с концепцией *управления риском*, имеющей особенно большое значение для России. Обсуждение ряда ключевых идей в этой области уже было начато в литературе [1–4], в том числе на страницах ПНД [5].

Настоящая работа продолжает обсуждение проблем управления риском в формате своеобразной «заявки на социальный заказ». Это предопределило несколько необычную ее структуру. Поскольку статья носит обзорно-методический характер, многие излагаемые в ней факты могут оказаться известными читателю. Однако мы приводим их, поскольку только комплексное и всестороннее изучение вопроса позволяет довести его понимание до уровня элемента общего образования, то есть уровня, начиная с которого, возможно содержательное и продуктивное обсуждение конкретных проблем, равно как и осознание того, что эти проблемы действительно являются проблемами.

Статья также не содержит компактно сформулированных выводов. Они, напротив, распределены по тексту, чтобы позволить читателю взглянуть на конкретные подходы и модели с нескольких точек зрения, не потеряв за деревьями леса. Как нам представляется, это лучше способствует формированию единого контекста, пониманию того, что все описываемые явления и подходы взаимосвязаны.

Начнем издавека...

Представим, что перед неким исследователем, располагающим обширными, но несистематизированными данными различных научных дисциплин, поставлена задача выделить из них существенное для создания теории безопасности и риска и построить такую теорию. Какими соображениями он бы руководствовался?

Событие воспринимается нами как катастрофическое или опасное, только если оно оказывается либо *неожиданным* (то есть его не удастся предсказать), либо *экстраординарным* (то есть выделяется из ряда родственных ему событий), либо и то и другое сразу. В обоих случаях можно заключить, что система, порождающая это событие, является *сложной*¹, поскольку от простых систем естественно было бы ожидать прозрачности и предсказуемости, с одной стороны, и единообразного поведения – с другой.

Хотя строгого определения понятия сложности не существует, опыт развития синергетики и изучения конкретных систем, интуитивно определяемых нами как сложные, позволяет высказать некоторые общие соображения о свойствах любой сложной системы на разных уровнях описания.

- На *математическом* уровне сложность неразрывно связана с *нелинейностью* описания, поскольку к линейным системам применим принцип суперпозиции, позволяющий независимо рассматривать различные действующие факторы, части системы и т.п., что гарантирует ее простоту.

- На *физическом* уровне описание, как правило, возможно лишь в *статистических* терминах, как то: плотность вероятности, корреляция, ляпуновские показатели, математическое ожидание, дисперсия и т.п. Это происходит либо в силу характерного для многих нелинейных систем хаотического поведения, ограничивающего возможности детерминированного описания, либо в силу очень большого числа составляющих систему элементов, делающего такое описание бесполезным практически.

- На *философском* уровне наиболее существенным является осознание того

¹ Термин «сложность» имеет двоякий смысл. С одной стороны, его можно понимать как сложность устройства (complication), то есть наличие в некоторой системе большого числа элементов и/или нетривиальных связей между ними. А с другой стороны, речь может идти о сложности внешних проявлений системы (complexity) безотносительно ее внутреннего устройства, то есть о нетривиальном поведении. Хотя эти две «сложности» во многом взаимосвязаны, они не эквивалентны, и мы будем употреблять понятие «сложность» только во втором из упомянутых значений, если не оговорено обратное.

обстоятельства, что чем более изощрен и специфичен механизм некоторого явления, тем реже оно должно реализоваться. А поскольку практически все сколь-нибудь важное или интересное в природе так или иначе связано со сложностью, то лежащие в ее основе механизмы должны быть *просты* и *универсальны*.

Из сказанного следует, что поиск должен быть сосредоточен на *универсальных нелинейных механизмах, приводящих к сложному поведению, требующему статистического описания*. Разумно предположить, что универсальность внутреннего устройства влечет и сходство внешних проявлений. Поэтому здесь можно «зайти с черного хода» – обобщить данные об изученных сложных системах и попытаться на этом материале дать описание лежащих в их основе механизмов. Именно по этой схеме будет построено дальнейшее изложение. В разделе 1 рассматриваются универсальные внешние проявления сложности, раздел 2 посвящен теории самоорганизованной критичности как механизму возникновения сложности и, наконец, раздел 3 содержит обзор некоторых самоорганизованно критических моделей.

1. Универсальные проявления сложности

Наблюдение за деталями может быть интересным и увлекательным, но мы учимся на утверждениях общего характера.

Пер Бак

В нелинейной динамике до настоящего времени было разработано две парадигмы. В рамках первой было показано, что во многих открытых нелинейных системах вдали от равновесия происходит самоорганизация. При этом обычно возникают пространственно неоднородные стационарные (то есть не зависящие от времени) распределения переменных, которые И.Р. Пригожин предложил называть *диссипативными структурами* [6]. Либо возникают периодические или непериодические колебания, которые с легкой руки Р.В. Хохлова стали называть *автоволновыми процессами* [7].

При построении второй парадигмы основное внимание было уделено динамическому хаосу – сложному непериодическому поведению в простейших детерминированных системах (то есть в таких, где будущее однозначно определяется прошлым и настоящим и нет случайных факторов). Основным результатом этого периода стало установление факта пределов предсказуемости, то есть существование *горизонта прогноза* – конечного времени, через которое динамический прогноз поведения системы становится невозможен. Были также описаны универсальные сценарии перехода от простого движения к хаотическому при изменении внешнего параметра.

В основе обеих развитых парадигм лежат представления о самоорганизации, то есть о выделении из большого, а иногда бесконечного числа переменных, описывающих систему, небольшого числа величин, называемых параметрами порядка, к которым на больших временах подстраиваются остальные степени свободы системы. Это не совсем то, что нам нужно, поскольку для «склонных к катастрофам» систем весьма вероятно получение в «штатных» и «кризисных» ситуациях разных наборов параметров порядка, что не позволит описывать их с единых позиций. Как мы увидим далее, сложность предполагает наличие у системы свойств, отсутствующих у составляющих ее частей, то есть не только выделение параметров порядка из числа старых переменных, но и формирование в процессе самоорганизации новых.

Кроме того, обе парадигмы не вполне соответствуют интуитивным представлениям о катастрофичности – системы, где образуются стационарные или подвижные структуры, слишком регулярны, чтобы в них происходило что-то неожиданное, а хаотические системы слишком богаты событиями, чтобы на этом

фоне могло случаться что-то экстраординарное. То есть искать надо где-то на стыке существующих парадигм.

Ныне нелинейная динамика стоит на пороге выработки такой парадигмы, третьей по счету, которую обычно обозначают словосочетанием «жизнь на кромке хаоса» (хотя, на наш взгляд, более точной является высказанная С.П. Обуховым мысль о скольжении вдоль этой кромки [8]). Входящая в ее ядро *теория самоорганизованной критичности* (СК) ложится в рамки нашего плана, равно как и универсальные закономерности, которые эта теория призвана объяснить. Основными из них, непосредственно связанными с риском, являются *прерванное равновесие*, *фликкер-шум* и *степенные законы распределения*. Подробному описанию двух последних явлений и их взаимосвязи посвящены разделы настоящего параграфа. Сейчас же вкратце остановимся на прерванном равновесии.

Это явление, называемое также *переменяемостью*, заключается во вспышках высокой активности, прерывающих состояние относительного покоя, когда ее уровень низок или даже равен нулю. Причем в длительности интервалов между вспышками, а зачастую и в их амплитуде не прослеживается никаких явных правил. Прерванное равновесие характерно для многих областей, таких как биологическая эволюция [9], гидродинамика, сейсмология, экономика и др.

Несмотря на универсальность этого явления, до недавнего времени для него не существовало общей теории, хотя в рамках отдельных дисциплин оно либо получало частные объяснения (гидродинамика), либо воспринималось как данность (теория биологической эволюции). В то время как некая общность его конкретных проявлений – скажем, землетрясений и экономических кризисов – интуитивно ясна. И те, и другие происходят раз за разом, их пытаются с большим или меньшим успехом предсказывать, но каждый раз они валятся, как снег на голову, «будучи предсказуемыми в своей непредсказуемости».

1.1. Фликкер-шум. Одной из простейших характеристик динамических систем является *спектр мощности* – функция, показывающая, каким образом распределена по частотам их энергия. Динамика простых систем обыкновенно может быть описана *характерной частотой*, через которую легко выражаются характерные времена, длины и т.д. Для сложных систем типична обратная ситуация – отсутствие характерных частот (рис. 1). При этом спектр мощности имеет на низких частотах степенной вид

$$S(f) \sim f^{-\beta}, \quad (1)$$

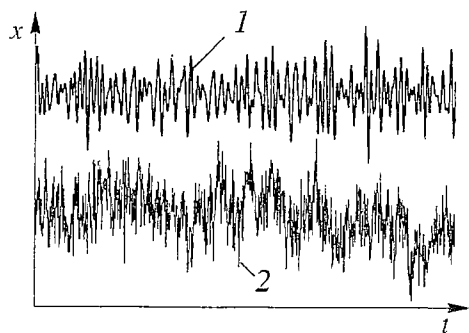


Рис. 1. Типичный вид сигнала с периодической составляющей и фликкер-шума. На верхнем графике, несмотря на высокий уровень помех и большое число кратных гармоник, легко прослеживается определенная регулярность сигнала и характерные частоты, в то время как на нижнем, соответствующем фликкер-шуму с $\beta=1$, их выделить не удастся

где $\beta \sim 1$. Зависимость вида (1) называется *фликкер-шумом*, или *1/f-шумом*, а также *розовым шумом* (последнее название обусловлено тем, что такой спектр мощности занимает промежуточное положение между *белым шумом* некоррелированного случайного процесса с $\beta=0$ и являющимся интегралом от него *коричневым шумом* броуновского движения с $\beta=2$). Явление фликкер-шума исключительно широко представлено в природе. Оно характерно практически для всех сложных систем как естественного, так и искусственного происхождения, и его примеры можно найти в самых разных областях – от биологии до астрофизики.

Спектр мощности вида (1) означает, что значительная часть энергии

связана с очень медленными процессами. Пользуясь метеорологической аналогией, можно сказать, что в таких системах нельзя предсказывать погоду, отвлекаясь от изменения климата. А долгосрочный прогноз невозможен в принципе. Сколько бы мы ни накапливали информацию о поведении системы, всегда найдутся важные процессы, которые начинают сказываться на временах, соизмеримых со временем изучения системы. То есть те процессы, которые еще просто не успели проявиться, но которые еще непременно преподнесут нам неприятные сюрпризы.

К системам с фликкер-шумом в принципе не применимы представления о периодической повторяемости событий. Это обстоятельство обусловлено тем, что в них нет одного характерного временного масштаба, который отвечал бы за «самые важные процессы». А поскольку именно наличие таких масштабов является обычным условием для успешного математического моделирования, то можно ожидать, что традиционные методы будут давать на таких системах сбой.

Наличие в системе фликкер-шума означает возможность гигантских флуктуаций, то есть внутренне присущую системе склонность к катастрофам. Это позволяет предположить, что она находится в окрестности *критической точки*, или *точки бифуркации*, где обычно и происходят такие явления.

Действительно, в точке бифуркации незначительный импульс может оказать радикальное воздействие на поведение системы, однако она, пройдя точку бифуркации, по логике вещей, должна в дальнейшем демонстрировать более регулярное поведение, описываемое вполне определенными характерными пространственными и временными масштабами. Поскольку на практике этого не происходит, должен существовать некий механизм, обеспечивающий постоянное пребывание системы в точке бифуркации. Природа этого механизма (как и следовало ожидать, простого и универсального) объясняется теорией самоорганизованной критичности.

Обратим внимание на те представления – условно назовем их классическими, – альтернативой которых является представление о фликкер-шуме. В линейных системах временная динамика может успешно описываться при помощи компонент фурье-спектра – *гармонических составляющих*, или *гармоник*. Принципиально то, что в таких системах каждой гармонической составляющей сигнала обычно удается приписать простой и ясный *физический смысл*, называя их фотонами, фононами, волнами, нотами и т.п. При этом независимость гармонических составляющих позволяет легко записывать уравнения для их амплитуд.

Частично такая ситуация сохраняется и при наличии слабых нелинейностей, которые управляют перетеканием энергии между разными гармониками и тоже допускают наглядную физическую трактовку (это и может, собственно, служить критерием, определяющим слабость нелинейности).

В существенно нелинейных системах, где и возникает фликкер-шум, ситуация в корне иная. Здесь для индивидуальных гармонических составляющих нельзя придумать какой-либо простой физической интерпретации. Имеет смысл рассматривать только весь фурье-спектр целиком, что обычно не позволяет почерпнуть сколь-нибудь существенную информацию о системе.

Наличие в системе фликкер-шума, эквивалентное отсутствию у нее характерных частот, с формально-математической точки зрения представляет собой следствие отсутствия характерных временных масштабов [10, 11]. То есть в его основе лежит не наличие неких новых эффектов, а скорее, отсутствие «старых». Это приводит к утрате некоторыми классическими понятиями физического содержания.

1.2. Степенные законы распределения вероятностей. Еще одной отличительной чертой многих сложных систем являются *степенные законы распределения вероятностей* (СЗРВ). То есть статистические характеристики происходящих в них событий обыкновенно имеют плотность вероятности вида

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad (2)$$

где показатель α обычно лежит в диапазоне от нуля до единицы. При статистическом описании катастроф и стихийных бедствий распределение (2) является правилом, практически не знающим исключений. В качестве классического примера можно привести закон Рихтера – Гутенберга: зависимость количества землетрясений от их энергии определяется формулой (2) с $\alpha \approx 2/3$ для землетрясений с магнитудой менее 7.5 и с $\alpha \approx 1$ для более сильных [13]. Точно так же распределены: относительная смертность² в результате землетрясений $\alpha \approx 0.25 \div 0.45$, ураганов $\alpha \approx 0.4 \div 0.6$, а также наводнений и торнадо $\alpha \approx 1.4$ [14]; число заболевших $\alpha \approx 0.29$ при эпидемиях в изолированных популяциях [15]; площадь лесных пожаров $\alpha \approx 0.59$ [16]; колебания биржевых индексов $\alpha \approx 1.40$ [17]; масса снежных лавин [18]. Степенное распределение имеют характеристики и многих других явлений, как связанных с катастрофами и риском, так и не имеющих к ним прямого отношения, например, динамики солнечных вспышек [18–21] или научной продуктивности исследователей (число публикаций) [22].

Степенные законы распределения представляют собой одну из отличительных черт сложности. Для простых систем наиболее типичны экспоненциальное

$$P(x) \sim \exp(-\lambda x) \quad (3)$$

и нормальное (гауссово)

$$P(x) \sim \exp[-(x-m)^2/(2\sigma^2)] \quad (4)$$

распределения (рис. 2). Первое описывает поведение «элементарных» объектов: в соответствии с формулой (3) распределены, например, телефонные разговоры по продолжительности или молекулы газа по энергии. Распределению (4) подчиняются величины, получающиеся при сложении большого числа независимых случайных слагаемых, поэтому для сложных систем (если понимать их как состоящие из большого числа элементов) можно было бы ожидать именно гауссовой статистики. Однако, как показывают приведенные выше примеры, это зачастую не так.

Разница между нормальным и степенным распределениями носит не формальный, а принципиальный характер. Если статистика системы описывается

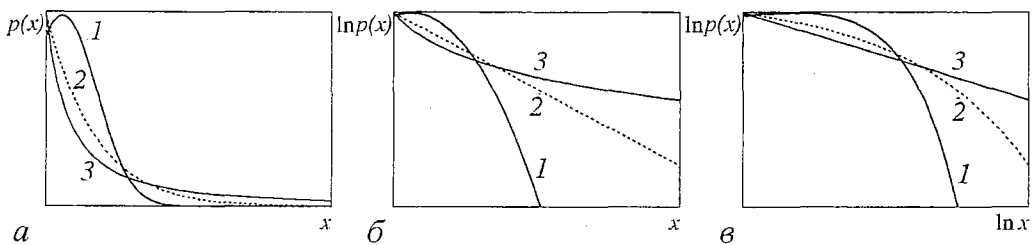


Рис. 2. Типичный вид плотности вероятности величин, распределенных в соответствии с нормальным (1), экспоненциальным (2) и степенным (3) законами, с различным представлением данных по осям. Кривые рис. а – позволяют сравнить скорость спада плотности вероятности для хвостов распределений; на рис. б – нормальное (1) и экспоненциальное (2) распределение представляются, соответственно, в виде параболы и прямой; на рис. в – вид прямой имеет степенной (3) закон распределения, что говорит о скейлинговом поведении, то есть об отсутствии выделенных масштабов при СЗРВ

² Под относительной смертностью понимается количество погибших в результате стихийного бедствия, деленное на численность населения страны на его момент.

