



## ЭФФЕКТЫ СИНХРОНИЗАЦИИ В ЦЕПОЧКЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ БИСТАБИЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

*А.С. Копейкин, Д.Д. Матюшкин, Т.Е. Вадивасова,  
О.В. Сосновцева, В.С. Анищенко*

Численно исследуется явление пространственно–временной синхронизации в цепочке взаимно и однонаправленно связанных бистабильных осцилляторов, совершающих колебания под действием шума. Эффекты регуляризации проявляются в синхронизации средних частот переключений и в образовании стоячих и бегущих волн.

### Введение

Пространственно распределенные системы служат основой для изучения и моделирования пространственно–временного поведения в гидродинамике, химических реакциях, биологических системах и т.д. В них наблюдается широкий класс интересных явлений, которые не могут происходить в динамических системах с небольшим числом степеней свободы. Одной из наиболее популярных моделей пространственно распределенной системы является ансамбль взаимодействующих нелинейных генераторов [1]. Примерами из этой области служат цепочки контактов Джозефсона [2], взаимодействующие твердотельные лазеры [3], нейронные сети [4] и др. Кооперативное поведение большого числа связанных автоколебательных систем демонстрирует множество эффектов, среди которых можно выделить такие явления как кластеризация, образование когерентных структур и синхронизация.

Синхронизация является классическим примером самоорганизации в нелинейных автогенераторах. При этом следует учитывать, что реальные системы, как сосредоточенные [5], так и пространственно распределенные [6], подвержены случайным внешним воздействиям. Синхронизация автоколебаний в присутствии шума детально изучалась в [7]. Исследования последних лет показали, что эффекты, подобные синхронизации, наблюдаются не только в автоколебательных системах, но и в так называемых стохастических осцилляторах (то есть в таких системах, в которых колебания возникают благодаря действию шума). Так классическая концепция синхронизации была обобщена на широкий класс

бистабильных стохастических систем, для которых время возврата в исходное состояние представляет собой случайную величину [8–12]. В таких системах был обнаружен эффект захвата средних частот и мгновенных фаз переключений (стохастическая синхронизация).

Растущий интерес исследователей к системам с шумом приводит к постановке задач о стохастической синхронизации цепочек и решеток, состоящих из большого числа взаимодействующих стохастических осцилляторов. В работах [13–15] было показано, что цепочки и двумерные решетки связанных стохастических осцилляторов при некотором оптимальном уровне шума способны передавать слабый периодический сигнал и демонстрировать эффект стохастического резонанса. Однако изложенные результаты не несут информации относительно поведения индивидуальных частот и фаз парциальных осцилляторов. Исключением является работа [16], в которой решетка стохастических осцилляторов возбуждаемого типа рассматривается с точки зрения поведения мгновенных фаз осцилляторов. В то же время эффект частотно–фазовой синхронизации ансамбля бистабильных стохастических систем в настоящее время остается еще недостаточно изученным.

В данной работе мы стремимся детально исследовать явление возникновения упорядоченных структур под действием некоррелированного шума для важного класса стохастических систем, а именно, в цепочках бистабильных стохастических осцилляторов. В частности, мы ищем ответы на следующие вопросы. Как в цепочке стохастических бистабильных осцилляторов происходит согласование частот и фаз переключений отдельных элементов? Как влияют на эффекты синхронизации неидентичность параметров парциальных систем и тип связи?

## 1. Модели

В целях изучения эффектов синхронизации стохастических колебаний мы рассматриваем две базовые модели, описывающие бистабильную динамику: стохастический осциллятор Дуффинга и триггер Шмитта.

Нелинейный осциллятор Дуффинга под внешним воздействием изучается уже два десятилетия. Он часто используется для демонстрации разнообразных динамических колебательных режимов [17,18] и индуцированных шумом эффектов [19, 20].

Осциллятор Дуффинга, возбуждаемый случайной силой, можно рассматривать как модель стохастических колебаний броуновской частицы в двухъямном потенциале. Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + dU(x)/dx = D^{1/2}\xi(t). \quad (1)$$

Функция  $U(x) = -\alpha x^2/2 + \beta x^4/4$  задает форму потенциала, параметр  $\delta$  управляет рассеянием энергии,  $\xi(t)$  – источник гауссова белого шума с интенсивностью  $D$  и следующими свойствами:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = \delta(t-s).$$

Здесь символы  $\langle \rangle$  и  $\delta(\ )$  обозначают оператор усреднения по времени и функцию Дирака, соответственно.

