Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т.9, № 3, 2001 УДК 517.9

К ВОПРОСУ О РАЦИОНАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ИНТЕРВАЛА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ, В СПЕКТРЕ КОТОРЫХ ИМЕЕТСЯ ДОМИНАНТНАЯ ЧАСТОТА

О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов

Проанализированы основные положения, лежащие в основе общепринятой оценки τ=(0.2...0.3)τ_c, связывающей длительность интервала дискретизации τ со временем корреляции хаотического процесса τ_c. Показано, что из двух масштабов, характеризующих корреляционную функцию процессов, спектр которых содержит доминантную частоту, на роль τ_c может претендовать только короткий масштаб, сравнимый с периодом доминантных колебаний. При таком выборе τ_c соблюдаются требования, налагаемые на интервал дискретизации τ теоремой Котельникова.

Вопрос о рациональном выборе интервала дискретизации τ, то есть интервала между последовательными отсчетами в задаче об адекватном (без заметной потери информации) представлении непрерывного сигнала $y(t)$ дискретным временным рядом $\{y(t)\}\equiv\{y(k\tau)\}$, представляет интерес для множества систем, использующих цифровую обработку сигналов, в том числе и, в первую очередь, для радиотехнических и связанных систем и систем автоматического управления.

Во многих руководствах, (см. например, 1–3), для выбора τ рекомендуется оценка

$$\tau \approx (0.2\ldots0.3)\tau_c, \tag{1}$$

где τ – время корреляции процесса, подвергаемого дискретизации. Оценка (1) широко используется, в частности, при дискретном представлении хаотических процессов для задач восстановления аттракторов и для оценки размерности хаотических систем [4–6]. В нашем недавнем обзоре [7] мы рекомендовали читателям «ПНД» оценочную формулу (1) для практического использования при решении обратных задач хаотической динамики.

Общепринятые рекомендации (1) были подвергнуты критике в комментариях [8], опубликованных от имени редколлегии журнала «Прикладная нелинейная динамика» в том же номере, что и наш обзор [7]. В комментариях проведен анализ хаотической системы Ресслера и на основании этого анализа сделан вывод, что оценка (1) дает слишком большие значения интервала τ, выходящие за границы, регламентированные теоремой Котельникова.

Понимая важность проблемы адекватного выбора интервала дискретизации

τ для решения многих задач нелинейной динамики (в этом вопросе мы полностью солидаризируемся с мнением редколлегии), в данной работе мы хотели бы, исходя из первых принципов, уточнить интерпретацию времени корреляции τ_c в оценке (1), с тем чтобы исключить нарушение условий, налагаемых теоремой Котельникова.

Приводимое ниже уточнение, стимулированное комментариями [8], касается процессов, в спектре которых имеется доминантная частота. Ниже мы покажем, что корреляционная функция таких процессов характеризуется двумя временными масштабами – коротким τ_{c1} и длинным τ_{c2}, при этом в соответствии со смыслом теоремы Котельникова в оценке (1) должен фигурировать короткий масштаб τ_{c1}, а не масштаб τ_{c2}, как это было принято в [8]. Тем самым в оценке (1) ликвидируется неоднозначность, которая может привести к нарушению условий применимости теоремы Котельникова.

Рассмотрим сначала ограничения на интервал дискретизации, вытекающие из теоремы Котельникова. Верхний предел для допустимой длительности интервала дискретизации τ устанавливает теорема Котельникова (см., например, [9]), согласно которой

$$\max\tau = 1/(2F_{\max}), \tag{2}$$

где F_{max} – это максимальная частота (верхняя граница) спектра. На практике под $F_{\max}$ понимают интервал частот, отсчитываемый от нулевой частоты, в котором содержится основная доля (50% или 90%) энергии исследуемого процесса.

Практические рекомендации для первичного выбора интервала дискретизации были выработаны еще на заре развития цифровых методов обработки сигналов. Согласно этим рекомендациям, интервал дискретизации τ следует выбирать так, чтобы на наименьших квазипериодах (наименьших характерных временных интервалах) исследуемого процесса $T_{\min}$ укладывалось не менее 6÷10 отсчетов [1–3],

$$\tau \le (1/10 \ldots 1/6)T_{\min}. \tag{3}$$

Очевидно, такой выбор τ согласуется с требованиями теоремы Котельникова (2), так как длительность минимального квазипериода $T_{\min}$ сопоставима с $1/F_{\max}$, в результате чего τ заведомо не может превысить $max\tau = 1/(2F_{\max})$.