формулой (4), то свыше 99.7% событий отклоняется от среднего значения m не более чем на 3σ (так называемое правило трех сигм), а, скажем, за 5σ выбивается и вовсе менее одного события на миллион. При этом появляется возможность «законно» пренебречь очень крупными событиями, считая их практически невероятными, то есть можно отрезать хвост распределения.

Статистика величин, описываемых распределением (2), отличается тем, что крупные события, приходящиеся на хвост распределения, происходят *недостаточно редко*, чтобы ими можно было пренебречь. По этой причине СЗРВ называют также *распределениями с тяжелыми хвостами*. Распределения вида (3) или (4), имеющие хвост, спадающий быстрее любой степени x , в этой связи уместно именовать *компактными*, подразумевая небольшую протяженность диапазона значений, принимаемых случайной величиной со сколь-нибудь значимой вероятностью.

В терминах оценки безопасности и риска хвост распределения соответствует так называемым *гипотетическим* авариям, возможность которых, как явствует уже из самого названия, на практике не учитывается. Наличие СЗРВ в корне подрывает вошедшие в плоть и кровь представления о надежности и риске. Эти представления базируются на явном, а чаще всего неявном, предположении, что серьезные неприятности происходят исключительно в результате неблагоприятного стечения ряда обстоятельств, то есть что любое крупное событие возникает как сумма большого числа мелких *независимых* событий, которая в силу центральной предельной теоремы нормально распределена [23]. На самом деле элементарные события в сложных системах не являются независимыми.

Природа степенных законов распределения (а в конечном итоге, и катастроф) связана с сильной взаимозависимостью происходящих событий. Но это даже не «эффект домино», когда упавшая костяшка с некоторой близкой к единице вероятностью сшибает следующую, та – еще одну и т.д. В этом случае распределение числа упавших костяшек имело бы вид (3) и все равно быстро бы убывало с ростом x . К возникновению СЗРВ приводит «цепная реакция», то есть лавинообразное нарастание возмущения с вовлечением в событие все большего количества ресурса.

Проиллюстрируем это на примере простейшего ветвящегося процесса. Предположим, что произошла вспышка инфекционного заболевания, при котором каждый заразившийся человек («частица» в терминах теории ветвящихся процессов) в течение дня может с вероятностью p умереть (распад частицы), с вероятностью p_0 выздороветь (исчезновение частицы) или с вероятностью p_i заразить еще $i-1$ человека, $i=1,2,\dots$ (сохранение частицы или ее деление на $2,3,\dots$ частицы). Очевидно, что здесь имеется положительная обратная связь, то есть чем больше людей инфицировано, тем больше их заразится в дальнейшем. Динамика болезни будет определяться коэффициентом размножения ветвящегося процесса $m=\sum_i i p_i$. Если $m \leq 1$, то вспышка рано или поздно угаснет [24], и можно показать, что вероятность v_j того, что к этому моменту умрет ровно j человек, при больших v_j дается формулой [24, 25]

$$v_j \sim j^{-3/2} \exp(-bj), \quad (5)$$

где зависимость коэффициента b от m определяется соотношением

$$b \sim (1 - m)^2. \quad (6)$$

При этом единичное значение коэффициента размножения соответствует *критическому ветвящемуся процессу*, описываемому формулой (2) с $\alpha=1/2$.

Описанный ветвящийся процесс можно проиллюстрировать еще одной задачей. Речь идет о нахождении времени *разорения азартного игрока*, играющего против казино в небезобидную игру, для которой вероятность проигрыша составляет p , а вероятность i -кратного выигрыша – p_i . Легко понять, что каждый проигрыш здесь соответствует смерти одного больного в рассмотренном примере,

а выигрыш – акту заражения новых людей. Распределение вероятностей времени (числа игр), в течение которого игрок, исходно имевший денег на одну ставку, наконец разорится (а при $m \leq 1$ это случится непременно), дается формулой (5). Таким образом, ввязавшись в игру с гарантированным проигрышем, можно весьма долго ощущать себя «на коне», что не меняет, однако, финала.

При m близком к единице ветвящиеся процессы могут порождать степенное распределение. Однако они не могут претендовать на удовлетворительное описание природы СЗРВ без объяснения, почему коэффициент размножения для самых разнообразных явлений оказывается именно таким. Поэтому подробное обсуждение вопроса о механизмах их возникновения мы отложим до раздела 2, посвященного теории самоорганизованной критичности, а сейчас подробнее остановимся на их свойствах. Здесь есть некоторые тонкости, связанные с различиями между чистой теорией и реальной физикой, поэтому математика и физика будут рассмотрены отдельно.

1.2.1. Математический аспект. Устойчивые распределения. В истории науки уже неоднократно случалось так, что теоретический аппарат, понадобившийся физикам, в том или ином виде уже давно был разработан математиками. Так произошло и со степенными законами распределения – в теории вероятности изучается класс так называемых *устойчивых распределений*, представляющих собой предельные законы для сумм независимых одинаково распределенных слагаемых. Он включает в себя как компактные распределения, так и распределения с тяжелыми хвостами.

Устойчивыми эти законы называют потому, что сумма любого числа случайных величин с некоторым устойчивым распределением после соответствующей перенормировки имеет то же самое распределение, что и каждое отдельное слагаемое:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a_n)/b_n \stackrel{d}{=} x_1 \quad (7)$$

(символ d над знаком равенства означает эквивалентность распределения вероятностей правой и левой частей). Обсуждая вопросы теории устойчивых распределений, мы будем следовать книгам [23, 26, 27].

Устойчивые распределения образуют четырехпараметрическое семейство функций $p(x) = g(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda)$, которые за исключением нескольких частных случаев (формулы (8), (10) и (11) – см. ниже) не выражаются через элементарные функции. Масштабный параметр $\lambda > 0$ и параметр неслучайного сдвига γ соответствуют линейному преобразованию координат

$$g(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \lambda^{-1/\alpha} g(\lambda^{-1/\alpha}(x - \gamma); \alpha, \beta, 0, 1),$$

где γ' зависит от β , γ и α (причем $\gamma' = \gamma$ при $\alpha \neq 1$). Параметр формы β , ограниченный по модулю единицей, задает асимметрию функции распределения (при отрицательных значениях параметра она скошена влево, при положительных – вправо). Параметр α управляет асимптотикой распределения и может принимать значения в интервале $0 < \alpha \leq 2$. При $\alpha = 2$ (и любых β) получается нормальное распределение (4)

$$g(x; 2, \beta, \gamma, \lambda) = \exp[-(x - \gamma)^2 / (4\lambda)] / (4\pi\lambda)^{1/2}, \quad (8)$$

а при $\alpha < 2$ (если $\beta \neq -1$) распределение имеет степенную асимптотику при $x \rightarrow \infty$

$$g(x; \alpha, \beta, \gamma, \lambda) \sim x^{-(1+\alpha)},$$

то есть его хвост описывается формулой (2).

Таким образом, распределения с тяжелыми хвостами являются не альтернативой нормального распределения, а его естественным дополнением. Если

сумма независимых случайных величин после линейной перенормировки $(x_1+x_2+\dots+x_n-a_n)/b_n$ сходится к какому-либо закону, то он принадлежит к семейству устойчивых законов, причем константы a_n и b_n определяются однозначно и выполнено соотношение

$$b_n = n^{1/\alpha}. \quad (9)$$

При этом нормальному распределению, для которого существуют все статистические моменты, соответствует лишь одно значение $\alpha=2$, а все остальные дают распределения, имеющие бесконечный второй момент, а следовательно, и дисперсию.

Помимо бесконечной дисперсии степенное распределение имеет при $\alpha \leq 1$ бесконечное математическое ожидание $E x$. Случай $\alpha < 1$ интересен также и тем, что в силу (9) нормировочная постоянная b_n растет быстрее, чем n . То есть закон больших чисел становится неприменим. Особенно любопытно эта ситуация выглядит при пограничном значении $\alpha=1$, дающем в случае $\beta=0$ распределение Коши

$$g(x;1,0,\gamma,\lambda) = \lambda \{ \pi [\lambda^2 + (x - \gamma)^2] \}^{-1}, \quad (10)$$

для которого $b_n=n$, и если выбрать $\gamma=0$, то будет $a_n=0$ и получится, что

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \stackrel{d}{=} x_1.$$

То есть вопреки привычным ожиданиям сходимости выборочного среднего к среднему по ансамблю, это выборочное среднее оказывается распределено в точности так же, как одно слагаемое. Иначе говоря, мы усредняем наблюдаемые величины, чтобы получить какое-то среднее значение, но остаемся с тем же разбросом, что и до усреднения!

Очевидно, что нормировка будет еще больше для меньших значений α . Например, для распределения Леви

$$g(x;1/2,1,\gamma,\lambda) = \theta(x-\gamma)\lambda x^{-3/2} \exp[-\lambda^2/(4(x-\gamma))]/(2\pi^{1/2}) \quad (11)$$

$b_n=n^2$, то есть получается, что сумма одинаково распределенных слагаемых растет как квадрат их числа.

Применительно к описанию катастроф и бедствий это означает, что из-за степенного вида законов распределения должен наблюдаться нелинейный, все более *ускоряющийся* рост суммарного ущерба со временем. Этот результат производит шокирующее впечатление, и его иногда ошибочно воспринимают как свидетельство нестационарности процесса. Это, конечно же, не так. Просто по мере увеличения числа зарегистрированных событий n их выборочное среднее $(x_1+x_2+\dots+x_n)/n$ стремится к математическому ожиданию, а оно при $\alpha < 1$ бесконечно. Нелинейное и ускоряющееся со временем нарастание суммарного ущерба также перестает казаться парадоксальным, если учесть, что из-за катастрофического поведения определяющее влияние на его значение оказывает величина ущерба от крупнейшего события. Можно показать, что при $\alpha < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = 1/(1-\alpha),$$

то есть в сумму случайных величин, распределение которых имеет хвост вида (2) с $\alpha < 1$, с точностью до коэффициента вклад вносит лишь максимальное слагаемое (в то время как для величин с конечным средним вклад любого отдельного слагаемого в сумму стремится к нулю).

Диапазон значений показателя от нуля до единицы выделен еще благодаря одному обстоятельству. Такие величины, как ущерб от катастрофы, энергия землетрясения и другие характеристики, описывающие сложные системы, как

правило, неотрицательны. Поэтому носитель распределения должен быть ограничен слева. Для устойчивых законов это имеет место лишь при $\alpha < 1$ и $\beta = 1$.

1.2.2. Физический аспект. Масштаб и математическое ожидание.

Изложенные выше результаты теории устойчивых распределений не проливают свет на механизм возникновения СЗРВ. В самом деле, если слагаемые имеют конечную дисперсию, то в силу центральной предельной теоремы предельное распределение будет нормальным, что соответствует устойчивому закону с $\alpha = 2$. А чтобы получить меньшие значения α , необходимо складывать величины с бесконечной дисперсией, то есть уже имеющие степенной хвост.

Кроме того, как мы увидим ниже, сами по себе устойчивые распределения не очень хороши для практического описания сложных систем, так как представляют собой математическую идеализацию. Тем не менее, приведенные результаты дают общее представление о довольно непривычных свойствах степенных законов распределения и даже позволяют в некоторых случаях определять их показатели на основе общих соображений.

Продемонстрируем это на конкретном примере. Энергия землетрясения E пропорциональна произведению площади разлома S и смещения пластов ΔL . Для не очень сильных землетрясений, не достигающих дна земной коры, $S \sim L^2$, где L – линейная протяженность разлома. Кроме того, в силу закона Гука³ $\Delta L \sim L$. Отсюда находим, что [12, 13]

$$E(S) \sim S^{3/2}. \quad (12)$$

Разобьем площадь разлома S на n участков равной площади и предположим, что каждый из них вносит независимый вклад в энергию землетрясения, то есть что

$$E_1(S/n) + E_2(S/n) + \dots + E_n(S/n) \stackrel{d}{=} E_1(S). \quad (13)$$

Применение соотношения (12) к левой и правой частям формулы (13) дает

$$(S/n)^{3/2}(E_1(1) + E_2(1) + \dots + E_n(1)) \stackrel{d}{=} S^{3/2} E_1(1),$$

откуда в силу формул (7) и (9) немедленно получаем для энергии устойчивое распределение с $\alpha = 2/3$.

Для сильных землетрясений соответствующие формулы имеют вид $S \sim LH$ и $\Delta L \sim H$, где $H \ll L$ – толщина коры, и соотношение (12) запишется как $E \sim S$, откуда получается единичное значение α .

К сожалению, несмотря на всю привлекательность и простоту приведенных выкладок, здесь есть скрытый порочный круг. Записывая соотношение (13), мы неявно предполагаем масштабную инвариантность сейсмичности, то есть то, что землетрясения «устроены одинаково» вне зависимости от энергии и площади разлома. Иначе говоря, мы изначально предполагаем отсутствие характерных масштабов, что означает степенной закон распределения. Хотя это предположение само по себе является нетривиальным и нуждается в объяснении и доказательстве, на уровне феноменологической теории можно считать его экспериментальным фактом, а приведенный вывод – исчерпывающим.

Есть еще одно весьма существенное обстоятельство, отличающее чистую теорию от практики. Очевидно, что в природе никакое явление не может характеризоваться бесконечными значениями среднего или дисперсии. Поэтому ясно, что степенные зависимости вида (2) приближительны и должны нарушаться при очень больших значениях аргумента. То есть степенное спадание плотности

³ Значение $\Delta L = F/k$, где коэффициент жесткости $k \sim 1/L$, а F – сила, при которой начинается проскальзывание пластов. Поскольку их «держит» самый слабый участок, F можно считать не зависящим от L .

вероятности соответствует средней асимптотике, и вместо тяжелых хвостов на практике должны иметь место «полутяжелые»

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)} f(x/x_c), \quad (14)$$

где скейлинговая функция $f(y)$ приблизительно постоянна при $y \sim 1$ и быстро убывает при $y \rightarrow \infty$. При этом «тяжесть хвоста» переносится в область промежуточных значений x . Строго говоря, чисто степенная зависимость нарушается и при $x \rightarrow 0$, так как иначе распределение (14) не будет нормируемым, однако то, как конкретно это происходит, не существенно при анализе крупных событий.

Замена формулы (2) на (14) при переходе от идеальных СЗРВ к реальным имеет одно весьма неожиданное качественное следствие. Естественно предположить, что введенное обрезание степенного хвоста делает бесконечное математическое ожидание конечным, но очень большим. Однако вопреки интуитивным представлениям для распределения (14) математическое ожидание *чрезвычайно мало* по сравнению с крупными событиями, которые могут происходить в системе. Оно не несет никакой информации о катастрофах, которые потому и катастрофы, что оказались намного крупнее типичных событий, характеризуемых значением математического ожидания.

При описании катастроф математическое ожидание вообще является практически бесполезным. Дело здесь в коэффициенте пропорциональности в формуле (14), который определяется из условия нормировки

$$\int p(x) dx = 1 \quad (15)$$

и является очень маленьким, так как интеграл (15) «набирает» основное значение в области значений $x \ll x_c$. Хотя интегралы для первого (математическое ожидание) и последующих моментов

$$\mu_i = \int p(x) x^i dx$$

при $\alpha < 1$ набираются в районе больших $x \sim x_c$, за счет малости нормировочного коэффициента среднее также «съезжает» в область малых значений и поэтому непригодно для анализа крупных событий.

Не менее существенно и другое обстоятельство: на практике из-за ограниченной чувствительности приборов и методик невозможно получить достоверные оценки среднего. Не зарегистрировав или не сумев разрешить часть малых событий, мы неизбежно ошибемся при определении коэффициента нормировки, а следовательно, и среднего. Причем чем больший кусок распределения мы «потеряем», тем больше будет ошибка.

Перечисленных недостатков лишена статистическая характеристика, называемая *масштабом* [25]

$$Scx = \mu_2/\mu_1, \quad (16)$$

которая представляет собой среднее, взятое с весом x , то есть определяет *характерный размер крупного события*, при этом полностью игнорируя мелкие. Иначе говоря, величина Scx определяет, событий какого масштаба (отсюда и название) следует ожидать от системы. Поскольку интегралы, определяющие и числитель, и знаменатель в формуле (16), пропорциональны коэффициенту нормировки и набираются в области больших значений, их отношение не будет чувствительным к потере части данных о малых событиях. Оценка масштаба также малочувствительна и к невозможности отличить несколько отдельных событий от одного события суммарного размера [25].