Уравнение (1) – классическая бистабильная система, называемая также осциллятором Крамерса. В отсутствие внешнего воздействия она характеризуется двумя устойчивыми состояниями равновесия и одним состоянием равновесия

седлового типа. Случайное воздействие обеспечивает переключения из одного состояния равновесия в другое.

В работе исследуется цепочка осцилляторов Крамерса, описываемая уравнениями

$$\dot{x}_j = y_j, \quad \dot{y}_j = -\delta y_j - dU_j(x_j)/dx_j + \gamma G_j(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) + (D_j)^{1/2} \xi_j(t), \quad j=1,2,\dots,m. \quad (2)$$

Здесь  $j$  – номер осциллятора в цепочке (дискретная пространственная координата), параметр  $\gamma$  характеризует степень связи, в то время как функции  $G_j$  определяют характер связи. Источники шума  $\xi_j(t)$ ,  $j=1,2,3,\dots,m$  – статистически независимы.

Триггер Шмитта – одна из самых простых пороговых систем [21,22], обладающих статической нелинейностью гистерезисного типа. В некотором приближении можно считать, что состояние триггера Шмитта безинерционным образом управляется с помощью механизма переключений. В этом состоит его преимущество по сравнению с инерционными бистабильными системами. Для последних существенно трудно поддающиеся анализу стохастические процессы, протекающие в пределах одной потенциальной ямы. При математическом моделировании идеальный триггер Шмитта задается уравнением

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \text{sgn}(Kx(t) - \xi(t)). \quad (3)$$

Здесь  $\xi(t)$  – экспоненциально-коррелированный гауссов шум (процесс Орнштейна – Уленбека) с нулевым средним значением. Его корреляционная функция имеет вид  $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = (D/\tau) \exp(-|t-s|/\tau)$ , где величина  $\tau=0.01$  – время корреляции шума. Параметр  $K$  характеризует порог срабатывания триггера.

Цепочка таких идеальных бистабильных систем, демонстрирующих чисто переключательное поведение, описывается уравнениями

$$\dot{x}_j(t + \Delta t) = \text{sgn}(Kx_j(t) - \gamma G_j(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) - \xi_j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

В рамках данной работы в моделях (2), (4) рассматривалась взаимная связь  $G_j = x_{j+1} + x_{j-1} - 2x_j$  и однонаправленная связь  $G_j = x_{j-1}$

Стохастические бистабильные системы имеют характерное время, которое соответствует средней частоте переключений из одного состояния в другое. Эта частота управляется интенсивностью шума и величиной потенциального барьера  $\Delta U$ . Так, для модели (1) средняя частота переключений (частота Крамерса) определяется экспоненциальным законом Аррениуса [23]

$$f \propto \exp(-\Delta U/D). \quad (5)$$

Следовательно, расстройка средних частот переключений в ансамбле осцилляторов может быть задана распределением интенсивностей шума  $D_j$

$$D_j = D_1 + [(j-1)/(m-1)]\Delta \quad (6)$$

или выбором значений параметров, управляющих высотой барьера

$$\alpha_j = \alpha_1 + [(j-1)/(m-1)]\Delta, \quad (7)$$

где  $\Delta$  – расстройка, установленная между первым и последним генераторами. Цепочки (2) и (4) исследовались с граничными условиями, соответствующими свободным концам. Начальные состояния парциальных осцилляторов выбирались так, чтобы обеспечить их случайное распределение по потенциальным ямам.

Полученные при интегрировании исследуемых моделей реализации стохастических колебаний парциальных осцилляторов позволяли вычислить соответствующие средние частоты переключений  $f_j = N_j / T$ , где  $N_j$  – число

переключений  $j$ -го осциллятора из одного состояния в другое (с учетом направления) за время наблюдения  $T$ . Для оценки степени синфазности переключений осцилляторов (под синфазностью понимается одновременность пребывания различных осцилляторов в одной и той же потенциальной ямке) рассматривалась величина

$$\sigma_x^2 = (1/m) \sum_{j=1}^m \langle x_j(t) - x_1(t) \rangle^2. \quad (8)$$

В целях получения более наглядного представления о поведении цепочки строились пространственно-временные диаграммы состояний, на которых пребывание каждого из осцилляторов цепочки в левой и правой ямке отмечалось соответственно черным и белым цветом.

## 2. Пространственно-временное поведение цепочек стохастических осцилляторов

Согласно недавним результатам [8–10], при взаимодействии бистабильных стохастических систем, с различными частотами переключений наблюдается явление стохастической синхронизации. Стохастическая синхронизация определяется как совпадение характерных средних времен или средних частот парциальных систем. Такой подход позволяет проанализировать разнообразие явлений, возникающих при взаимодействии большого количества связанных стохастических осцилляторов.