Оценка (3) носит *ориентировочный* характер. В каждом конкретном случае в зависимости от условий задачи и от возможностей, которыми располагает пользователь, возможна та или иная оптимизация τ. Если верхний предел для времени дискретизации τ регламентирован требованиями теоремы Котельникова (2), то нижний предел ограничен иными условиями. Дело в том, что при снижении τ возникают по меньшей мере три нежелательных эффекта.

Во–первых, при $\tau \to 0$ заметно возрастает общее число отсчетов $N=T/\tau$ внутри выборки длительностью T, что существенно усложняет обработку массива данных $\{y_k\}$. Во–вторых, с уменьшением τ обратная ковариационная матрица, построенная на отсчетах y_k, становится плохо обусловленной [1–3], при этом многие алгоритмы обработки, в частности, регрессионный и авторегрессионный алгоритмы экстраполяции сигнала теряют устойчивость. Наконец, в–третьих, с уменьшением τ возрастает погрешность вычисления производных наблюдаемой функции $y(t)$, что неблагоприятно отражается на решении множества практических задач. Практический компромисс между указанными выше крайностями как раз и устанавливается рекомендацией (3).

Для иллюстрации принципа выбора $F_{\max}$ рассмотрим процессы четырех типов, спектры и корреляционные функции которых представлены на рис. 1.

В случае процессов с нулевой несущей спектр $\Phi(f)$ сосредоточен в области

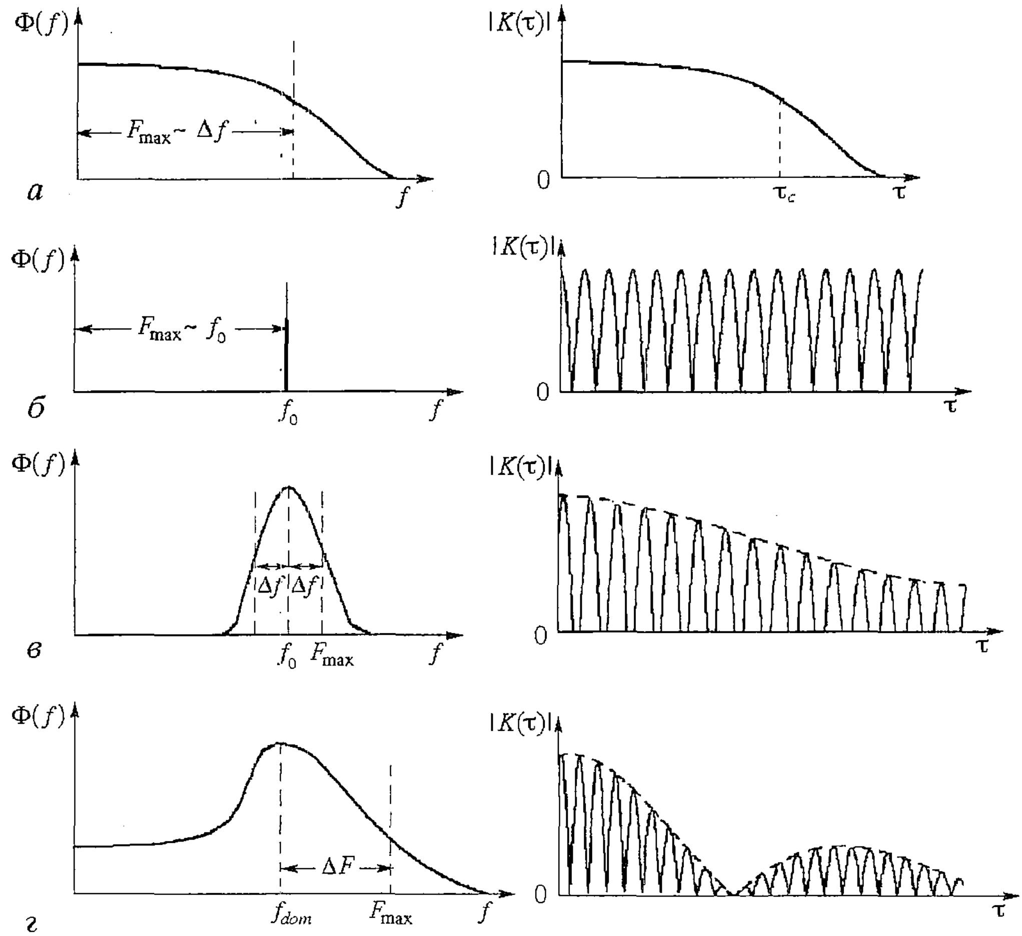

Рис. 1. Оценки верхней границы спектра F_{max} и вид корреляционной функции $K(\tau)$ для четырех видов спектра: *а* – для низкочастотного процесса с нулевой несущей; *б* – для монохроматического процесса; *в* – для узкополосного процесса с несущей f_0; *г* – для широкополосного процесса с доминантной частотой в спектре