Для компактных распределений масштаб будет, естественно, совпадать по порядку величины с математическим ожиданием $Scx \sim Ex$, поскольку интегралы для

всех моментов, начиная с нулевого, набираются в одной и той же области, в то время как для распределений с тяжелыми хвостами будет $S_{cx} \gg E_x$. В этой связи можно говорить о системах, склонных к катастрофам, как о имеющих два характерных масштаба (для типичных и для крупных событий), сильно различающихся по порядку величины [25]. Эта разница лежит в основе упоминавшегося выше явления перемежаемости. Когда на фоне большого числа типичных событий происходит одно или несколько крупных, это воспринимается как вспышка активности. Если же наблюдатель (или сама система) имеет порог чувствительности, по величине лежащий между средним и масштабом, то типичные события воспринимаются как покой, а о вспышках активности говорят как о прерванном равновесии.

Легко видеть, что для распределения (14) $S_{cx} \sim x_c$, однако по небольшой статистической выборке оценить x_c практически невозможно, а оценить масштаб масштаба также не удастся найти, поскольку его оценка растет с ростом объема выборки до тех пор, пока не наберется достаточное число крупных событий.

Завершая обсуждение СЗРВ, еще раз взглянем на формулу (14). Диапазон значений α от нуля до единицы, в который попадают показатели для распределений характеристик катастроф и бедствий, и который является выделенным с точки зрения теории устойчивых распределений, снова оказывается в особом положении. Если $\alpha > 1$, то, как отмечалось, среднее конечно даже для чисто степенного хвоста вида (2), то есть интеграл для μ_1 набирается там же, где и нормировочный – в области малых значений. Следовательно, среднее отслеживает небольшие события, которые и вносят основной вклад в суммарный ущерб, несмотря на возможность крупных. Если $\alpha < 0$, то нормировочный интеграл (15) набирает свое значение вне области малых значений, и, следовательно, математическое ожидание отслеживает крупные события, то есть для системы как раз они и характерны.

Первую ситуацию можно воспринимать как докатастрофическую, соответствующую, например, автомобильным авариям, в которых погибает множество людей, однако несчастья с большим числом жертв нетипичны.

Вторая ситуация является уже сверхкатастрофической, однако, поскольку авторам не известны ни возможные механизмы возникновения распределений с отрицательными α , ни конкретные примеры таких распределений, мы не можем предложить для нее никаких интерпретаций.

Таким образом, все интересное и опасное в мире сложности и риска описывается степенными законами с $0 < \alpha \leq 1$.

1.3. Связь фликкер-шума и степенных распределений. Как уже отмечалось выше, явление фликкер-шума обусловлено отсутствием характерных времен, то есть степенным распределением временных характеристик процессов. Поясним это рассуждение двумя простыми примерами. Рассмотрим изображенный на рис. 3, а процесс, представляющий собой последовательность событий единичной амплитуды, длительность которых описывается СЗРВ с показателем α

$$p(T) \sim T^{-(1+\alpha)}. \quad (17)$$

Будем считать, что время, проходящее между последовательными событиями, велико.

Спектр мощности $S(f)$ любого процесса представляет собой просто преобразование Фурье от его автокорреляции

$$S(f) = \int A(\tau) e^{2\pi i f \tau} d\tau,$$

которая дается формулой

$$A(\tau) = \int x(t)x(t+\tau) dt \quad (18)$$

и определяет, в какой мере процесс «помнит» самого себя.

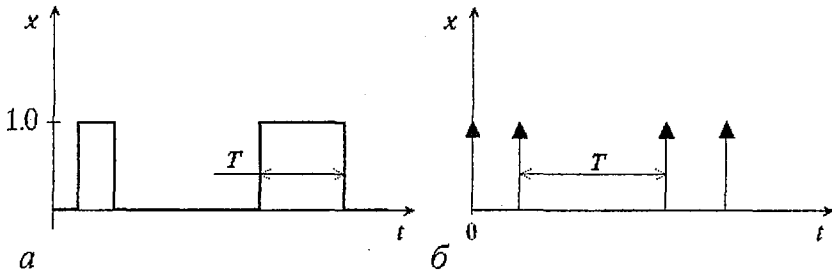


Рис. 3. Простейшие примеры сигналов, не имеющих характерных временных масштабов: *a* – события единичной амплитуды и случайной длительности, разделенные большими промежутками времени; *б* – кратковременные события равной амплитуды, разделенные случайными промежутками времени. Распределение длительностей событий и промежутков в вариантах *a* и *б*, соответственно, предполагается степенным

Если воспользоваться временной разнесенностью событий рассматриваемого процесса и пренебречь взаимодействием между ними, то для автокорреляции (18) получим

$$A(\tau) \sim \int_{\tau}^{\infty} p(T)(T-\tau)dT \sim \tau^{1-\alpha},$$

откуда немедленно имеем

$$S(f) \sim f^{\alpha-2},$$

то есть данный процесс порождает фликкер-шум с $\beta=2-\alpha$ [28,10]. Этот результат не изменится, если большие промежутки времени между событиями заменить на имеющие то же распределение (17), что и сами события [10].

Другим примером может служить процесс, состоящий из кратковременных событий равной амплитуды, разделенных случайными промежутками времени, которые имеют степенное распределение вероятностей (17) с показателем $\alpha < 1$ (рис. 3, б).

Примем за нулевой момент времени момент одного из событий, тогда на промежуток времени от 0 до t приходится

$$n(t) = t \int_0^t p(T)TdT \sim t^{\alpha}$$

событий. Соответственно, вероятность того, что в момент τ происходит событие, равна

$$dn(\tau)/d\tau \sim \tau^{\alpha-1},$$

что с точностью до коэффициента есть автокорреляция $A(\tau)$ рассматриваемого процесса, откуда $S(f) \sim f^{-\alpha}$, то есть $\beta = \alpha$ [11]⁴.

⁴ Следует заметить, что при $\alpha > 1$ для данного процесса $\beta = 2 - \alpha$ [10]. На практике такая неаналитическая зависимость β от α может приводить к получению заниженных значений β при обработке реальных данных, которые будут отклоняться от точного значения тем больше, чем короче изучаемый отрезок временного ряда.

2. Теория самоорганизованной критичности

Возможно, конечное понимание нами научных вопросов измеряется нашей способностью создавать метафорическое описание происходящего.

Пер Бак

Точно так же как любое обучение ребенка начинается с игры, развитие теории должно начинаться с игрушечных моделей. Причем важно не то, насколько они точно и полно описывают реальность (как правило, совсем не точно), а то, в какой мере они отражают ее фундаментальные свойства. Подобными «игрушками» были, например, модель атома Бора (который, как гласит известная шутка, есть атом водорода, а вовсе не атом бора) или система уравнений Лоренца (свойства которой совершенно не адекватны той задаче, из которой она была получена). Есть такая простая модель и в науке о сложности, созданная в пионерской работе [28] П. Баком, Ч. Тангом и К. Визенфельдом.

2.1. «Песочная» парадигма. Представим себе коническую кучу песка, на центр которой по одной кладут песчинки. Будем считать, что устойчивость ее поверхности определяется локальным наклоном. Когда он превышает некоторое пороговое значение, песчинки соскальзывают вниз, что может привести к потере устойчивости соседними участками кучи, то есть возможно развитие лавины осыпаний. Если средний наклон кучи невелик, то добавление очередной песчинки не вызывает заметных последствий, поскольку лавина быстро затухнет. Если наклон очень большой, то любое воздействие может привести к макроскопическому оползну, в который будет вовлечена большая масса песка.

Эту систему удобно описывать на языке клеточных автоматов. Для кучи песка было предложено несколько различных вариантов правил, из которых, по-видимому, наиболее простым и наглядным (хотя он и не соответствует в точности реальной куче песка) является исторически самый первый [28], называемый в литературе ВТW-моделью⁵. Автомат представляет собой квадратную решетку, в ячейках которой находятся целые числа, характеризующие локальный наклон кучи. Ячейки, где оказываются числа, большие порогового значения, которое обыкновенно полагается равным 3, объявляются неустойчивыми и осыпаются по схеме, изображенной на рис. 4, а.

Эти правила представляют собой трактовку осыпания, как соскальзывания двух песчинок вниз по склону, которое приводит к росту наклона в двух нижележащих ячейках. При этом увеличение наклона в двух ячейках, лежащих выше, обусловлено уменьшением числа песчинок в осыпавшейся ячейке. Поскольку схема полностью симметрична, конкретное направление склона значения не имеет (отметим лишь, что он направлен вдоль диагонали решетки).

Шаг моделирования состоит из возмущения и релаксации. Возмущение, или *привод* (driving), соответствующее добавлению на вершину кучи (в центр решетки) одной песчинки, выражается в увеличении на единицу значения в центральной ячейке системы. Если это

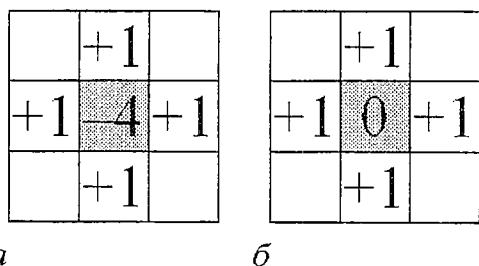


Рис. 4. Правила осыпания неустойчивой ячейки (закрашена серым). При превышении значением в ячейке тройки оно уменьшается с одновременным увеличением значений в соседних ячейках; а – ВТW-модель, б – дискретная FF-модель

⁵ Здесь и далее, если не указано другое, самоорганизованно критические модели будут обозначаться по первым буквам фамилий их создателей, хотя не все из подобных обозначений являются общепринятыми.

нарушает ее устойчивость, то она осыпается (рис. 4, а), что в свою очередь может нарушить устойчивость соседей, которые в этом случае также осыпаются, и т.д. Релаксационный процесс завершается, когда все ячейки вновь обретут устойчивость, после чего делается следующий шаг.

Граничные условия ВТW-модели полагаются открытыми. Это значит, что если устойчивость теряет ячейка, лежащая на границе решетки, то при ее осыпании происходит потеря единицы наклона (и, соответственно, двух единиц для угловых ячеек). Возможность «оттока наклона» необходима для существования стационарного состояния, поскольку возмущение увеличивает средний наклон кучи, а правила осыпания консервативны.

Как показывает компьютерное моделирование, вне зависимости от начальных условий система эволюционирует в стационарное состояние, в котором распределения длительностей лавин, затронутой ими площади и числа осыпаний имеют вид (14), где величина x_c определяется лишь размером системы и при его увеличении может быть сделана сколь угодно большой. Поскольку нарушение степенной зависимости связано лишь с конечными размерами системы, происходящие в ней процессы не имеют собственных характерных размеров.

Понять природу этого явления легче, введя понятие *минимально устойчивого элемента* (МУЭ), под которым понимается участок кучи, теряющий устойчивость под воздействием малого возмущения (в большинстве случаев МУЭ являются ячейки с пороговым значением наклона, однако возможны ситуации, когда их роль играют ячейки и с меньшим наклоном). Минимально устойчивые элементы являются проводниками активности, то есть если они образуют связный кластер, то любое воздействие на него затрагивает весь кластер.

Если средний наклон кучи не очень велик, то МУЭ редки, и возмущение не может далеко распространиться, то есть активность быстро затухает, имея вполне определенные характерные значения для описывающих ее величин. Однако, поскольку при этом лавина, как правило, не достигает краев кучи, средний наклон должен возрастать с каждой добавленной песчинкой. Если, напротив, средний наклон велик, то активность распространится практически по всей куче, достигая краев, где избыточный наклон будет покидать систему, что приводит к его уменьшению.

Таким образом, в системе имеется отрицательная обратная связь, удерживающая средний наклон вблизи некоторого значения, при котором концентрация минимально устойчивых элементов равна порогу перколяции, то есть точке возникновения из них бесконечного связного кластера. При этом любое возмущение (информация) может распространяться по системе на бесконечное расстояние, и система ведет себя как *единое целое*. По этой причине, в частности, то, как проводится возмущение, то есть куда добавляются песчинки, не оказывает влияния на статистические свойства ВТW-модели – можно, например, добавлять песчинки не в центр решетки, а в случайно выбранные ячейки [29].

2.2. Критичность и целостность. Факт целостности системы имеет простое математическое выражение в терминах пространственных и временных корреляций. Они определяют вероятность некоторого события – скажем, осыпания ячейки – в некоторой точке r в момент времени t при условии, что такое же событие произошло в известном месте в известное время (для определенности – в начале координат в нулевой момент)

$$G(r,t) = \text{Prob}\{(r,t)|(0,0)\}.$$

В простых системах корреляции убывают экспоненциально, то есть $G(r,t) \sim e^{-r/\rho} e^{-t/\tau}$. При этом элементы системы «чувствуют друг друга» и «помнят свое прошлое» лишь на конечных характерных расстояниях $r \sim \rho$ и временах $t \sim \tau$. Модели кучи песка, напротив, присущее степенное убывание функции G [30], о котором говорят как о *дальних пространственных и временных корреляциях*, подразумевают отсутствие характерных длин и времен, на которых бы утрачивалась информация о происходящих рядом или предшествующих событиях.

Появление дальних корреляций является принципиальным обстоятельством, означающим, что система с локальными правилами (элементы которой способны лишь к взаимодействию со своими ближайшими соседями) демонстрирует глобальное поведение. То есть у системы появляются свойства, которых не было у ее составных частей. *Сложное может возникать из простых элементов в результате самоорганизации.* Ключевое слово здесь именно «самоорганизация», поскольку, вообще говоря, дальние корреляции и другие описанные выше свойства сложных систем типичны для так называемых *критических явлений*, представителями которых служат фазовые переходы II рода и изменения числа или типа аттракторов динамических систем, происходящие в точке бифуркации.

Рассмотрим, например, фазовый переход парамагнетик–ферромагнетик. Электронам незаполненных атомных оболочек переходных металлов энергетически выгодно, чтобы их спины были параллельны. В этом случае принцип Паули «удерживает» электроны вдали друг от друга, уменьшая тем самым энергию кулоновского отталкивания. Поэтому электроны стремятся выстроить свои спины в одном направлении, чему, однако, противодействуют тепловые флуктуации. При высокой температуре флуктуации доминируют и спины ориентированы хаотически, так что на макроскопическом масштабе их вклады в намагниченность образца взаимно усредняются, и он ведет себя как парамагнетик. По мере снижения температуры начинают образовываться области одинаково ориентированных спинов (магнитные домены), характерный размер которых при некоторой *критической температуре* становится бесконечным (точка Кюри). В этот момент у образца появляется спонтанная намагниченность (система спинов начинает вести себя как единое целое), которая будет тем больше, чем ниже температура (и, соответственно, чем большая доля спинов ориентирована в одном направлении) [31].

Ничто не мешает нам построить критическую систему и на «песочной» основе. Возьмем цилиндрический барабан с горизонтально ориентированной осью, насыпем в него некоторое количество песка и приложим к этой конструкции вращающий момент. Чтобы его скомпенсировать, барабан повернется так, что поверхность песка отклонится от горизонтали. Если угол наклона будет невелик, то система окажется в состоянии равновесия, однако если он будет превышать некоторое критическое значение, то возникнет непрерывный ток песка, который будет тем больше, чем больше отклонение от критического угла [32].

Таким образом, *параметр порядка* (намагниченность или ток песка) начинает принимать ненулевое значение при переходе *управляющего параметра* (температура или угол наклона поверхности) через *критическое значение*, что означает появление у системы целостных свойств. Критическая точка разделяет хаотическое (докритическое) и упорядоченное (сверхкритическое) состояния, поэтому в ней любое *малое воздействие* может оказать существенное влияние на систему. В ней и только в ней, поскольку в хаотической фазе (высокая температура или малый наклон) оно *еще* быстро затухает в пространстве и времени, а в упорядоченной (низкая температура или большой наклон) – *уже* не может ощутимо повлиять на сложившуюся структуру системы.