**Взаимная связь.** Для изучения общего характера поведения цепочек стохастических осцилляторов и установления рабочего диапазона параметров сначала исследовалась динамика цепочек, состоящих из идентичных взаимно связанных элементов, находящихся под воздействием шума одинаковой интенсивности (то есть  $D_j = D, j=1, 2, \dots, m$ ).

На рис. 1, *a* представлены полученные для однородной цепочки (2) зависимости средней частоты переключений  $F$  от интенсивности шума  $D$  при различных значениях коэффициента связи. Средняя частота  $F$  определялась усреднением парциальных частот переключений по ансамблю осцилляторов

$$F = (1/m) \sum_{j=1}^m f_j. \quad (9)$$

На основании полученных данных выбиралась область рабочих значений

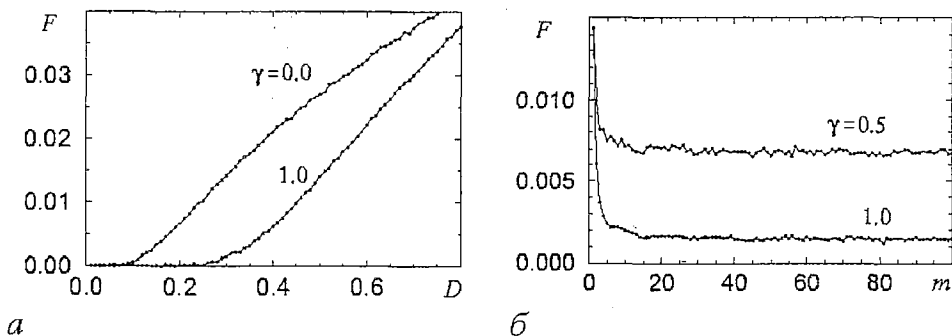


Рис. 1. Зависимости средней частоты переключений  $F$  от интенсивности шума  $D$  для цепочки длиной  $m=100$  (*a*) и от числа элементов цепочки при  $D=0.3$  (*б*). Результаты получены для однородной цепочки (2) со взаимной связью при  $\alpha=\beta=1, \delta=0.9$

$D \in [0.25, 0.3]$ , удовлетворяющих следующим условиям:  $F$  растет по экспоненте с ростом  $D$  и переключения между состояниями происходят достаточно часто, чтобы можно было говорить о стохастическом поведении. Рис. 1, б иллюстрирует зависимость  $F$  от длины цепочки  $m$  при фиксированном значении параметра связи. Величина  $F$  экспоненциально убывает с ростом  $m$ , стремясь к некоторому постоянному уровню. Видно, что при  $m > 20$  величина  $F$  уже практически не меняется при изменении  $m$ . Следовательно, цепочка из ста элементов ( $m=100$ ) является достаточно длинной и позволяет моделировать некоторые особенности поведения неограниченной среды.

В однородной цепочке индивидуальные частоты переключений осцилляторов  $f_j$  в пределах ошибок численного эксперимента равны между собой. Исключение составляют частоты первого и последнего осцилляторов, что объясняется краевым эффектом (рис. 2, а). С увеличением связи индивидуальные частоты растут до максимального значения при  $\gamma \approx 0.15$  и затем уменьшаются, стремясь к нулю. Стохастические переключения с ростом связи практически перестают наблюдаться. Таким образом, во взаимодействующих бистабильных системах, управляемых *некоррелированными* случайными воздействиями, может наблюдаться согласованное поведение и даже подавление стохастических переключений. Следует отметить, что для бистабильных систем, возбуждаемых одной и той же случайной силой  $\xi_j(t) \equiv \xi(t)$ , эффект подавления колебаний не наблюдается. В этом случае осцилляторы демонстрируют синфазное поведение  $x_j(t) \equiv x_1(t)$ ,  $y_j(t) \equiv y_1(t)$ ,  $j=2, \dots, m$  и частоты переключений управляются только интенсивностью шума (пунктирная линия на рис. 2, а).