низких частот, а корреляционная функция $K(\tau)$, связанная с $\Phi(f)$ преобразованием Фурье (теорема Винера – Хинчина), не имеет ярко выраженных осцилляций (рис. 1, *а*). В качестве F_{max} здесь выступает ширина спектра Δf: $F_{max} \approx \Delta f$. На правом рисунке – типичная корреляционная функция процесса с низкочастотным спектром. Учитывая, что радиус корреляции τ_c для широкого плана процессов с низкочастотным спектром сопоставим с половиной наименьшего квазипериода T_{min},

$$\tau_c \le T_{min}/2 \sim 1/(2F_{max}). \qquad (4)$$

Соотношение (3) часто записывают также в виде

$$\tau \le (1/5 \dots 1/3)\tau_c \approx (0.2 \dots 0.3)\tau_c. \qquad (5)$$

Именно эта оценка и рекомендуется для практического использования в руководствах [1–3] и в публикациях [4–7].

В случае монохроматического процесса с частотой f_0 спектр представляет собой дельта-функцию, удаленную от начала оси частот на расстояние f_0 (рис. 1, *б*), так что $F_{max}=f_0$. Корреляционная функция такого процесса представляет собой синусоиду бесконечной протяженности с периодом $T_0=1/f_0$.

В случае узкополосного сигнала с несущей f_0 и шириной спектра $2\Delta f$ (рис. 1, *в*) под F_{max} естественно понимать величину $F_{max}=f_0+\Delta f$, то есть расстояние от начала отсчета до правого (на рисунке) склона спектра. Корреляционная функция в этом случае представляет собой синусоидальный процесс с медленно меняющейся огибающей. Такая функция характеризуется двумя масштабами: периодом осцилляций $\tau_{c1}\sim 1/f_0$ и характерным временем изменения огибающей $\tau_{c2}\sim 1/\Delta F$.

Наконец, для широкополосного сигнала, в спектре которого доминируют колебания с частотой f_{dom} (рис. 1, *г*), под F_{max} следует понимать величину $F_{max}\approx f_{dom}+\Delta F$, ограничивающую спектр со стороны высоких частот. Корреляционная функция широкополосного процесса, как и в предыдущем примере, имеет вид модулированной синусоиды. Такая корреляционная функция характеризуется двумя масштабами: $\tau_{c1}\approx T_{dom}/2\approx 1/(2f_{dom})$ и $\tau_{c2}\approx 1/\Delta F$.

В соответствии с теоремой Котельникова, во всех четырех случаях частота повторения отсчетов $f_\tau\equiv 1/\tau$ должна превышать удвоенную верхнюю границу спектра $2F_{max}$:

$$f_\tau > 2F_{max}. \qquad (6)$$

При $\tau>1/(2F_{max})$ или, что то же самое, при $f_\tau<2F_{max}$ восстановление непрерывной функции $y(t)$ по дискретным отсчетам $y_k\equiv y(k\tau)$ становится принципиально невозможным.

Из сказанного следует, что оценка (3) применима, строго говоря, только к колебаниям с низкочастотным спектром. В общем случае оценка (1) эквивалентна оценке (3), только если под радиусом корреляции τ_c понимать *наименьший* корреляционный масштаб τ_{c1}, сравнимый с $1/(2F_{max})$, поскольку именно наименьший масштаб определяет (по теореме Котельникова) возможность восстановления непрерывного процесса $y(t)$ по дискретному временному ряду y_k. В этом и заключается уточнение оценки (1): формулы вида (1) и (5) всегда будут согласованы с теоремой Котельникова, если вместо τ_c в них подставлять $\tau_{c1}\approx T_{min}/2$. В таком случае τ должно удовлетворять неравенству

$$\tau \le (0.2\ldots0.3)\tau_{c1}, \qquad \tau_{c1}\sim T_{min}/2\sim 1/(2F_{max}). \qquad (7)$$

С этих общих позиций мы можем рассмотреть теперь результаты расчетов, проведенных в работе [8], более детально.