Однако в самой критической точке *малые причины могут приводить к большим следствиям*. Направление спонтанной намагниченности ферромагнетика определяется случайными факторами, действовавшими на него в точке фазового перехода и сориентировавшими в определенном направлении небольшую, но достаточную для появления выделенного направления, долю спинов. Аналогично, хотя на поверхности песка при критическом угле наклона еще нет спонтанного тока, одна добавленная песчинка может вызвать лавину любого размера.

При описании поверхности песка в терминах минимально устойчивых элементов управляющим параметром служит их концентрация, а параметром порядка – вероятность того, что некоторая ячейка принадлежит к бесконечно большому кластеру из них, то есть что воздействие на нее распространится на бесконечное расстояние. В докритическом состоянии (концентрация МУЭ меньше порога перколяции) изменение состояния одного элемента сказывается лишь на

конечном масштабе порядка среднего размера кластера. В сверхкритическом состоянии бесконечный кластер МУЭ содержит конечный процент ячеек системы и, обладая дублированной связностью, «не ощущает» замену обычного элемента на МУЭ, и наоборот. Но в критической точке, где бесконечный кластер только появляется, он «едва связан», и малые изменения могут нарушить его связность или, наоборот, создать ее.

Словечко «едва», как нам кажется, исключительно точно описывает критическое поведение: перколяционный кластер в критической точке едва связан, песок в стационарном режиме ВТW–модели едва движется по куче (в среднем одна песчинка за ход), ветвящийся процесс, описанный в разделе 1, является критическим при единичном коэффициенте размножения, то есть когда процесс едва выживает, и т.д.

Критические явления представляют собой «момент отрыва» параметра порядка от нулевого значения, который происходит при точной установке управляющего параметра в критическое значение. В естественных условиях – за пределами лаборатории – некому заниматься подстройкой управляющих параметров, поэтому сами по себе критические явления не позволяют объяснить возникновение сложности в природе [18] и не могут служить для описания катастроф.

Однако вместо того чтобы подстраивать управляющий параметр *a priori* неизвестной величине, можно установить параметр порядка в значение $+0$, что заставляет управляющий параметр уже самостоятельно принять критическое значение. Иначе говоря, вместо того, чтобы крутить ручку прибора, можно начать сдвигать с нулевой отметки стрелку на его шкале, вынуждая ручку повернуться до нужного положения [32]. Такое управление параметром порядка обыкновенно достигается при помощи *разделения временных масштабов* [33], при котором время релаксации системы много меньше времени между последовательными возмущениями, то есть когда события едва-едва происходят.

Именно это и имеет место в модели кучи песка. Положение ручки (средний наклон) устанавливается в критическое значение за счет самоорганизации, а не путем искусственной подстройки. По этой причине ВТW–модель и другие системы такой природы получили название *самоорганизованно критических* (СК).

Весьма остроумной является так называемая «офисная» интерпретация данной модели [18], которая трактует ячейки клеточного автомата как столы клерков, а величины в них – как число ждущих рассмотрения бумаг. До тех пор пока у чиновника не скопится определенное число бумаг, он бездействует, а потом берет четыре штуки, визирует и передает соседям. При этом одна входящая бумага может вызвать катастрофический взрыв «деловой» активности.

3. Экскурсия по зоопарку самоорганизованно критических моделей

Понимание редко возникает из сложного беспорядочного моделирования, а много чаще – из грубого упрощенчества. Как только определен существенный механизм, просто проверить его на прочность путем добавления все новых и новых деталей.

Пер Бак

Построение СК–моделей оказалось чрезвычайно плодотворным для объяснения и качественного описания явлений во многих областях знания. Мы далеки от мысли дать здесь полный обзор всего многообразия предложенных исследователями моделей. Остановимся лишь на примерах, существенных для понимания принципиальных вопросов или представляющих интерес с точки зрения управления риском.

3.1. DR-модель. Точное вычисление показателей. Аналитическое нахождение точных значений показателей для критических систем является весьма сложной задачей, которую обыкновенно удается решить лишь частично. То есть значения нескольких основных показателей получаются из эксперимента (компьютерного или натурального) либо находятся при помощи приближенных методов, а остальные выражаются через них при помощи скейлинговых соотношений.

Одним из немногочисленных исключений из этого правила служит предложенная в 1989 г. Дхаром и Рамасвами DR-модель, все показатели которой могут быть вычислены точно [34].

DR-модель представляет собой клеточный автомат, правила которого формулируются на двумерной гексагональной решетке (рис. 5, а) с открытыми граничными условиями на нижней стороне и периодическими условиями на боковых (левая и правая границы поля отождествлены и оно «свернуто» в вертикальный цилиндр).

Привод модели осуществляется путем увеличения на единицу значения в случайно выбранной ячейке верхнего слоя решетки. Когда значение в какой-либо ячейке решетки превышает единицу, эта ячейка теряет устойчивость и осыпается в соответствии с рис. 5, а. При этом по одной единице из осыпавшейся ячейки передается двум нижележащим, что в свою очередь может нарушить их устойчивость и т.д. При осыпании ячейки, принадлежащей к нижнему слою решетки, увеличения значения в других ячейках не происходит.

Правила DR-модели являются существенно *анизотропными* – лавина, распространяясь строго сверху вниз, никогда не затрагивает дважды один и тот же участок. Это обстоятельство, с одной стороны, существенно упрощает аналитическое исследование модели, а с другой, позволяет давать ей простые и наглядные интерпретации, самой распространенной из которых является экономическая [18, 35].

Каждая ячейка рассматривается как экономический агент – производитель определенного вида продукции, для создания двух единиц которой он использует по единице продукции каждого из двух нижележащих агентов. Число в ячейке соответствует количеству единиц продукции, запрошенной смежниками сверху. Как только накапливается более одного запроса, агент, в свою очередь, посылает

по запросу смежникам снизу, чтобы произвести свою продукцию и удовлетворить запросы вышележащих⁶.

Слои модели при этом можно трактовать как различные уровни экономики: (внизу – сырьевые и добывающие отрасли, в середине – перерабатывающие, наверху – производители готовой продукции), а добавление единичек в верхний слой – как запрос на единицу товара от конечного потребителя.

Можно показать, что число экономических агентов и слоев экономики, затронутых лавиной запросов, которую вызывает единичный запрос от конечного потребителя, характеризуются СЗРВ с показателями, соответственно, $1/3$ и $1/2$ [34].

В самом деле, как нетрудно понять,

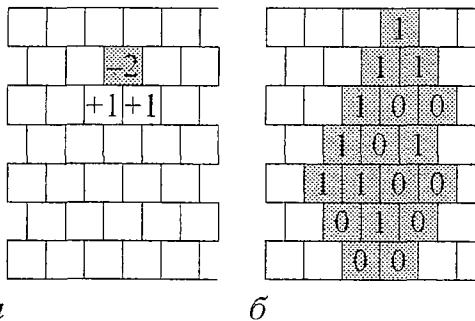


Рис. 5. DR-модель. а – фрагмент гексагональной решетки и правила осыпания неустойчивой ячейки (закрашена серым); б – пример области лавины. Числа обозначают содержимое ячеек до ее прохода. Видно, что увеличение или уменьшение ширины лавины определяется значениями на краях ее области

⁶ При таких правилах между получением запроса и его удовлетворением может проходить, вообще говоря, произвольное время. Чтобы избежать этого, агентам достаточно иметь склады для готовой продукции единичной емкости. Тогда все запросы будут удовлетворяться немедленно, что, однако, никак не скажется на динамике их распространения.

область лавины не может иметь полостей, поэтому полностью определяется на каждом слое своими двумя крайними точками. Если ячейка на краю лавины имела до ее прохождения нулевое значение, то на следующем слое край сдвинется на полклетки внутрь области лавины, а если единичное – наружу (рис. 5, б). Поэтому от слоя к слою ширина области лавины будет случайным образом уменьшаться или увеличиваться на одну клетку либо оставаться неизменной с вероятностями, зависящими лишь от концентрации нулей и единиц в системе. Легко видеть, что продвижение лавины по слоям представляет собой не что иное, как описанную в разделе 1 задачу о разорении азартного игрока, характеризуемую значением $\alpha=1/2$ – см. формулу (5). Поскольку в критическом состоянии события не имеют собственных характерных размеров, коэффициент b в этой формуле будет нулевым и нарушаться степенная зависимость будет лишь из-за конечности размеров системы.

Таким образом, лавина завершается на l -м слое с вероятностью $P(l) \sim l^{-(1+\alpha)}$ и, соответственно, минует его с вероятностью, пропорциональной $l^{-\alpha}$. При этом ее ширина в этом слое будет $w(l) \sim l^\alpha$, поскольку средний поток заказов через слой не должен зависеть от его номера. Следовательно, число агентов, затронутых лавиной, завершившейся на l -м слое, (ее площадь) будет

$$s(l) \sim l^{\alpha+1}. \quad (19)$$

Скейлинговое соотношение (19) легко позволяет выразить показатель распределения $P_s(s)$ лавин по площадям α_s через α . В силу сохранения вероятностей $P(l)dl \sim P_s(s)ds$, что с учетом (19) дает $\alpha/\alpha_s = \alpha + 1$, откуда $\alpha_s = 1/3$.

Поскольку отклик модели экономики на элементарное воздействие не имеет характерного размера, то в ней возможны гигантские события без отчетливых причин, которые можно интерпретировать как кризисы или бумы.

Хотя ничто не мешает экономистам *a posteriori* указать на ту конкретную песчинку, которая сорвала лавину (что обычно и делается при анализе кризисных явлений), причина лавины вовсе не в песчинке, а в целостном критическом поведении экономики, склонной к кризисам и бумам, то есть к катастрофическому поведению.

3.2. Критичность в неконсервативных системах. Правила рассмотренных выше ВТW- и DR-моделей, как и многих других СК-систем, являются консервативными, то есть при осыпании ячеек изъяты из них величины перераспределяются без потерь и покидают систему, только достигнув ее краев. Поэтому в течение нескольких лет после появления первых СК-моделей бытовало (подкрепленное расчетами) мнение, что явление самоорганизованной критичности присуще исключительно консервативным системам. Если бы это было действительно так, то его применимость к описанию природных процессов была бы весьма ограниченной [18]. Но в 1991 году отцом и сыном Федерами была предложена неконсервативная самоорганизованно критическая FF-модель [36]. Мы здесь рассмотрим лишь ее дискретный вариант, правила которого идентичны правилам ВТW-модели за одним исключением: при осыпании ячейки число в ней уменьшается не на фиксированную величину – 4 единицы, а до нуля (см. рис. 4, б).

При первом осыпании в лавине данное различие правил роли не играет. Однако, поскольку в ходе развития лавины у одной ячейки могут осыпаться несколько соседей одновременно, значение в ней может оказаться и больше 4, так что образовавшийся избыток диссипирует при осыпании. Тем не менее, модель демонстрирует критическое поведение. Показатель распределения числа осыпаний получается больше, чем в ВТW-модели (0.5 [36] против 0.2 [37]).

В FF-модели механизм диссипации носит характер «обрезания излишков», то есть является пороговым. Поэтому встает вопрос, возможно ли самоорганизованно критическое поведение при наличии «обычной», то есть линейной диссипации. Ответом – положительным – служит OFC-модель [38, 39],

во многом близкая по правилам к FF-модели. Обе модели формулируются на двумерной ортогональной решетке с открытыми граничными условиями, в обеих при осыпании неустойчивой ячейки ее значение – будем называть его *напряжением* – уменьшается до нуля.

Однако в OFC-модели напряжения соседей осыпавшейся ячейки увеличиваются на величину qF , где F – напряжение осыпавшейся ячейки, а $q < 0.25$ – параметр, определяющий степень сохранения. При этом остаток напряжения, равный $(1-4q)F$, диссипирует.

Разумеется, описанные правила предполагают, что напряжения являются непрерывными числами. Привод модели осуществляется путем одновременного равномерного увеличения напряжений всех ячеек⁷ до тех пор, пока одно из них не достигнет порогового значения.

К сожалению, из-за технических трудностей модель до сих пор не исследована на решетках, достаточно больших для достоверного [39–42] определения показателей распределений. Общепринятым является лишь то, что по мере уменьшения степени сохранения q показатель распределения числа опрокидываний растет, проходя через единицу при $q=q_c \approx 0.18$ [40,41].

Однако значительно больший интерес, нежели значения показателей, представляют в высшей степени нетривиальные процессы, происходящие в критическом состоянии OFC-модели.

Поскольку в ней присутствует диссипация, наличие открытых граничных условий не является необходимым для достижения стационарного состояния. Кроме того, пропорциональность диссипирующей доли напряжения его величине приводит к тому, что оно не может перемещаться по системе на большие расстояния и основная часть напряжения диссипирует в глубине решетки, не достигая ее краев [41]. Поэтому, казалось бы, края не должны оказывать существенного влияния на поведение системы. Однако, если заменить открытые граничные условия, при которых модель демонстрирует самоорганизованно критическое поведение, периодическими, то есть свернуть решетку в тор, то система самоорганизуется в совершенно иное состояние.

При q не очень близких к 0.25 в OFC-модели на торе осыпание ячейки практически никогда не сопровождается нарушением устойчивости соседних ячеек, то есть *лавины не развиваются*. Система оказывается замороженной в *неупорядоченном* квазипериодическом состоянии, когда одна и та же последовательность осыпаний повторяется практически без изменений раз за разом [40]. Разрушить такое состояние могли бы крупные лавины, оставляющие после себя довольно *упорядоченные* области, в которых большое число ячеек достигнет порога устойчивости почти одновременно и сможет снова принять участие в лавине. Однако взяться лавинам при периодических граничных условиях неоткуда [41].

Если же границы системы открыты, то находящиеся на них ячейки получают при опрокидывании своих соседей меньшую прибавку напряжения, чем ячейки в глубине (просто потому, что имеют меньше соседей). Соответственно, они отстают от них в скорости роста напряжения, и когда оно все-таки достигает порога, их соседи имеют в среднем большее напряжение, чем соседи ячеек в глубине. Это обстоятельство делает возможным развитие лавин, которые упорядочивают ячейки в глубине решетки [40,41].

Таким образом, край системы, к которому примыкает пренебрежимо малая доля ячеек и который не нужен для достижения стационарного состояния, в OFC-модели оказывает решающее влияние на ее самоорганизацию и управляет в ней всеми крупными событиями, которые запускаются только с него [41].

3.3. Прерывистое движение. Модель блоков и пружин. Рассмотренная выше OFC-модель [38] возникла как одно из приближений другой модели –

⁷ Такой привод эквивалентен увеличению напряжения случайно выбранной ячейки на бесконечно малую величину.

модели прерывистого движения (stick-slip), возникающей в сейсмологии и призванной описывать движение тектонических плит в зоне разлома. Одна из плит представляется в модели неподвижной шершавой подложкой (рис. 6, б), вдоль которой скользит с трением другая плита.

Движущаяся плита, внутри которой действуют упругие силы, представляется системой блоков и пружин, изображенной на рис. 6, а. Кроме того предполагается, что она приводится в движение равномерно движущейся платформой при помощи упругих связей, как показано на рис. 6, б. Если бы подложка была гладкой и между ней и блоками не было трения, то движение происходило бы непрерывно, однако, поскольку трение присутствует, то движение происходит скачками. Когда сила, приложенная к какому-то из блоков, превышает силу трения покоя между ним и подложкой, блок начинает двигаться. При этом вектор силы, с которой он действует на соседние блоки, получает приращение в направлении движения, и, соответственно, возрастает их отклонение от положений равновесия. В результате они тоже могут прийти в движение.

Динамика этой системы описывается правилами OFC-модели при следующих предположениях:

- $k_x = k_y = k$, то есть система изотропна;
- движущиеся блоки останавливаются, лишь достигнув положения равновесия;
- положение равновесия достигается мгновенно, то есть нет инерции;
- блоки не имеют смещений вдоль оси y , перпендикулярной направлению движения.

Действительно, если обозначить через δx_{ij} смещение блока, имеющего номер i по оси x и j по оси y , относительно положения равновесия, то действующая на него сила есть $F_{ij} = (4k + k')\delta x_{ij}$. Если она превышает силу трения покоя, то блок движется до тех пор, пока δx_{ij} не станет равным нулю. При этом сила, действующая на соседние блоки, увеличится на

$$F_{i\pm 1, j\pm 1} = k\delta x_{ij} = kF_{ij}/(4k + k'). \quad (20)$$

Формула (20) представляет собой правила осыпания OFC-модели с $q = 4/(4k + k')$, которая, таким образом, может интерпретироваться как модель сейсмического разлома.