Ансамбль осцилляторов с неидентичными параметрами и, как следствие, с различными характерными временами и частотами интересен и с концептуальной точки зрения, и в силу типичности такой ситуации во многих реальных системах. При задании в (2) расстройки частот переключений в соответствии с (6), взаимодействие осцилляторов, как и в случае однородной цепочки, приводит к тому, что с ростом параметра связи индивидуальные частоты переключений  $f_j$  становятся близкими к нулю (рис. 2, б). Кроме того, при значениях параметра связи  $\gamma > 0.4$  наблюдается сближение индивидуальных частот, которое можно рассматривать как эффект стохастической синхронизации. Зависимость дисперсии

индивидуальных частот  $\sigma_x^2 = (1/m) \sum_{j=1}^m f_j^2 - F^2$  от параметра  $\gamma$  приведена на рис. 2, в.

При задании расстройки в соответствии с (7) поведение парциальных частот было аналогичным (рис. 3).

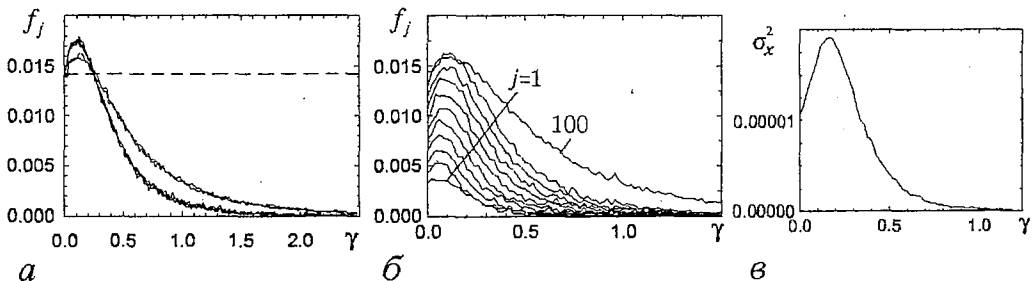


Рис. 2. Зависимости индивидуальных частот  $f_j$  ( $j=1, 20, 40, 60, 80, 100$ ) переключений осцилляторов модели (2) при  $\alpha=\beta=1$ ,  $\delta=0.9$  от параметра связи  $\gamma$ : а – в случае идентичных осцилляторов  $D_1=D=0.3$  (пунктиром отмечена зависимость, полученная для всех осцилляторов при использовании одного и того же источника шума в каждой ячейке); б – в случае введения расстройки согласно (6) при  $D_1=0.15$ ,  $\Delta=0.15$ ; в – зависимость дисперсии частот  $f_j$  от  $\gamma$

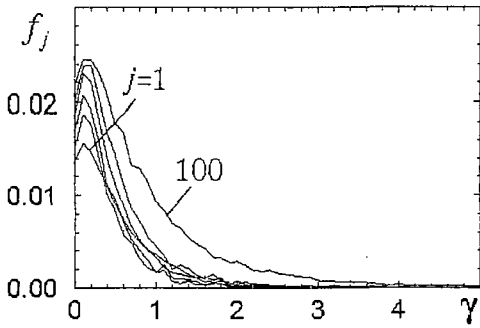


Рис. 3. Индивидуальные частоты переключений осцилляторов системы (2) с номерами  $j=1, 20, 40, 60, 80, 100$  в зависимости от параметра связи при введении расстройки в соответствии с (7) при  $\alpha_1=1.0, \Delta=-0.2$

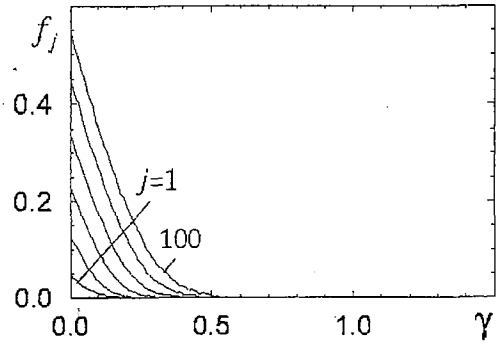


Рис. 4. Индивидуальные частоты переключений осцилляторов системы (4) с номерами  $j=1, 20, 40, 60, 80, 100$  в зависимости от степени взаимной связи при введении расстройки согласно (6) при  $D_1=0.4, \Delta=0.4$ . Параметр  $K$  полагался равным единице

Мы полагаем, что эффект подавления индуцированных шумом переключений типичен для бистабильных систем со взаимной связью. Он не зависит от способа задания расстройки частот – с помощью вариации интенсивности шума или значений параметра, управляющего высотой потенциального барьера. В целях подтверждения общности обнаруженного эффекта была исследована цепочка триггеров Шмитта (4) с линейной расстройкой интенсивностей шума. Результаты подтвердили полную аналогию в поведении парциальных частот двух исследованных систем (рис. 4). Подавление стохастических колебаний, вызванное взаимодействием парциальных систем, напоминает эффект «осцилляторной смерти», наблюдающийся в ансамблях автогенераторов [24]. Отличие состоит в том, что в детерминированном случае для достаточно больших расстроек связь приводит к шунтированию автоколебаний и амплитуда колебаний стремится к нулю. При этом их частота имеет постоянное значение. Напротив, в рассматриваемом нами случае стохастических осцилляторов к нулю стремятся частоты переключений. Более полная аналогия может быть проведена с эффектом образования замороженных состояний, наблюдающимся в ансамбле гармонических осцилляторов [25].