В комментариях [8] вычислены (при определенных значениях параметров) корреляционная функция и спектральная плотность для хаотической системыРесслера. Эти характеристики системы Ресслера приведены на рис. 2 (корреляционная функция) и на рис. 3 (спектральная плотность в децибелах). Особенностью системы Ресслера является наличие пика спектральной плотности в окрестности доминантной частоты $f_{dom}\approx 0.15$ (см. рис. 3), так что качественно спектр системы Ресслера подобен спектру на рис. 1, *г*. Полуширина этого спектра ΔF на уровне 0.5 от максимума составляет (0.05...0.1).

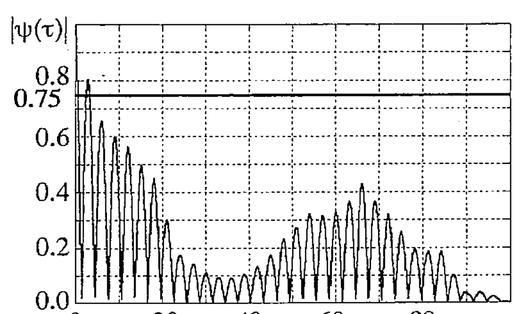

Рис. 2. Корреляционная функция процесса Ресслера, демонстрирующая осцилляции с доминантной частотой и медленное убывание огибающей с характерным временем $\tau_{c2}\sim 1/\Delta F$

Наличие доминантной частоты проявляется здесь двояко. Во-первых, отдельные реализации колебаний в системе Ресслера имеют отчетливый квазисинусоидальный характер, как это видно, например, из рис. 4, тоже заимствованного из [8]. Характерный квазипериод колебаний T_{min} составляет 5÷6,

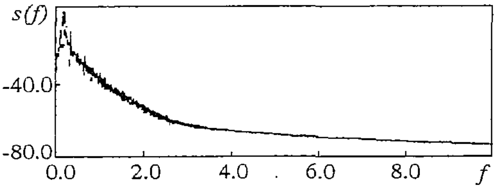

Рис. 3. Спектр мощности, рассчитанный по реализации $x(t)$ системы Ресслера (заимствовано из [8, рис. 2]) с хорошо выраженной доминантной частотой f_{dom}≈0.15 Гц

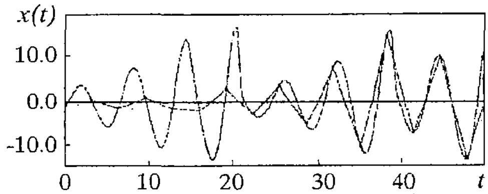

Рис. 4. Фрагмент реализации $x(t)$ системы Ресслера (заимствовано из [8, рис. 4, *a*]); свидетельствует о наличии в спектре доминантной частоты. Точки, соединенные отрезками прямых линий, отвечают неправомерно большому интервалу дискретизации τ_{c2}, нарушающему требования теоремы Котельникова

что согласуется с величиной доминантной частоты f_{dom}~0.15. Во–вторых, в силу наличия доминантной частоты функция корреляции приобретает осциллирующий характер с характерным периодом T_{min}~5÷6. Огибающая же корреляционной функции меняется с характерным временем 15÷20, отвечающим полуширине спектра ΔF~(0.05...0.1).

Согласно изложенному выше, рекомендуемый интервал дискретизации для рассматриваемой системы можно оценить несколькими способами. Во–первых, располагая значением T_{min}~5÷6 из рис. 4, при помощи (1) мы получаем τ≈(0.6...1.0). Во–вторых, такую же оценку для T_{min} мы получим, если оценим T_{min} либо как $1/F_{max}$, где в данном случае $F_{max}=f_{dom}+\Delta F$≈(0.20÷0.25), либо как период осцилляций на графике корреляционной функции (см. рис. 2). Во всех случаях для τ мы получаем одну и ту же оценку τ≈(0.6...1.0), что, разумеется, не противоречит теореме Котельникова.

Между тем, в комментариях [8] в качестве τ_c предлагается взять характерное время спадания *огибающей* корреляционной функции τ_{c2}, которое оценивается величиной 15÷20. Тогда по оценкам [8] выходит, что τ≈3.2, то есть интервал дискретизации оказывается сравнимым с половиной квазипериода T_{min}≈5÷6. Ясно, что условия применимости теоремы Котельникова в этом случае нарушаются и сигнал $y(t)$ восстановлен быть не может. Именно этот *неправомерный* выбор и иллюстрирует рис. 4, заимствованный из [8]. Если взять адекватную задаче оценку τ≈(0.6...1.0), то на типичном квазипериоде уложится 6÷10 точек, что вполне достаточно для удовлетворительного воспроизведения как самого сигнала $y(t)$, так и фазового портрета системы Ресслера.