Вообще говоря, модель блоков и пружин существенно шире, чем OFC-модель, при выводе правил которой были сделаны упрощающие предположения. Однако она и существенно сложнее для исследования, поскольку описывается не клеточным автоматом, а системой многих дифференциальных уравнений, описывающих движение каждого блока с учетом его инерции, зависимости силы

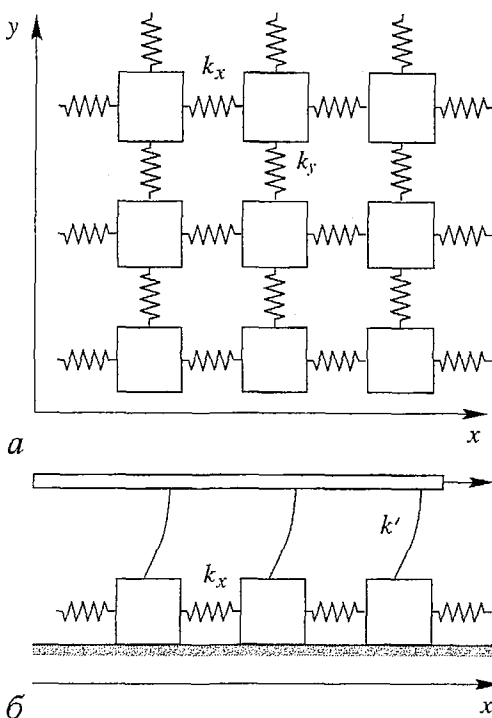


Рис. 6. Представление тектонических плит системой блоков и пружин: а – вид в плоскости плит – блоки соединены пружинами жесткости k_x и k_y с ближайшими соседями; б – вид сбоку – блоки, соответствующие одной из соприкасающихся плит, расположены на шероховатой подложке, соответствующей другой плите; привод осуществляется от медленно движущейся пластины, связанной с блоками посредством часовых пружин жесткости k'

трения от скорости и других особенностей. При этом возникают обычные неудобства, присущие непрерывному описанию: требовательность к памяти и быстрдействию, чувствительность к деталям правил, сложность интерпретации результатов, многочисленность параметров и т.д.

В силу этого продуктивные попытки исследования модели блоков и пружин имели место, насколько нам известно, лишь для одномерного варианта [43–46], соответствующего случаю $k_y=0$, и на не очень больших системах. Не обсуждая их подробно, отметим лишь, что, как и следовало ожидать, в определенном диапазоне параметров модель прерывистого движения демонстрирует самоорганизованно критическое поведение. Показатель распределения событий, вообще говоря, зависит от значений параметров и деталей модели [43–46]. Кроме того, его точное определение затруднено тем, что в области больших значений распределение имеет «горб», соответствующий событиям, в которые вовлекается вся система целиком [43, 44].

Последнее обстоятельство характерно для систем, в которых велика роль *инерции*, и лавина, достигшая определенного уровня, становится самоподдерживающейся и достигает краев системы. Собственно говоря, именно так происходит развитие лавин в *реальных* кучах песка, которые, начиная с определенных размеров, перестают демонстрировать критическое поведение, на смену которому приходят периодически повторяющиеся глобальные события [47, 48]. Однако, если подавить инерцию, как это имеет место, например, для кучи риса [49] или снежных лавин [18], то критическое поведение наблюдается на практике при любых размерах системы.

3.4. Модель разрыва пучка волокон. В отличие от описанных выше моделей, являющихся примерами катастрофического поведения и позволяющих проанализировать и понять его природу, модель пучка волокон служит, скорее, образом отдельно взятой катастрофы.

Рассмотрим пучок из N параллельных волокон, к которому приложено равномерно распределяемое между ними усилие F . Каждое волокно характеризуется значением порога прочности s , при превышении которого оно разрывается. При этом усилие мгновенно перераспределяется между оставшимися волокнами, что приводит к росту нагрузки на них. Последняя вновь может превысить прочность некоторых волокон, спровоцировав новые разрывы и т.д. После завершения лавины разрывов усилие, приложенное к пучку, повышается до тех пор, пока вновь не будет превышен порог прочности одного из волокон [50, 51].

Напрашивается интерпретация модели как описания аварии электроснабжения с последовательным выходом из строя подстанций при чрезмерной нагрузке. Менее очевидна аналогия с развитием экономического кризиса. Когда производитель какого-либо товара сталкивается с падением объемов продаж, чтобы выправить положение, он либо сокращает издержки, уменьшая зарплату или увольняя часть персонала, либо начинает поставлять товары в кредит, «занимая деньги у будущего». Любое из этих действий приводит к сокращению базы платежеспособного спроса, то есть к уменьшению объемов продаж у всех производителей, которые в результате «рвутся» подобно волокнам в пучке⁸.

То, как происходит разрыв волокон по мере роста приложенного усилия, существенно зависит от степени неоднородности пучка. Пусть прочность волокон описывается функцией распределения $P(\xi)=\text{Prob}\{s<\xi\}$, тогда пучок содержит в среднем $n=N[1-P(s)]$ волокон прочности не менее s , способных выдержать суммарное усилие $F=sn$. Таким образом, разрыв волокон прочности s будет наступать при достижении усилием значения

⁸ То, что разумные с точки зрения каждого экономического агента действия могут оказаться губительными для экономики в целом, – еще одно свидетельство ее целостности, то есть критического поведения.

$$F(s) = Ns[1 - P(s)]. \quad (21)$$

Если функция распределения P такова, что выражение (21) имеет максимум в некоторой точке $s_c > 0$, то вблизи нее значение разрывающего усилия можно аппроксимировать формулой

$$F(s) = F_c - c(s - s_c)^2. \quad (22)$$

При этом необходимая для выживания прочность волокна расходуется при $F \rightarrow F_c$ как

$$ds/dF \sim (F_c - F)^{-1/2}, \quad (23)$$

то есть F_c является критической точкой. В ее окрестности на повышение приложенного усилия пучок будет отвечать разрывом числа волокон, распределенного степенным образом. И лишь после того как F несколько превысит F_c , произойдет разрыв всех оставшихся волокон – полное разрушение.

Динамика разрыва будет, однако, совершенно иной, если функция (21) не имеет максимума. При этом полное разрушение произойдет практически сразу по достижении приложенным усилием некоторого критического уровня. Оно будет внезапным – ему будет предшествовать, возможно, только несколько единичных разрывов [50].

Поясним приведенные рассуждения на примере. Пусть волокна равномерно распределены по прочности между a и 1, то есть $P(\xi) = \xi/(1-a)$. Легко убедиться, что для данного распределения выражение (21) имеет максимум на интервале $(a; 1)$ только если $a < a_0 = 0.5$ [50]. На рис. 7 показаны графики распределения разрывов, возникающих в результате увеличения усилия, по числу волокон при различных a . Видно, что когда $a \ll a_0$, распределение характеризуется значением $\alpha = 3/2$, однако по мере приближения a к a_0 происходит переход к распределению с $\alpha = 1/2$. Необходимо также отметить, что при увеличении a уменьшается как доля волокон, которые разрываются до наступления полного разрушения, так и число событий разрыва.

Это означает, что при высокой степени неоднородности пучка ($a \ll a_0$) система в течение долгого времени проходит через длительный ряд аварий ($\alpha < 1$), служащих предвестниками грядущего полного разрушения, которое в конце концов и происходит, если меры по остановке роста приложенного усилия так и не были предприняты. В случае достаточно однородных волокон (a близко к a_0) полному разрушению предшествует лишь некоторое количество катастрофических событий ($\alpha > 1$), которые полностью исчезают при $a > a_0$. Таким образом, варьируя степень однородности в системе, которая должна противостоять потенциальным нагрузкам, возможно направить ее поведение по одному из этих двух сценариев.

Завершая обсуждение этой модели, поясним происхождение получающихся распределений [51].

Формула (23), определяющая величину усилия, разрывающего волокна прочности s , является, разумеется, усреднением. Для конкретного набора волокон величина $F(s)$ будет флуктуировать вокруг даваемых ей значений. При этом может оказаться, что хотя функция (23) при $s < s_c$ является строго возрастающей, $F(s)$ в какой-то

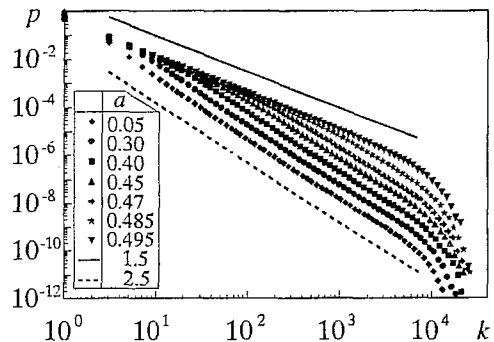


Рис. 7. Распределение числа порванных волокон при различных a . Видно, что по мере приближения a к $a_0 = 0.5$ появляется все более длинный участок графика с наклоном -1.5 , в то время как при малых a наклон составляет -2.5 . Для сравнения изображены прямые с указанными наклонами. Данные усреднены по 100 000 реализаций для модели с $N = 2^{20}$

точке s_1 начинает убывать так, что на некотором промежутке ($s'; s''$) будет выполнено неравенство $F(s) > F(s')$. Это обстоятельство, собственно говоря, и вызывает лавину разрывов, поскольку как только прочность, необходимая для того, чтобы волокно уцелело, станет больше s_1 , все волокна с $s \leq s''$ разорвутся уже без увеличения приложенного усилия.

Увеличение или уменьшение $F(s_k)$ от волокна k к волокну $k+1$ можно аппроксимировать шагом ветвящегося процесса (задача о разорении азартного игрока), для коэффициента размножения которого m выполнено соотношение

$$1 - m \sim dF(s_k)/dk,$$

откуда с учетом формулы (23) и того обстоятельства, что при равномерном распределении волокон по прочности $dk \sim ds$, получаем

$$1 - m \sim (F_c - F)^{1/2}.$$

Если F меняется слабо, то вероятность разрыва k волокон согласно (5) есть $p(k) \sim k^{-3/2} e^{-b(F)k}$, где $b(F) \sim (1-m)^2 \sim F_c - F$ в соответствии с формулой (6). Таким образом, при F близком F_c (что означает высокую однородность пучка) получаем $p(k) \sim k^{-3/2}$. Если же F далеко от F_c , (неоднородный пучок), то для получения вида $p(k)$ необходимо провести усреднение по F , которое дает

$$p(k) \sim \int_0^{F_c} k^{-3/2} e^{-b(F)k} dF \sim k^{-5/2}.$$

3.5. Модель лесного пожара. Процесс роста деревьев и возникновения пожаров в лесном массиве может быть качественно промоделирован при помощи клеточного автомата с тремя состояниями: *растущее дерево*, *горящее дерево* и *пепел*, которые циклически переходят друг в друга по следующим правилам (за один шаг времени) [33,52–54]:

- из пепла с вероятностью p вырастает новое дерево;
- растущее дерево самопроизвольно загорается с вероятностью f , если у него нет ни одного горящего соседа;
- дерево, имеющее хотя бы одного горящего соседа, загорается с вероятностью $1-g$;
- горящее дерево превращается в пепел.

В зависимости от значений параметров p , f и g модель может демонстрировать различные типы поведения [33,53,55], но нас будет интересовать лишь тот диапазон параметров, при котором она самоорганизуется в критическое состояние. Кроме того, для простоты мы ограничимся пока случаем $g=0$, то есть деревья не имеют устойчивости к возгоранию от горящих соседей.

Отношение $\theta = p/f$ служит мерой числа деревьев, вырастающих за время между двумя возгораниями [33]. Поэтому достаточно большие кластеры растущих деревьев могут сформироваться только при $\theta \gg 1$. Вместе с тем, чтобы пожары не могли продолжаться неограниченно долго, необходимо, чтобы время роста новых деревьев $1/p$ было много больше времени выгорания самых больших кластеров T_{\max} , которое при $\theta \rightarrow \infty$ расходится как $T_{\max} \sim \theta^\nu$, где ν – некоторый положительный показатель [33,54]. Таким образом, получаем условие *двойного разделения временных масштабов*

$$p^{-1/\nu} \gg \theta \gg 1,$$

при выполнении которого модель лесного пожара демонстрирует критическое поведение [33,53,54]. Отметим, что модели типа кучи песка для самоорганизации в критическое состояние предполагают простое разделение временных масштабов (время между добавлением песчинок много больше времени релаксации). Однако, поскольку на практике удобно полагать, что кластер деревьев, внутри которого произошло возгорание, сгорает мгновенно, условие ограниченности пожаров во времени выполняется автоматически [33, 53, 54].

Обозначим плотности растущих и горящих деревьев и пепла как ρ_r , ρ_f и ρ_a , соответственно. За один шаг на поле площади S вырастает $S\rho_r$ деревьев и происходит $Sf\rho_f$ самопроизвольных возгораний, каждое из которых выжигает кластер средним размером $\langle s \rangle$. В стационарном состоянии средние числа вырастающих и сгорающих деревьев должны быть равны, откуда

$$\langle s \rangle = p\rho_a / (f\rho_f) \approx \theta(1 - \rho_r) / \rho_r \sim \theta. \quad (24)$$

Здесь мы воспользовались очевидным соотношением $\rho_r + \rho_f + \rho_a = 1$ и пренебрегли плотностью горящих деревьев по сравнению с плотностью растущих [33, 53, 54].

Из формулы (24) следует, что предельная плотность деревьев

$$g_c = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \rho_r$$

должна быть строго меньше единицы. В противном случае ρ_r будет очень близка к единице уже при конечных θ , при этом крупнейший кластер деревьев будет содержать конечную долю всех растущих на поле деревьев. А значит, $\langle s \rangle$ будет неограниченно возрастать при $S \rightarrow \infty$ при фиксированном θ , что противоречит (24). Таким образом, пепелища всегда будут занимать *конечную долю площади леса* [33].

Согласно результатам компьютерного моделирования распределение кластеров по размеру имеет вид $n(s) \sim s^{-2.15}$. Поскольку вероятность возгорания внутри кластера пропорциональна его размеру, вероятность пожара площади s есть $n(s)s \sim s^{-(1+0.15)}$ [33, 53, 54].

При наличии у деревьев ненулевой устойчивости к возгоранию их кластеры выгорают уже не полностью. По мере роста g возрастает и плотность живых деревьев ρ_r , достигая единичного значения при некотором g_c . При малых g распространение огня ограничивается лишь размерами кластеров живых деревьев, а при значениях g , близких к g_c , распространение огня носит перколяционный характер, больше напоминающий не пожар, а тление [33, 53, 54].

Вообще говоря, данная модель не очень хорошо описывает статистику реальных лесных пожаров, для которых $\alpha \approx 0.59$ [16], что заметно больше величины, получающейся в модели. Наблюдающееся на практике более высокое значение α , означающее меньший размер пожаров, обусловлено, на наш взгляд, как факторами, мешающими распространению огня (реки, шоссе, поля и т.п.), так и усилиями по тушению пожаров.

Модели лесного пожара легко можно придать множество интерпретаций, поскольку описанная схема является частным случаем процесса, происходящего в *возбудимой среде*, элементы которой могут находиться в одном из трех состояний: *покой* (растущее дерево), *возбуждение* (горящее дерево) и *невосприимчивость* (пепел) или *рефрактерность*. Возбуждение распространяется от соседа к соседу при условии, что он находится в состоянии покоя. После возбуждения элементам среды требуется некоторое время на «восстановление сил», которое они проводят в состоянии невосприимчивости [33, 53].

Под эту схему попадают, например, социальные события, особенно восстания и революции. Наиболее активные их участники в конце концов оказываются либо убиты (те, кому не суждено погибнуть в столкновениях с властями, попадают под нож гильотины, когда «революция пожирает своих детей»), либо «выходят в тираж», сделав карьеру в новых условиях («задумывают революцию романтики, довершают прагматики...») или просто разочаровавшись в ней («...а ее плодами пользуются циники»). При этом до новых волнений и бунтов должно вырасти новое поколение людей, готовых в них участвовать.

Модель лесного пожара дает также хорошую аналогию с такими историческими событиями, как войны и эпидемии. Пожар, захвативший некоторую

территорию, приводит к тому, что ее ячейки оказываются в одинаковых условиях, то есть синхронизованными. При этом они в дальнейшем развиваются сходным образом и имеют тенденцию снова вспыхивать одновременно [56]. Эпидемии и войны, разрушая привычный уклад жизни и опустошая значительные территории, также приводят к синхронизации, примерами которой могут служить послевоенное развитие Германии и Японии или объединение Руси под властью Москвы после эпидемии чумы XIV века и Куликовской битвы.