Эффект подавления играет упорядочивающую роль в поведении ансамбля. Кроме сближения и уменьшения частот стохастических переключений устанавливается соответствие между фазами переключений. Для системы (2) со

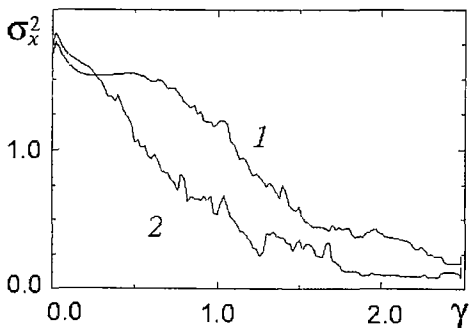


Рис. 5. Зависимость величины  $\sigma_x^2$  от степени взаимной связи для цепочки (2), состоящей из идентичных элементов (кривая 1) и из элементов с разными частотами переключений (кривая 2);  $\alpha=\beta=1, \delta=0.9$

взаимной связью наблюдается тенденция к синфазному поведению осцилляторов, то есть в установленный момент времени большинство генераторов долго находятся в одной «потенциальной яме». Величина  $\sigma_x^2$  с увеличением связи уменьшается (рис. 5, кривая 1). Это означает, что все осцилляторы стремятся совершать переключения одновременно с первым осциллятором цепочки. Аналогичные эффекты наблюдаются при введении расстройки индивидуальных частот в соответствии с условием (6) (рис. 5, кривая 2).

На рис. 6 приведены пространственно-временные диаграммы состояний цепочки (2) из 100 осцилляторов со взаимной связью. Белый цвет соответствует положению парциального осциллятора в левой ямке, а черным отмечено положение в правой ямке. Первоначально все осцилляторы были распределены по разным потенциальным ямкам случайным образом. При слабой связи осцилляторы могут находиться в каждом из двух состояний с почти равной вероятностью. Это отражено в равном количестве черных и белых ячеек, которые распределены произвольным образом (рис. 6, а). С увеличением связи формируются области одного цвета (рис. 6, б). Но переключения не полностью синфазны, поэтому границы цветных областей размыты. При дальнейшем увеличении связи чередование цветных областей становится редким (рис. 6, в), что является следствием замедления переключений.

В детерминированном случае появление синфазного режима соответствует полной синхронизации взаимодействующих систем [26]. В ансамбле бистабильных систем, управляемых некоррелированными случайными воздействиями, полная синхронизация не достигается. Однако, с другой стороны, сильное взаимодействие может препятствовать несинфазным колебаниям. В работе [16] показано, что в системе двух взаимно связанных бистабильных осцилляторов с независимыми источниками шума, возникновение когерентности стохастических переключений связано с бифуркациями вероятностной инвариантной меры. В результате только синфазные переходы становятся возможными. Подобное поведение типично и для ансамбля стохастических осцилляторов с диффузионной связью.

Однако в некоторых случаях синхронизация в ансамбле стохастических бистабильных осцилляторов с взаимной связью может приводить и к противофазным колебаниям осцилляторов. Такое поведение было обнаружено в модели (4). Пространственно-временные диаграммы, полученные для (4) при различных значениях параметра связи, представлены на рис. 7. Белый цвет по-

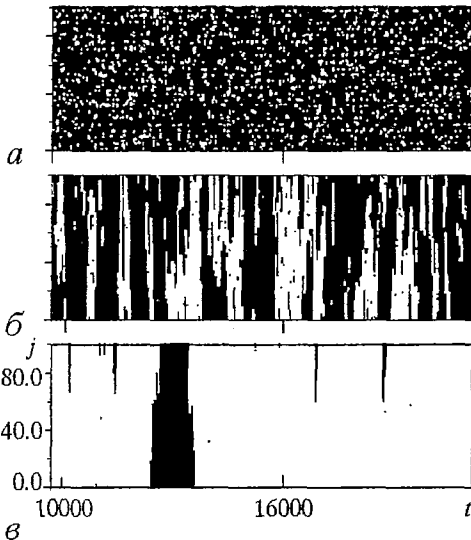


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы цепочки (2) со взаимной связью элементов при значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.1 (а); 0.8(б); 2.0 (в). Осцилляторы цепочки расстроены в соответствии с (6). Белым цветом отмечены состояния с отрицательными значениями переменных  $x_j$ , а черным – с положительными