Таким образом, авторы вынуждены признать, что наш обзор [7] не содержал четкой интерпретации времени корреляции, необходимой для правильного использования формулы (1) в общем случае. Надлежащая интерпретация радиуса корреляции, при которой рекомендация (1) согласуется с требованиями теоремы Котельникова, предполагает, что при наличии доминантной частоты в качестве τ_c надо брать не характерное время изменения огибающей, а мелкомасштабный период τ_{c1} осцилляций корреляционной функции.

Данная работа частично была поддержана РФФИ (гранты 99–02–16625 и 00–02–17441) и ФЦП «Интеграция» (грант А–0030).

Библиографический список

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер. с англ. под ред. Я.З. Цыпкина. М., 1991. 432 с.

2. Современные методы идентификации систем / Под. ред. М.Эйкхоффа. М.: Мир, 1983.

3. *Марпл–мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. с. 584.

4. *Broomhead D.S., King G.P.*//Phys.D. 1986. Vol. 20. P. 217.

5. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Об одном методе оценки размерности вложения аттрактора по результатам эксперимента // ЖТФ. 1989. Т. 59, №1. С. 13.

6. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Сравнение методов конструирования фазового пространства и определение размерности пространств аттрактора по экспериментальным данным // ЖТФ. 1989. Т. 59, №11. С. 1.

7. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А.* Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам: краткий обзор // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, №1. С. 29.

8. Комментарий редакционной коллегии к статье О.Л. Аносова, О.Я. Бутковского и Ю.А. Кравцова. «Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам» // Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, №1. С. 48.

9. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. М.: «Советское радио», 1974, 552 с.

Владимирский госуниверситет
Институт космических исследований РАН
Space Research Center
Polish Academy of Sciences

Поступила в редакцию 28.12.2000
после доработки 28.03.2001

ON THE RATIONAL CHOICE OF DISCRETIZATION INTERVAL FOR PROCESSES WITH SPECTRUM, CONTAINING DOMINANT FREQUENCY

O.Ya. Butkovskii, Yu.A. Kravtsov

Basic concepts are analysed, leading to the estimate $\tau=(0.2...0.3)\tau_c$, which expresses the discretization interval τ through the correlation time τ_c. There are two time–scales, characterizing the correlation function of processes with spectrum, containing dominant frequency. Only the least scale can pretend to be chosen as τ_c, which is comparable with the period of dominant oscillations. Such choice answers the Kotelnikov theorem requirements.

Бутковский Олег Ярославович – родился в Магнитогорске (1949). Окончил Магнитогорский педагогический институт (1973). После окончания работал в лаборатории физико–химических исследований МПИ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в Московском педагогическом государственном университете по специальности радиофизика, в области теории колебаний и волн (1987). С 1987 года работает во Владимирском государственном университете. Область научных интере–сов – нелинейная динамика, нелинейная акустика, моделирование нелинейных явлений в медико–биологических системах. Опубликовал более 40 научных статей. E–mail: olegb@vpti.vladimir.ru

Кравцов Юрий Александрович – родился в Москве (1937). Окончил Московский энергетический институт (1960). После окончания института работал в РТИ АН СССР (до 1972), в Московском государственном педагогическом институте (до 1979), в Институте общей физики АН (до 1993). В настоящее время заведует отделом Института космических исследований РАН и является консультантом Центра космических исследований Польской Академии Наук. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГПИ (1963) и доктора физико-математических наук в области асимптотических методов волновой теории (1968). Автор и соавтор монографий «Введение в статистическую радиофизику», «Параметрические генераторы и делители частоты», «Геометрическая оптика неоднородных сред», «Caustics, catastrophes and wave fields», «Пределы предсказуемости», «Predictability of complex dynamical systems». Опубликовал свыше 300 научных статей в области волновой теории, статистической радиофизики и нелинейной динамики. Лауреат Государственной премии СССР. Член редколлегий журналов «Известия вузов. Радиофизика», «Акустический журнал», «Космическая радиофизика». E-mail: kravtsov@asp.iki.rssi.ru

Настоящее сообщение представляет собой ответ авторов обзора «Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам» (Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 1. С. 29) на критические замечания редколлегии, опубликованные вместе с указанной работой. Авторы согласились с тем, что в предыдущей статье не было дано четкой интерпретации понятия времени корреляции, что практически необходимо для правильного использования алгоритмов реконструкции.

В настоящей работе этот вопрос обсуждается авторами более детально, что представляется важным для решения практических задач реконструкции динамических систем по экспериментальным данным. Редколлегия считает дискуссию завершенной и надеется, что ее результаты будут интересны и полезны читателям нашего журнала.