3.6. Модели биологической эволюции. Биологическая эволюция может показаться темой, далекой от управления риском. Однако это не так, поскольку законы, по которым она происходит, в значительной степени универсальны и имеют отношение к эволюции технических систем, систем управления, общественных институтов, коммерческих предприятий, властных элит и вообще любых «агентов», которые существуют и действуют в обстановке конкуренции. Вместе с тем, между этими процессами и процессом биологической эволюции есть существенные различия. С одной стороны, биологическая эволюция продолжается существенно дольше и в ней было задействовано намного большее число агентов, а с другой, она протекала без участия человека. Эти обстоятельства позволяют сделать ее изучение своеобразным полигоном для моделей эволюционного поведения.

Поскольку процессы, происходящие в живой природе, весьма многочисленны и разнообразны, для их успешного изучения необходим некоторый предварительный анализ. Если обобщить количественные данные, которые предоставляет нам палеонтология, получится примерно следующее:

1) большинство когда-либо живших видов ныне не существуют [57–59], причем вероятность исчезновения вида не зависит от того, как долго он уже просуществовал (закон Ван Валена) [57, 60], а процесс вымирания имеет отчетливо выраженный прерывистый характер с длительными периодами относительного спокойствия, перемежаемыми короткими всплесками [9, 60];

2) распределение *таксонов* (систематических категорий различных уровней) по времени жизни характеризуется СЗРВ с показателем, составляющим для родов и семейств порядка 1.0 [60–62], а для видов, по разным оценкам, от 0.12 [63] до 0.6 [64] и более [57];

3) спектр мощности числа вымерших родов и семейств, а также их разнообразия (количества входящих в их состав таксонов следующего уровня), представляет собой фликкер–шум с $\beta \approx 0.8 \div 1.0$ [62, 65];

4) таксономическое разнообразие (распределение родов по числу входящих в их состав видов и отрядов по числу семейств) характеризуется различными значениями показателя в диапазоне от нескольких десятых до единицы и более [66, 67];

5) распределение видов по числу особей дается степенным законом с $0 < \alpha < 0.25$ [63];

6) статистика вымирания таксонов удовлетворительно описывается СЗРВ [63] с α , близким к единице [58, 62, 68, 69].

Таким образом, прерванное равновесие, фликкер–шум и степенная статистика позволяют высказать гипотезу о критичности эволюционного процесса.

Теперь зайдем с другой стороны – попробуем сделать общие предположения о том, как может протекать эволюция и какие эффекты при этом будут существенны.

Единицей эволюционного процесса является *вид*, который можно характеризовать его *приспособленностью* к окружающим условиям (*fitness*). Виды стремятся увеличить свою приспособленность, видоизменяясь в результате мутаций. При этом эволюционирующие виды можно сравнить с путешественниками, движущимися по сильно изрезанному *ландшафту*, отражающему зависимость приспособленности видов от их генотипа, с целью

забраться как можно выше. Однако, поскольку мутации, уменьшающие приспособленность вида, отсекаются естественным отбором, путешественник может двигаться лишь вверх, перепрыгивая при необходимости через узкие расщелины.

Виды в экосистеме не являются изолированными (между их представителями всегда имеют место конкуренция, симбиоз, отношения хищник–жертва и иные формы взаимодействия), поэтому изменения приспособленности одного вида могут сказываться на приспособленности других видов (то есть приводить к изменению ландшафта), вынуждая их тем самым к дальнейшей эволюции.

При этом динамика эволюции существенно зависит от степени взаимодействия видов. Если она невелика, то каждый вид достаточно быстро достигает локального максимума приспособленности, где и «застраивает», не имея возможности достигнуть более благоприятных состояний, будучи отделенным от них «пропастями» ландшафта, преодолеть которые при помощи единичных мутаций невозможно. Как говорил (если верить Ницше) Заратустра «в горах кратчайший путь – с вершины на вершину: но для этого нужны длинные ноги». Таким образом, при слабом взаимодействии видов экосистема попадает в *замороженное* состояние, где эволюция практически прекращается.

Если, напротив, степень взаимодействия велика, то раньше чем вид достигает локального максимума приспособленности, этот максимум успевает исчезнуть – ландшафт слишком быстро «плывет» под ногами, и виды оказываются в положении Алисы в Зазеркалье, когда «приходится бежать со всех ног, чтобы только остаться на том же месте» (так называемый «эффект Черной Королевы»). Иными словами, экосистема оказывается в *хаотическом* состоянии, где все прошлые успехи немедленно забываются и эволюция отдельного вида, направленная на приспособление к постоянно меняющемуся окружению, оказывается тщетной [70, 18].

Пер Бак, обсуждая тему биологической эволюции в своей книге «Как работает природа. Теория самоорганизованной критичности» [18], пишет: «Обе эти крайности плохи для коллективного благополучия системы. В первом случае виды будут заморожены на низких максимумах ландшафта приспособленности, откуда им некуда идти... Во втором случае эволюция оказывается бесполезной из-за постоянно меняющейся окружающей обстановки. Только успеешь приспособиться к имеющемуся ландшафту, как он уже изменился. Настоящей эволюции нет в обоих этих случаях. И остается только одна альтернатива: экосистема должна быть помещена точно в критическую точку, которая разделяет эти две крайности, то есть в точку фазового перехода между ними. Здесь виды могут извлекать пользу из изменения окружающей обстановки, которое позволяет им эволюционировать ко все большей и большей приспособленности, используя медленно изменяющееся окружение как камни для перехода реки. При этом достигнутый прогресс не будет уничтожаться слишком быстро меняющейся обстановкой».

Первая самоорганизованно критическая модель биологической эволюции была предложена в 1993 году Баком и Снепеном (BS–модель) [71]. В ней каждый вид характеризуется лишь одним числом – мерой приспособленности f .

Чем менее приспособлен вид, тем быстрее с ним должно что–то произойти. С одной стороны, низкое значение f делает весьма вероятным поражение вида в конкурентной борьбе. При этом вид вымирает, а его экологическая ниша занимает какой–то новый вид. С другой стороны, чем менее приспособлен вид, тем проще ему улучшить себя путем мутаций. При этом место вида занимает его собственный более приспособленный потомок, то есть происходит *псевдовымирание*. Так или иначе, вид с наименьшим f исчезает, а на его месте оказывается другой вид с другим f , значение которого в BS–модели полагается не зависящим от предыдущего. Для определенности будем считать новые значения f равномерно распределенными на интервале (0;1).

Связи между видами в BS–модели задаются соседством на решетке с периодическими граничными условиями (кольцо в одномерном варианте, тор – в

двумерном), ячейки которой представляют экологические ниши, занимаемые видами. Исчезновение вида вызывает исчезновение и его ближайших соседей, что можно воспринимать как следствие изменения ландшафта для последних.

Таким образом, шаг модели состоит в следующем: из расположенных по кольцу чисел выбирается наименьшее, после чего оно и два его ближайших соседа заменяются случайными числами, равномерно распределенными между нулем и единицей. И это все. По замечанию П. Бака «эта модель, вероятно, проще любой модели, которую кто-либо когда-либо создавал для чего-либо» [18]. Тем не менее, исследованию этой модели и ее модификаций посвящено не меньшее количество работ, чем моделям типа кучи песка.

Поскольку в BS-модели правила «выбывают» наименее приспособленные виды, их равновесное распределение по приспособленности в пределе бесконечно больших размеров системы дается ступенчатой функцией $\theta(f-f_c)/(1-f_c)$ [71,72] (значения f_c и других характеристик модели приведены в таблице). При этом лишь бесконечно малая доля видов имеет $f < f_c$ – их можно сравнить с неустойчивыми ячейками в моделях типа кучи песка, поскольку они должны в скором времени исчезнуть. Соответственно, под лавиной в BS-модели уместно понимать промежутки времени между моментами «устойчивости», когда $\min f = f_c$.

Таблица

Характеристики BS-модели и модели Снеппена

Величина	BS-модель		Одномерная модель Снеппена [72,74]
	Размерность пространства		
	$d = 1$ [72,73]	$d = 2$ [72]	
f_c	0.66702±0.00003	0.328855±0.000004	0.4614±0.0004
α	0.073±0.003	0.245±0.010	0.26±0.01
D	2.43±0.01	2.92±0.02	1.63±0.02
β	0.58±0.03	0.31±0.03	0.39±0.01
π	3.23±0.02	3.20±0.04	2.21±0.01

Как показывает моделирование, длительность лавин, измеряемая числом исчезновений, описывается СЗРВ с показателем α (см. таблицу). Здесь следует обратить внимание на разницу между модельной и реальной временными шкалами. Если единицей первой служит шаг модели (то есть время, необходимое на исчезновение одного вида), то единицей второй – лавина (то есть время, необходимое на появление неустойчивого вида). Поскольку реальное время жизни вида очень быстро (экспоненциально) возрастает по мере роста f [71], исчезновение неустойчивых видов во время лавины происходит довольно-таки быстро, а очередной лавины приходится ждать. Соответственно, в реальном времени эволюционный процесс выглядит как прерванное равновесие: последовательные события с распределенными степенным образом размерами.

Еще одной чертой BS-модели, на которую хотелось бы обратить внимание, является фрактальность. Спектр мощности эволюционной активности видов имеет степенной вид (1) (значения β и других показателей см. в таблице). Линейный размер l области, затронутой лавиной длительностью s , определяется формулой $l \sim s^{1/D}$, где D – размерность лавин. Наконец, вероятность того, что в дальнейшем последовательно исчезающие виды будут разделены расстоянием r , дается степенной зависимостью

$$P(r) \sim r^{-\pi}, \quad (25)$$

то есть активность совершает *полеты Леви* [75]. Все это легко объяснимо, если учесть, что активность в BS-модели имеет тенденцию возвращаться туда, где

недавно была, поскольку вновь появившиеся виды с большой вероятностью плохо приспособлены.

Несмотря на огромный успех, которым является понимание основ эволюционного процесса и качественное воспроизведение его свойств, показатели BS-модели довольно далеки от наблюдаемых на деле. Кроме того, ради простоты модели пришлось пренебречь учетом некоторых существенных черт реальной эволюции. Одна из них – это процесс видообразования и возникновения иерархической структуры филогенетического древа (виды объединяются в рода, те – в семейства и т.д.).

Учсть эту черту позволяет SM-модель, предложенная Соле и Манрубия [60, 76], в которой взаимодействие видов задается *матрицей весов*, а состояние видов – *вектором флагов* (1 – вид жив, 0 – вымер). Шаг моделирования состоит из мутации, заключающейся в случайном изменении одного из элементов матрицы взаимодействия, и вычисления «перспектив» видов, определяемых произведением этой матрицы и вектора флагов. Если соответствующий виду компонент произведения оказывается отрицательным, то вид объявляется вымершим и его флаг сбрасывается в ноль. Эта процедура повторяется до тех пор, пока виды не перестанут вымирать. После чего происходит видообразование – значения ячеек матрицы взаимодействия, описывавших вымершие виды, заменяются значениями, взятыми от случайно выбранного вида (флаги при этом устанавливаются в единицу).

Размеры вымираний оказываются распределенными степенным образом с $\alpha \approx 1.3$ [76], что довольно близко к реальности. Разнообразие таксонов имеет такой же показатель распределения, поскольку число видов, образованных из некоторого, в SM-модели совпадает с числом вымерших (если пренебречь возможностью многократного получения потомков от одного вида) [60].

При обсуждении эволюции нельзя не уделить толику внимания вечному спору биологов об «истинной» причине вымирания видов. Вид исчезает потому, что ему «повезло» жить в плохом месте в плохое время (*bad luck*), или потому, что он оказался недостаточно приспособленным к изменившемуся окружению (*bad genes*)? То есть вымирание – это результат случайностей или существенная часть эволюционного процесса [59]? Спор этот в известной степени лишен смысла, поскольку разница подчас весьма иллюзорна. Тем не менее, для некоторых массовых вымираний известны конкретные причины (типа падения метеорита), и хотя большинство из них видится беспричинными [58], нельзя наверняка утверждать, что причины не было. Кроме того, если мы хотим иметь теорию эволюции, которую можно переносить в том числе и на небиологический материал, необходимо рассмотреть все потенциальные возможности.

Пренебрежем взаимодействием между видами и будем считать, что причиной их вымирания служат исключительно внешние воздействия, которые сказываются сразу *на всех* видах и моделируются *шоками* с функцией распределения $F(x)$. Каждый вид, соответственно, характеризуется порогом устойчивости к ним. На очередном шаге моделирования происходит вымирание всех видов с устойчивостью, меньшей ударившего шока, а также небольшой доли a случайно выбранных видов (что играет роль привода модели). На месте вымерших видов появляются новые, устойчивость которых выбирается в соответствии с некоторым распределением $p_{\text{нов}}(x)$.

Описанная модель, предложенная Ньюманом, называется *моделью с когерентным шумом* [69, 77, 78]. Для довольно широкого класса функций F она характеризуется степенным распределением вымираний $p(s)$ [58, 79], природу которого можно понять, проанализировав модель *в приближении среднего поля*.

Будем считать, что система описывается стационарным распределением видов по устойчивости к шокам $\rho(x)$. В этом случае вероятность вымирания вида с устойчивостью x равна $\rho(x)F(x)$ и можно записать уравнение баланса $\rho(x)(a + F(x)) = p_{\text{нов}}(x)$. Если ограничиться случаем равномерного $p_{\text{нов}}(x)$ и пренебречь a по сравнению с $F(x)$, то получается $\rho(x) \sim F(x)^{-1}$.

Шок силы x вызывает гибель

$$s(x) = \int_{-\infty}^x \rho(\xi) d\xi \sim \int_{-\infty}^x d\xi / F(\xi) \quad (26)$$

видов. Если продифференцировать выражение (26) и подставить результат в уравнение сохранения вероятностей $p(s)ds \sim dF(x)$, то получается

$$p(s) \sim F(x)F'(x). \quad (27)$$

В общем случае систему (26)–(27) явно решить нельзя, однако в случае экспоненциального распределения шоков $F(x) \sim e^{-\lambda x}$ легко показать, что $p(s) \sim s^{-2}$, то есть имеет место СЗРВ с $\alpha=1.0$ [58,59,78,79]. Как показывает компьютерное моделирование, точное значение α несколько меньше и составляет около 0.85, а единичное значение получается при гауссовом спадаании $F(x)$ и, вообще, чем быстрее убывает хвост распределения шоков, тем больше получается показатель α [58, 79].

Таким образом, когерентное воздействие с компактным распределением может вызывать степенной отклик в системе независимых элементов. Критическое состояние здесь возникает в результате противоборства упорядочивающего вклада больших событий и разупорядочивающего вклада средних [78].

Вопрос о том, насколько модель Ньюмана применима именно к биологической эволюции, остается открытым, поскольку глобальные шоки, воздействующие на всю экосистему, крайне редки и, главное, не могут остаться незамеченными исследователями. Кроме того, если вид не вымирает в результате некоторого неблагоприятного воздействия, то приобретает к нему дополнительную устойчивость, что никак не отражено в модели. Тем не менее, модель может оказаться применимой к областям, связанным с человеческой деятельностью в современных условиях, когда мир стал глобальным, а история по-прежнему «учит только тому, что ничему не учит».

3.7. Экстремальные модели. Освобождение поверхности. Особенностью правил практически всех СК–моделей является выбор для изменения на очередном шаге элементов, имеющих *экстремальное* (минимальное или максимальное) значение. Для BS–модели, а также модели разрыва пучка волокон и модели блоков и пружин экстремальность прописана в правилах явно (исчезает наименее приспособленный вид, рвется наименее прочное волокно, первым начинает двигаться наиболее удаленный от положения равновесия блок). Однако правила и других рассмотренных нами моделей тоже в той или иной степени являются экстремальными – в модели лесного пожара вероятность возгорания кластера пропорциональна его размеру, в моделях типа кучи песка и FF–модели устойчивость теряют ячейки, значения которых превысили порог, то есть стали заведомо больше значений остальных ячеек и т.д.

Такой «экстремизм» исследователей, создававших самоорганизованно критические модели – это не прихоть или дань традиции, а отражение общих принципов устройства сложного. Чтобы система могла самоорганизоваться в критическое состояние, оно должно быть в каком-то смысле притягивающим. Однако оно не может быть положением статического равновесия, поскольку малые внешние воздействия в его окрестности не могут вызывать больших откликов. То есть система должна пребывать в динамическом равновесии, которое возникает как результат противоборства двух противоположенных тенденций⁹. Обыкновенно, одна из них – это некий естественный путь развития системы, а вторая – отбраковка (с возвращением к началу пути) элементов, продвинувшихся

⁹ Теоретически их, конечно, может быть и больше двух. Однако шансы, что три фактора или более будут играть сопоставимые роли, невелики, и в ситуации общего положения всеми, кроме двух, бывает можно пренебречь.

по нему слишком далеко, то есть экстремальное правило. При этом существенно, что такая отбраковка продвигает в развитии другие элементы системы благодаря наличию между ними (локального) взаимодействия.

Наклон кучи увеличивается за счет добавления песчинок, что вызывает лавины, уменьшающие его. Деревья растут, увеличивая способность леса проводить огонь – вспыхивают пожары, уничтожающие деревья. Блоки, на которые действует нарастающая сила, соскальзывают, возвращаясь к положению равновесия, увеличивая нагрузку на соседние блоки. Эволюция, идущая путем проб и ошибок, порождает плохо приспособленные виды, которые исчезают, вынуждая к дальнейшей эволюции связанные с ними виды...

Таким образом, происходит динамическая стабилизация системы. Однако для стабилизации именно в окрестности критической точки, где локальное взаимодействие может привести к целостному поведению, необходимо, чтобы скорость отбраковки (релаксации) была много больше развития (возмущения), то есть необходимо разделение временных масштабов. Как правило, оно также достигается благодаря экстремальным правилам, что, собственно говоря, и позволяет на их основе строить простые СК-модели.

Поясним сказанное на примере процесса *освобождения поверхности* (inter-face depinning), происходящего при вытеснения воздуха жидкостью в пористой смачиваемой среде [80]. Здесь имеет место противоборство между зацеплением границы раздела фаз за дефекты среды и давлением, проталкивающим жидкость через поры, вынуждая ее освобождаться в тех точках, где *цепляющая сила* (pinning force) невелика. Роль локального взаимодействия играет поверхностное натяжение, стремящееся уменьшить площадь границы раздела.

Зависимость скорости продвижения жидкости от давления дается формулой $V \sim (p - p_c)^{\nu}$, характерной для фазовых переходов II рода. Чтобы произошла самоорганизация в критическое состояние, необходимо установить параметр порядка – скорость – в значение +0, что соответствует критическому давлению p_c , при котором движение поверхности имеет характер отдельных «рывков», вызываемых флуктуациями [81]. При этом, естественно, наибольшие шансы на освобождение имеет тот участок, на который действует наименьшая цепляющая сила.

Таким образом, не составляет труда описать правила клеточного автомата для процесса освобождения поверхности, называемого моделью Снепена [82]. В одномерном случае система характеризуется положением участков поверхности h_i и значениями действующей на нее в точках (i, h_i) цепляющей силы $f(i, h_i)$, которые можно в простейшем случае считать некоррелированными случайными числами.

Шаг моделирования состоит в нахождении участка i с минимальной цепляющей силой $f(i, h_i)$ и продвижении на этом участке поверхности на одну единицу: $h_i \rightarrow h_i + 1$. При этом поверхностное натяжение учитывается следующим образом (условие Кима – Кострелица [83]): если для какого-то участка поверхности оказалось $h_j < h_{j+1} - 1$, то участок j продвигается до тех пор, пока это неравенство не нарушится (то есть пока не будет выполнено $|Vh| \leq 1$ для всех участков поверхности). Все участки поверхности, подвергнувшиеся продвижению, получают новые случайные значения цепляющей силы, выбираемые из некоторого распределения.

Правила BS-модели и модели Снепена практически идентичны – единственное различие состоит в механизме локального взаимодействия. Если в первой ближайšie соседи наименее приспособленного вида в любом случае исчезают вместе с ним, то во второй продвигаются лишь «отстающие» участки поверхности (зато не только непосредственно примыкающие к экстремальному участку, но, возможно, и следующие за ними). Эту особенность правил модели Снепена с эволюционной точки зрения можно трактовать как принудительную «модернизацию» тех элементов, соседи которых ушли вперед более, чем на одно поколение.

Как показывают данные моделирования (см. таблицу), это приводит к

несколько большему по сравнению с BS-моделью значению показателя α , характеризующего распределение лавин по размерам, что означает некоторое их уменьшение. Кроме того, заметно меньше становится показатель распределения полетов Леви μ , то есть активность значительно сильнее «скачет» по системе, нежели в случае эволюции. Это обусловлено тем, что правила не позволяют участкам поверхности слишком долго оставаться неподвижными и активность вынужденно посещает все новые и новые участки.

Как и в случае модели эволюции лавина определяется как последовательность шагов между моментами, когда все участки поверхности имеют цепляющую силу $f > f_c$. Такие участки, для освобождения которых недостаточно давления на жидкость и необходимы флуктуации или воздействие со стороны соседних участков, уместно назвать блокирующими. Поскольку система находится в критическом состоянии, их концентрация равна порогу направленной перколяции (здесь наблюдается прямая аналогия с концентрацией МЭУ для кучи песка). В самом деле, если мы уменьшим концентрацию блокирующих участков (увеличим давление), то они перестанут образовывать связный кластер, способный остановить поверхность, и последняя будет двигаться с ненулевой скоростью. Если мы увеличим их концентрацию (уменьшим давление), то флуктуаций будет уже не достаточно для освобождения участков даже с минимальной цепляющей силой, и поверхность не будет двигаться вовсе.

Таким образом, модель Снепена можно рассматривать как модель самоорганизованной направленной перколяции. Характеристики направленной перколяции, однако, хорошо известны. Так, например, показатель шероховатости χ , определяющий зависимость ширины поверхности $w(l) = (\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2)^{1/2} \sim l^\chi$ от размера участка l , равен 0.633 ± 0.001 .

Поскольку размер лавины s есть не что иное, как объем, «заметаемый» поверхностью, его можно представить как $s \sim l \cdot w(l) \sim l^{1+\chi}$, где l – число затронутых лавиной участков. То есть размерность лавин $D = 1 + \chi = 1.633$ в полном согласии с данными, приведенными в таблице [72, 82].

3.8. Управление критичностью. Модель гекатонхейров¹⁰. Весьма важным, хотя и малоизученным, является вопрос о возможности управления свойствами критических систем. Оговоримся, что здесь не имеется в виду управление тем, находится ли система в критическом состоянии или нет. Теоретически разрушить критичность несложно, но тем самым мы из сложной системы сделаем простую. На практике это означает либо, что подобная операция просто невыполнима, либо то, что, проделав ее, мы выплеснем вместе с водой и младенца, лишив систему возможности функционировать. Поэтому интерес для исследования представляет вопрос, можем ли мы управлять поведением системы в критическом состоянии?

Под «управлением» здесь понимается воздействие на значения показателей распределений, которые определяют то, в какой степени сложная система является катастрофичной. Управление критическими системами представляет собой нетривиальную задачу. Дело в том, что критические системы обыкновенно являются *грубыми*, то есть набор характеризующих их показателей не меняется при незначительном изменении правил. Более того, зачастую совершенно разные по своей природе и правилам модели имеют один и тот же набор показателей. В таком случае говорят, что эти модели попадают в один *класс универсальности*.

Кроме грубости критических систем наши возможности по управлению ими существенно ограничиваются их сложностью. Мы можем воздействовать либо на всю систему в целом (меняя, скажем, ее статистические характеристики типа температуры), либо на некоторое число отдельных ее элементов. Примером

¹⁰ Гекатонхейры – в греческой мифологии сторукие великаны, дети Урана и Геи, стражи врат Тартара.

первого подхода может служить OFC-модель, для которой, научившись (на практике, конечно, а не в компьютерной программе) менять степень сохранения q , мы смогли бы варьировать показатель распределения α .

Второй подход удалось реализовать в так называемой модели с защитой минимумов, или модели гекатонхейров [84], являющейся обобщением модели Снеппена освобождения поверхности.

Пронумеруем в модели Снеппена все значения цепляющей силы на поверхности в порядке их возрастания, начиная с нуля: $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$. В то время как в модели Снеппена для продвижения всегда выбирался участок с минимальной цепляющей силой, то есть номером 0, мы будем продвигать n -ый участок, считая минимумы с нулевого по $(n-1)$ -й защищенными от продвижения.

Это можно воспринимать как наличие некоего n -рукого агента (гекатонхейра), который отслеживает положение n участков с наименьшей цепляющей силой и придерживает их, что называется, руками, препятствуя продвижению.

Такая модификация правил, очевидно, не окажет влияния ни на показатель распределения лавин α [85], ни на их размерность D [82]. Однако этого нельзя сказать в отношении показателя полетов Леви π . На рис. 8 приведены графики распределения полетов точки активации при различных n . Легко видеть, что наклон графика уменьшается с ростом n .

Это легко объяснимо. До тех пор пока при продвижении соседей защищенные участки не затрагиваются, практически не имеет значения, какой по счету минимум выбирается для активации, поскольку защищенные участки исключены из динамики и можно считать, что их как бы и нет. Однако, как только какой-то из них из-за условия ограниченности градиента подвергнется продвижению, тождественность модели Снеппена и модели гекатонхейров нарушается. Это происходит потому, что продвинутый элемент получает новое значение цепляющей силы, а при этом могут измениться порядковые номера минимумов, и активизации на следующем шаге подвергается совсем не тот элемент, который активизировался бы при аналогичных обстоятельствах в модели Снеппена. Таким образом, к обычным полетам Леви добавляются скачки положения активности, когда гекатонхейр «перехватывает руки» из-за того, что в них оказалось не то, что ему следует держать. И чем большую долю участков ему приходится удерживать, тем чаще это будет происходить.

В силу сказанного понятно, что показатель распределения полетов Леви π должен зависеть не непосредственно от n , а от величины $u=n/L$ (где L – размер системы), определяющей «плотность рук». Варьируя величину u , мы можем непрерывно менять значение одного из критических показателей модели, не изменяя при этом остальных, которые определяют ее принадлежность к тому же классу универсальности, что и направленная перколяция и модель Снеппена. Это явление получило название *мягкой универсальности* [84], в котором подчеркивается отличие от обычной – грубой – универсальности, присущей большинству критических систем.

В заключение отметим еще одно существенное и любопытное обстоятельство. При $u^* \approx 2.5 \cdot 10^{-5}$ значение π проходит через двойку. Это значит, что при меньшей «плотности рук» средняя длина полета точки активации

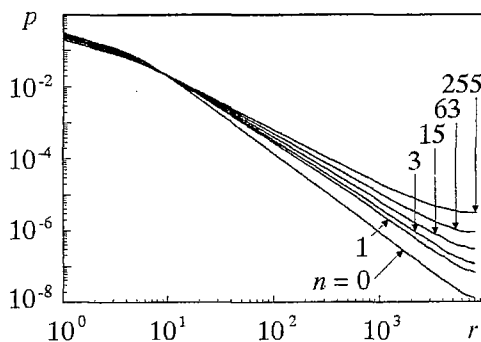


Рис. 8. Распределение длин полетов Леви точки активации. Графики (снизу вверх) соответствуют $n=0, 1, 3, 15, 63, 255$ для системы с $L=16384$ с усреднением по 500 млн. шагов. Некоторое закругление вверх графиков при больших r обусловлено тем, что данные «складываются» из-за невозможности отличить полет длиной r от полета длиной $L-r$

$$\langle r \rangle = \int P(r) r dr \quad (28)$$

не зависит от размеров системы, в то время как при большей она становится порядка L (так как интеграл (28) сходится лишь благодаря нарушению зависимости (25) при $r \sim L$). А это уже не количественное, а качественное изменение поведения.

Модель гекатонхейров легко допускает разнообразные интерпретации. Например, она отражает работу системы безопасности или охраны порядка в условиях нерешительности и нехватки ресурсов. Попытка удерживать руками наиболее опасные участки приводит к прорывам на тех участках, на которые рук не хватило. Если прорывы индуцируются внешними условиями, то такая защита будет иметь своим следствием лишь изменение географии событий. Показатель распределения полетов активности будет тем меньше, чем больше будет плотность держащих рук. А доведя уровень последней до значения u^* , мы увидим, что события, которые до того были худо-бедно локализованы (рассчитывать на «хорошую» локализацию для точки, совершающей полеты Леви с $\lambda < 3$, очевидно, не приходится¹¹), стали происходить повсюду. Качественная аналогия очевидна, а вот вывод нетривиален: если все плохо, не трогай – лучше не станет, только расплзется.

3.9. Мультипликативный процесс. В завершение темы опишем еще один формальный механизм появления СЗРВ, который, как и критический ветвящийся процесс, не будучи самоорганизованным, позволяет, однако, получить более полное представление о природе масштабной инвариантности.

Широкий класс процессов, связанных с воспроизводством, может быть описан отображением вида [86]

$$x_{t+1} = k_t x_t, \quad (29)$$

коэффициент которого k_t детерминированным или случайным образом зависит от номера шага времени t (мы ограничимся рассмотрением чисто случайного k). Отображение (29) называется *мультипликативным процессом* [86–88] и возникает в тех случаях, когда состояние системы (численность популяции, стоимость портфеля акций, число заболевших при эпидемии и т.п. [86]) на шаге $t+1$ зависит от состояния на шаге t и общей обстановки на этом шаге, описываемой коэффициентом k .

Данное отображение удобно рассматривать в логарифмическом представлении

$$\xi_{t+1} = \xi_t + \kappa_t, \quad (30)$$

введя обозначения $\xi_t = \ln x_t$ и $\kappa_t = \ln k_t$. Поскольку ξ_t представляет собой сумму независимых случайных величин, при достаточно больших t она будет нормально распределена (а x_t будет, соответственно, иметь логнормальное распределение) с параметрами, зависящим от t [87]. Распределение оказывается нестационарным, поскольку, как легко видеть, $x \rightarrow 0$ при $\nu = \langle \kappa \rangle < 0$ и $x \rightarrow \infty$ при $\nu > 0$. Чтобы добиться стационарности, необходимо дополнить отображение (29) правилом, «не подпускающим» x к его предельному значению. Если ограничиться случаем $\nu < 0$ (случай $\nu > 0$ сводится к нему рассмотрением вместо x и k обратных величин), то речь идет об *отталкивании от нуля*, которое обычно объясняется дискретной природой процесса или действием механизмов, препятствующих вырождению.

Отталкивание от нуля можно ввести многими способами [86–88], например, заменив (29) на

$$x_{t+1} = k_t x_t + b_t, \quad (31)$$

¹¹ Отметим, что для BS-модели $\lambda > 3$ и активность долго «гостит» в одной области, то есть эволюционный процесс обыкновенно затрагивает не всю экосистему целиком, а идет лишь в какой-то ее области.

где b_i – небольшая положительная детерминированная или случайная добавка (в этом случае, как легко видеть, $\langle x \rangle = \langle b \rangle / (1 - \langle k \rangle)$ [86]), либо на

$$x_{t+1} = \max \{k_t x_t; c\}, \quad (32)$$

то есть не позволяя x_t опускаться ниже некоторого значения c (без потери общности можно считать, что каждый раз, когда x_t падает ниже c , начинается новый процесс с $x_0=c$). Кроме того, предполагаем, что, несмотря на ограничение $v < 0$, коэффициент отображения k с заметной долей вероятности принимает значения больше 1, то есть что x может расти не только за счет введенного отталкивания от нуля, но и «естественным» образом.

В отличие от отображения (29) отображения (31) и (32) характеризуются экспоненциальным стационарным распределением $p(\xi)$ и, соответственно, степенным $p(x)$.

Если обозначить через $\pi(k)$ распределение вероятностей смещения k , для $p(\xi)$ можно записать рекуррентное соотношение

$$p(\xi, t+1) = \int p(\xi - k, t) \pi(k) dk, \quad (33)$$

разложив в котором $p(\xi - k)$ в ряд по степеням k до второго члена и перейдя к непрерывному времени, получаем [87]

$$\partial p / \partial t = -v \partial p / \partial \xi + T \partial^2 p / \partial \xi^2, \quad (34)$$

где $T = \langle k^2 \rangle / 2$. Можно убедиться, что стационарное решение уравнения (34) при условии ограниченности ξ снизу имеет вид

$$p(\xi) \sim e^{-\xi/T}, \quad (35)$$

что приводит к степенному виду (2) для распределения $p(x)$ с

$$\alpha = -v/T. \quad (36)$$

Этот результат легко можно получить и без вычислений, поскольку уравнение (34) описывает частицу, находящуюся в ограниченном слева линейном потенциале напряженности v при температуре T . Как известно, плотность вероятности в этом случае описывается распределением Больцмана (35) [87].

Формула (36) для показателя распределения является приближенной. Чтобы найти выражение для точного значения, подставим распределение (35) в формулу (33)

$$e^{-\alpha \xi} = \int e^{-\alpha(\xi - k)} \pi(k) dk.$$

Откуда получаем уравнение $\langle e^{\alpha k} \rangle = \langle k^\alpha \rangle = 1$ [86,87].

Здесь необходимо обратить внимание на два обстоятельства, делающих мультипликативный процесс более адекватным образом самоорганизованно критических явлений, чем устойчивые законы распределения или ветвящиеся процессы:

1) в отличие от устойчивых законов распределения, характеризующихся значениями $\alpha \leq 2$, СЗРВ, порождаемые мультипликативным процессом, могут иметь любые положительные α ;

2) в отличие от ветвящихся процессов, которые характеризуются чистым СЗРВ только при единичном коэффициенте размножения, мультипликативный процесс описывается распределениями с тяжелыми хвостами и при $\langle k \rangle$, отличном от 1.0 (причем показатель, вообще говоря, отличается от $\alpha = 1/2$, присущего ветвящимся процессам).

Последнее обстоятельство особенно важно, поскольку отображение (29) в каком-то смысле тоже представляет собой ветвящийся процесс, когда на очередном шаге происходит превращение каждой частицы в k частиц. Однако существенным обстоятельством здесь является то, что флуктуации величины k действуют *одновременно на все* делящиеся частицы, в то время как для обычного ветвящегося процесса флуктуации *независимы* для каждой делящейся частицы [87]. Поэтому, если математическое ожидание числа частиц, получающихся при делении одной частицы, обозначить через m , а дисперсию через D , то математическое ожидание числа частиц, получающихся при делении x частиц, есть mx , а дисперсия – xD .

Если попытаться представить шаг ветвящегося процесса в виде (29), то математическое ожидание и дисперсия коэффициента k будут равны значениям этих величин для ветвящегося процесса, отнесенным к одной частице, то есть m и D/x , соответственно. Таким образом, чем больше число частиц, делящихся на некотором шаге, тем более узким будет распределение для коэффициента k , описывающего этот шаг в терминах мультипликативного процесса (самоусреднение). А поскольку коэффициент размножения $m < 1$, то для достаточно больших x дальнейшее увеличение числа частиц становится практически невероятным, что и приводит к нарушению степенного вида закона распределения для некритического ветвящегося процесса.

Ситуацию, однако, можно «выправить», если поставить параметры ветвящегося процесса в зависимость от числа делящихся частиц, то есть позволить частицам «чувствовать» друг друга, например, следующим образом. Пусть каждая из имеющихся x частиц с вероятностью $q_x = m/x$ превращается в x частиц, а с вероятностью $p_x = 1 - q_x$ – распадается. Тогда математическое ожидание и дисперсия для коэффициента k равны, соответственно, m и $m - m^2/x$, то есть при больших x зависимостью k от x можно пренебречь, и получается обыкновенный мультипликативный процесс, описываемый СЗРВ.

Сформулированные правила ветвящегося процесса можно интерпретировать как индуцированный риск, то есть проблемы, порождаемые уже имеющимися, причем в количестве, пропорциональном их числу. Именно такое целостное поведение и типично для критических систем, однако не следует забывать, что установка параметров ветвящегося или мультипликативного процесса в характерные значения, создающая условия для появления степенных зависимостей с определенными показателями, происходит путем самоорганизации на основе локальных правил. То есть мультипликативный процесс можно рассматривать для описания механизма появления степенных зависимостей, но не для объяснения их природы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант № 99–01–01091 и РГНФ – грант № 99–03–19696.

Библиографический список

1. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. Теория риска и технологии обеспечения безопасности. Подход с позиций нелинейной динамики. Часть III// Проблемы безопасности в чрезвычайных ситуациях. 1998. № 11. С. 5.
2. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. Теория риска и технологии обеспечения безопасности. Подход с позиций нелинейной динамики. Часть III// Проблемы безопасности в чрезвычайных ситуациях. 1999. № 1. С. 18.
3. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л. и др. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. М.: Наука, 2000 (в печати).
4. Катастрофы и общество. М.: Контакт–Культура, 2000. 332 с.
5. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. Управление риском и устойчивое развитие. Человеческое измерение // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 6. С. 12.

6. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
7. *Зыков В.С.* Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. М.: Наука, 1984. 166 с.
8. *Obukhov S.P.* Self-organized criticality: Goldstone modes and their interactions // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 12. P. 1395.
9. *Gould S.J., Eldredge N.* Punctuated equilibrium comes of age // *Nature.* 1993. Vol. 366. P. 223.
10. *Lowen S.B., Teich M.C.* Fractal renewal processes generate $1/f$ noise // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47, № 2. P. 992.
11. *Maslov S., Paczuski M., Bak P.* Avalanches and $1/f$ noise in evolution and growth models // *Phys. Rev. Lett.* 1994. Vol. 73, № 16. P. 2162.
12. *Kanamori B.H., Anderson D.L.* Theoretical basis of some empirical relations in seismology // *Bull. Seism. Soc. Am.* 1975. Vol. 65, № 5. P. 1073.
13. *Голыцын Г.С.* Землетрясения с точки зрения теории подобия // *ДАН.* 1996. Т.346, № 4. С. 536.
14. Reduction and predictability of natural disaster / Eds J.B. Rundle, D.L. Turcotte, W. Klein // *Proceedings of the workshop «Reduction and predictability of natural disasters» held January 5–9, 1994 in Santa Fe, New Mexico, 1995.*
15. *Rhodes C.J., Anderson R.M.* Power laws governing epidemics in isolated populations // *Nature.* 1996. Vol. 381. P. 600.
16. *Turcotte D.* *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics.* Cambridge Univ. Press, 1997 (Second Edition).
17. *Mantegna R.N., Stanley H.E.* Scaling behavior in the dynamics of an economic index // *Nature.* 1995. Vol. 376. P. 46.
18. *Bak P.* *How nature works: the science of self-organized criticality.* Springer-Verlag, New York, Inc. 1996. 205 p.
19. *Lu E.T., Hamilton R.J.* Avalanches and the distribution of solar flares // *Astrophysical Journal.* 1991. Vol. 380. P. L89.
20. *Lu E.T., Hamilton R.J., McTiernan J.M., Bromund K.R.* Solar flares and avalanches in driven dissipative systems // *Astrophysical Journal.* 1993. Vol. 412. P. 841.
21. *Подлазов А.В., Осокин А.Р.* Самоорганизованно критическая модель солнечных вспышек // *Математика. Компьютер. Образование.* Вып.7, часть II, С.384–392. Сборник трудов конференции. М.: Прогресс–Традиция, 2000.
22. *Яблонский А.И.* Математические модели в исследовании науки. М.: Наука, 1986. 352 с.
23. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967. 752 с.
24. *Харрис Т.* Теория ветвящихся процессов. М.: Мир, 1966. 355 с.
25. *Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.* Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т.5, № 5. С. 89.
26. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения // *Теория вероятностей и математическая статистика.* М.: Наука, 1983. 304 с.
27. *Золотарев В.М.* Устойчивые законы и их применения // *Новое в жизни, науке, технике. Математика, кибернетика.* № 11. М.: Знание, 1984. 64 с.
28. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 38, № 1. P. 364.
29. *Zhang Y–C.* Scaling theory of self-organized criticality // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, № 5. P. 470.
30. *Majumdar S.N., Dhar D.* Height correlations in the Abelian sandpile mode // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1991. Vol. 24. P. L357.
31. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. 298 с.
32. *Sornette D., Johansen A., Dornic I.* Mapping self-organized criticality onto criticality // *J. Phys. I (France).* 1995. Vol. 5. P. 325.
33. *Clar S., Drossel B., Schwabl F.* Forest fires and other examples of self-organized criticality // *J. Phys.: Cond. Mat.* 1996. Vol. 8. P. 6803.

34. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, № 16. P. 1659.
35. *Bak P., Chen K.* Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: Self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics // *Ricerche Economiche*. 1993. Vol. 47. P. 3.
36. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Vol. 66, № 20. P. 2669.
37. *Manna S.S.* Critical exponents of the sand pile models in two dimensions // *Physica A*. 1991. Vol. 179, № 2. P. 249.
38. *Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 68, № 8. P. 1244.
39. *Christensen K., Olami Z.* Scaling, phase transition, and nonuniversality in a self-organized critical cellular-automaton model// *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46, № 4. P. 1829.
40. *Grassberger P.* Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49, № 3. P. 2436.
41. *Bottani S., Delamotte B.* Self-organized criticality and synchronization in pulse coupled relaxation oscillator systems: the Olami, Feder and Christensen model and the Feder and Feder model// *Physica D*. 1997. Vol. 103, № 1-4. P. 430.
42. *Klein W., Rundel J.* Comment on «Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes»// *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 8. P. 1288.
43. *Carlson J.M., Langer J.S.* Properties of earthquake generated by fault dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, № 22. P. 2632.
44. *Carlson J.M., Langer J.S.* Mechanical model of an earthquake fault// *Phys. Rev. A*. 1989. Vol. 40, № 11. P. 6470.
45. *de Sousa Vieira M.* Self-organized criticality in a deterministic mechanical model // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46, № 10. P. 6288.
46. *Liu W.-S., Lu Y.N., Ding E.J.* Dynamical phase transition and self-organized criticality in a theoretical spring-block model// *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, № 3. P. 1916.
47. *Held G.A., Solina D.H. II, Keane D.T., Haag W.J., Horn P.M., Grinstein G.* Experimental study of critical-mass fluctuations in an evolving sandpile // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 9. P. 1120.
48. *Jaeger H.M., Liu C., Nagel S.R.* Relaxation at the angle of repose // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, № 1. P. 40.
49. *Paczuski M., Boettcher S.* Universality in sandpiles, interface depinning, and earthquake models // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, № 1. P. 111.
50. *Andersen J.V., Sornette D., Leung K.-T.* Tri-critical behavior in rupture induced by disorder // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 2140.
51. *Zhang S., Fan Q., Ding E.* Critical processes, Langevin equation and universality // *Phys. Lett. A*. 1995. Vol. 203. P. 83.
52. *Bak P., Chen K., Tang C.* A forest-fire model and some thoughts on turbulence // *Phys. Lett. A*. 1990. Vol. 147, № 5-6. P. 297.
53. *Drossel B. and Schwabl F.* Self organization in a forest-fire model // *Fractals*. 1993. Vol. 1, № 4. P. 1022.
54. *Drossel B., Clar S., Schwabl F.* Crossover from percolation to self-organized criticality // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50, № 4. P. R2399.
55. *Grassberger P., Kantz H.* On a forest fire model with supposed self-organized criticality // *J. of Stat. Phys.* 1991. Vol. 63, № 3-4. P. 685.
56. *Drossel B.* Self-organized criticality and synchronization in the forest-fire model // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 936.
57. *Newman M.E.J., Sibani P.* Extinction, diversity and survivorship of taxa in the fossil record. <http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9811003>
58. *Newman M.E.J.* A model of mass extinction// *J. Theor. Biol.* 1997. Vol. 189. P. 235.

59. *Roberts B.W., Newman M.E.J.* A model for evolution and extinction // *J. Theor. Biol.* 1996. Vol. 180. P. 39.
60. *Sole R.V., Manrubia S.C.* Criticality and unpredictability in macroevolution// *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, № 4. P. 4500.
61. *Sneppen K., Bak P., Flyvbjerg H., Jensen M.H.* Evolution as a self-organized critical phenomena // *Proc. Natl. Acad. Sci USA.* 1995. Vol. 92. P. 5209.
62. *Sole R.V., Bascompte J.* Are critical phenomena relevant to large-scale evolution?// *Proc. R. Soc. London B.* 1996. Vol. 263. P. 161.
63. *Sole R.V., Alonso D., McKane A.* Scaling in a multispecies network model ecosystem. <http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9907010>
64. *Keitt T.H., Stanley H.E.* Dynamics of North American breeding bird populations // *Nature.* 1998. Vol. 393. P. 257.
65. *Sole R.V., Manrubia S.C., Benton M., Bak P.* Self-similarity of extinction statistics in the fossil record // *Nature.* 1997. Vol. 388. P. 764.
66. *Burlando B.* The fractal dimension of taxonomic systems // *J. Theor. Biol.* 1990. Vol. 146. P. 99.
67. *Burlando B.* The fractal geometry of evolution // *J. Theor. Biol.* 1993. Vol. 163. P. 161.
68. *Newman M.E.J., Eble G.J.* Decline in extinction rates and scale invariance in the fossil record. <http://xxx.lanl.gov/abs/adap-org/9809004>
69. *Newman M.E.J.* Self-organized criticality, evolution and the fossil extinction record// *Proc. R. Soc. London B.* 1996. Vol. 263. P. 1605.
70. *Bak P., Flyvbjerg H., Lautrup B.* Coevolution in a rugged fitness landscape// *Phys. Rev. A.* 1992. Vol. 46, № 10. P. 6724.
71. *Bak P., Sneppen K.* Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution// *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 71, № 24. P. 4083.
72. *Paczuski M., Maslov S., Bak P.* Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models// *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 53, № 1. P. 414.
73. *Grassberger P.* The Bak - Sneppen model for punctuated evolution// *Phys. Lett. A.* 1995. Vol. 200. P. 277.
74. *Maslov S.* Time directed avalanches in invasion models// *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74, № 5. P. 562.
75. *Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G.* Beyond Brownian motion// *Physics Today.* 1996 (February). P. 33.
76. *Sole R.V., Manrubia S.C.* Extinction and self-organized criticality in a model of large-scale evolution // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 1. P. R42.
77. *Newman M.E.J., Roberts B.W.* Mass-extinction: Evolution and the effects of external influences on unfit species // *Proc. R. Soc. London B.* 1995. Vol. 260. P. 31.
78. *Newman M.E.J., Sneppen K.* Avalanches, scaling and coherent noise // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 6. P. 6226.
79. *Sneppen K., Newman M.E.J.* Coherent noise, scale invariance and intermittency in large systems // *Physica D.* 1997. Vol. 110. P. 209.
80. *Rubio M.A., Edwards C.A., Dougherty A., Gollub J.P.* Self-affine fractal interface from immiscible displacement in porous media // *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 63, № 16. P. 1685.
81. *Leschhorn H., Tang L.-H.* Avalanches and correlations in driven interface depinning // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 2. P. 1238.
82. *Sneppen K.* Self-organized criticality and interface growth in a random medium // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69, № 24. P. 3539.
83. *Kim J.M., Kosterlitz J.M.* Growth in restricted solid-on-solid model// *Phys. Rev. Lett.* 1989. Vol. 62, № 19. P. 2289.
84. *Подлазов А.В.* Модель гекатонхейров освобождения поверхности и мягкая универсальность в теории самоорганизованной критичности// *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1999. Т. 7, № 6. С. 3.
85. *Maslov S., Paczuski M.* Scaling theory of depinning in the Sneppen model// *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 50, № 2. P. R643.
86. *Sornette D.* Linear stochastic dynamics with nonlinear fractal properties// *Physica A.* 1998. Vol. 250. P. 295.

87. Sornette D., Cont R. Convergent multiplicative processes repelled from zero: power laws and truncated power laws // J. Phys. France I. 1997. Vol. 7. P. 431.

88. Sornette D. Multiplicative processes and power laws // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 4811.

*Институт прикладной
математики РАН*

*Поступила в редакцию 21.11.00
после доработки 28.02.01*

SELF-ORGANIZED CRITICALITY AND RISK ANALYSIS

A.V. Podlasov

We analyze the catastrophic behaviour of many complex systems from the point of view of the theory of self-organized criticality. This theory is now one of the most rapidly growing branches of the nonlinear science.

Main attention is focused on presentation and generalization of conceptions of the theory of self-organized criticality related to the risk management. Among the phenomena considered there are flicker-noise, punctuated equilibrium, power probability distributions and property of integrity.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). Работает в Институте прикладной математики РАН, аспирант Московского физико-технического института. Область интересов – нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности. E-mail: tiger@spp.keldysh.ru