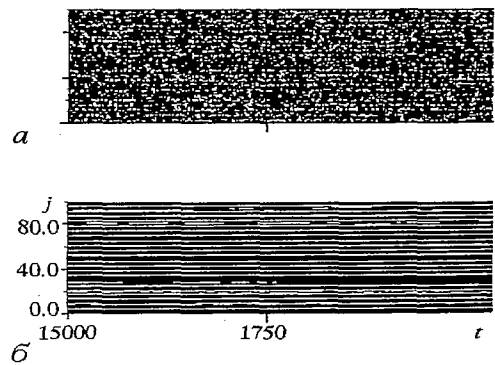


Рис. 7. Пространственно-временные диаграммы цепочки (4) со взаимной связью элементов при значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.2 (а); 0.4 (б). Осцилляторы цепочки расстроены в соответствии с (6). Белым цветом отмечены состояния с отрицательными значениями переменных  $x_j$ , а черным – с положительными

прежнему соответствует левому устойчивому состоянию парциального осциллятора, а черный – правому.

**Однонаправленное взаимодействие.** Рассмотрим теперь, как изменится поведение цепочки стохастических осцилляторов при однонаправленной связи. В этом случае состояние любого парциального осциллятора не зависит от процессов, происходящих в последующих элементах цепочки, но находится под влиянием сигнала, поступающего с предшествующего осциллятора.

Частота переключений  $F$ , усредненная по ансамблю идентичных осцилляторов (2), демонстрирует то же самое поведение (рис. 8), что и при взаимной связи (см. рис. 1, а). Однако теперь  $F$  возрастает с увеличением коэффициента связи, поскольку происходит увеличение сигнала, воздействующего на каждый последующий элемент.

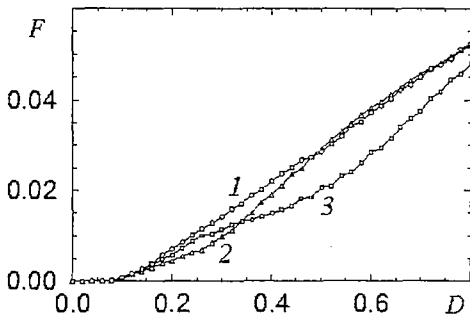


Рис. 8. Усредненная по всем осцилляторам частота переключений  $F$  в зависимости от интенсивности шума в цепочке (2) с односторонним взаимодействием и идентичными элементами при  $\alpha=\beta=1$ ,  $\delta=0.9$  и различных значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.0 (кривая 1); 0.5 (кривая 2); 1.0 (кривая 3)

При наличии расстройки частот переключений (согласно (6)) наблюдается эффект захвата частот (рис. 9, а). С увеличением связи происходит согласование стохастических переключений осцилляторов. В отличие от взаимной связи, когда все индивидуальные частоты стремятся к нулевому значению, теперь частоты становятся близкими к частоте переключений первого осциллятора цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

Таким образом, в цепочке однонаправленно связанных стохастических осцилляторов цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

Таким образом, в цепочке однонаправленно связанных стохастических осцилляторов цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

Таким образом, в цепочке однонаправленно связанных стохастических осцилляторов цепочки. Важно отметить, что эффект захвата частоты наблюдается в пределах некоторого диапазона изменения параметра связи. При достижении некоторого критического значения  $\gamma=\gamma_{кр}$  когерентность переключений парциальных осцилляторов разрушается. В цепочке триггеров Шмитта (4) с однонаправленным взаимодействием элементов также наблюдается синхронизация индивидуальных частот переключений на частоте первого осциллятора (рис. 9, б). В отличие от модели (2) разрушения синхронизации с ростом  $\gamma$  не происходит.

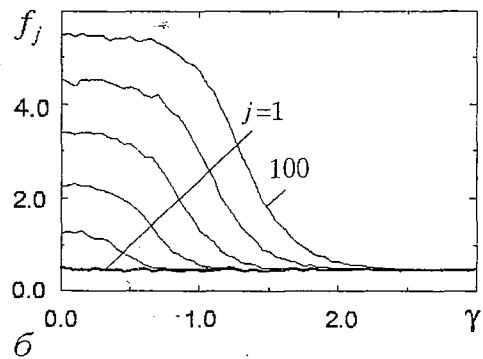
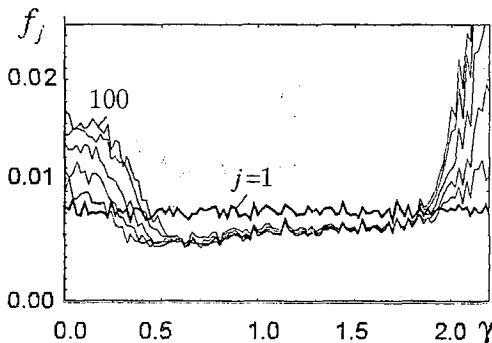


Рис. 9. Синхронизация индивидуальных частот переключений в однонаправленно связанной неоднородной цепочке осцилляторов Дуффинга при  $D_1=0.2$ ,  $\Delta=0.1$  (2) (а) и триггеров Шмитта (4) при  $D_1=0.4$ ,  $\Delta=0.4$  (б). Приведены зависимости частот переключений  $f_j$  от параметра связи для  $j=1, 2, 4, 6, 8, 10, 100$



бистабильных осцилляторов в зависимости от величины связи можно выделить три основных типа пространственно-временного поведения. Соответствующие этим типам поведения пространственно-временные диаграммы, полученные для модели (2), представлены на рис. 10. При слабом взаимодействии цепочка осцилляторов не демонстрирует никакой пространственно-временной регуляризации (рис. 10, а). При увеличении связи захват индивидуальных частот и согласование фаз переключений проявляется в образовании упорядоченных черно-белых полос (рис. 10, б). Возникновение структуры полос, расположенных под углом к осям координат, соответствует распространению вдоль цепочки фазовой волны стохастических переключений. Наклон полос определен фазовой скоростью волны  $v_\phi = \Delta j / \Delta t$ , где  $\Delta j$  – множество элементов, переключившихся из одного состояния в другое за время  $\Delta t$ . Фазовая скорость и длина волны могут управляться связью и интенсивностью шума. При дальнейшем увеличении параметра связи  $\gamma$  упорядоченная пространственно-временная структура разрушается (рис. 10, в).

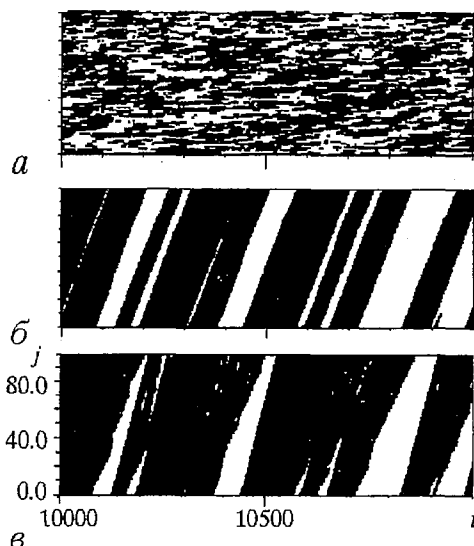


Рис. 10. Пространственно-временные диаграммы цепочки (2) с однонаправленной связью элементов при значениях параметра связи  $\gamma$ : 0.1 (а); 1.5 (б); 2.5 (в). Осцилляторы цепочки расстроены в соответствии с (б)

### Заключение

Проведенные численные исследования продемонстрировали явление пространственной стохастической синхронизации в одномерных средах, моделируемых цепочками взаимодействующих бистабильных элементов, управляемых внешними источниками шума. Эффекты стохастической синхронизации проявляются в захвате средних частот переключений парциальных осцилляторов, в возникновении синфазного или противофазного порядка переключений, в образовании «стоячих» и «бегущих» волн, соответственно, при взаимной и однонаправленной связи осцилляторов.

Также был обнаружен эффект «замедления» стохастических переключений, наблюдающийся в цепочках из большого числа бистабильных стохастических осцилляторов со взаимной связью. В этом случае при увеличении параметра связи индивидуальные частоты переключений стремятся к нулю. В то же время, при однонаправленном взаимодействии элементов цепочки индивидуальные частоты с ростом параметра связи приближаются к частоте первого осциллятора.

Полученные результаты показывают, что шум может играть важную роль в процессах самоорганизации ансамблей взаимодействующих нелинейных систем. Обнаруженные эффекты согласования частот и фаз стохастических переключений в исследованных ансамблях стохастических осцилляторов подчеркивают универсальность явления синхронизации.

*Данная работа частично поддержана грантом Фонда гражданских исследований и развития США (CRDF) и Министерства образования РФ (№ REC-006), грантом РФФИ (№ 00-02-17512), грантом Министерства образования РФ (№ 97-0-8.3-47), а также INTAS 00-00867.*

## Библиографический список

1. Kuramoto V. Chemical oscillations, waves and turbulence. Springer, Berlin, 1984.
2. Hadley P., Beasley M.R., Wiesenfeld K.// Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38. P. 8712; Watanabe S., Strogatz S.H.// Physica D. 1994. Vol. 74. P. 197.
3. Roy R., Thornburg K.S.// J. Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72. P. 2009.
4. Winfree A.T. The geometry of biological time. Springer, Berlin, 1980.
5. Horsthemke W., Lefever R. Noise-induced transitions. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
6. Garcia-Ojalvo J., Sancho J.M. Noise in spatially extended systems. Springer, New York (to be published).
7. Stratonovich R.L. Topics in the theory of random noise. Gordon and Breach, New York, 1967.
8. Neiman A.B. Synchronization like phenomena in coupled stochastic bistable systems// Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 3484.
9. Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S. Mean switching frequency locking in stochastic bistable system driven by periodic force// Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
10. Anishchenko V.S., Silchenko A.N., Khovanov I.A. Synchronization of switching processes in coupled Lorenz systems// Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 316.
11. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка// УФН. 1999. Т. 169, № 1. С. 7.
12. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 368 с.
13. Lindner J.F., Meadows B.K., Ditto W.L., Inghiosa M.E., Bulsara A.R. Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization// Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 3.
14. Zhang Y., Hu G., Gammaitoni L. Signal transmission in one-way coupled bistable systems: Noise effects// Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 2952.
15. Lindner J.F., Chandramouli S., Bulsara A.R., Löcher M., Ditto W.L. Noise enhanced propagation// Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 5048.
16. Neiman A., Schimansky-Geier L., Cornell-Bell A., Moss F. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media// Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 83. P. 4896.
17. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer, New York, 1983. Sec. 2.2.
18. Moon F.C. Chaotic and Fractal Dynamics. Wiley, New York, 1992. Secs. 6.2 and 7.7.
19. Kapitaniak T. Stochastic resonance in chaotically forced systems// Chaos, Solitons & Fractals. 1993. Vol. 3. P. 405.
20. Dykman M.L., Mannella R., McClintock P.V.E., Moss F., Soskin S.M. Spectral density of fluctuations of a double-well Duffing oscillator driven by white noise// Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. P. 1303.
21. Fauve S., Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 97. P. 5.
22. McNamara B., Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance// Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 4854.
23. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions// Physica. 1940. Vol. 7. P. 284.
24. Osipov G.V., Sushchik M.M. Synchronized clusters and multistability in array of oscillators with different natural frequencies// Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 7198.

25. *Tass P.* Phase and frequency shifts in a population of phase oscillators// *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56. P. 2043.

26. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillatory systems// *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.

*Pikovsky A.S.* On the interaction of strange attractors// *Z.Physik B.* 1984. Vol. 55. P. 149.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию  
после доработки*

*6.12.2000  
15.05.2001*

## SYNCHRONIZATION EFFECTS IN AN ARRAY OF COUPLED BISTABLE SYSTEMS

*A.S. Kopeikin, D.D. Matjushkin, T.E. Vadivasova,  
O.V. Sosnovtseva and V.S. Anishchenko*

We investigate numerically the spatiotemporal stochastic synchronization in one-dimensional media modeled by coupled bistable functional units driven by external noise. This phenomenon manifests itself as the mean switching frequency entrainment and as «in-phase» hopping dynamics in the form of «standing» and «running» waves at two- and one-way coupling, respectively.



*Копейкин Андрей Сергеевич* – родился в Саратове (1976), окончил физический факультет Саратовского университета (1998). В настоящее время учится в аспирантуре на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Автор 5 научных работ.



*Матюшкин Дмитрий Дмитриевич* – родился в Саратове (1981). Среднее образование получил в экспериментальной школе-системе № 4 (специальность – биохимия). В настоящий момент – студент 4-го курса физического факультета СГУ



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), доцент, кандидат физико-математических наук. В настоящее время – докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 40 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



*Сосновцева Ольга Владимировна* – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время является докторантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов. Имеет около 30 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1966), защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1970) и доктора физико-математических наук (1986). С 1988 года – заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член-корреспондент РАЕН, Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, Лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999). E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru