

УСТРОЙСТВО ПРОСТРАНСТВА УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ НЕИДЕНТИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЯМИ ПЕРИОДА

А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, И.Р. Сатаев

Обсуждается устройство плоскости управляющих параметров неидентичных связанных логистических отображений. Найден критический размерности два, связанные с накоплениями бифуркационных ситуаций коразмерности два. Обсуждается также устройство плоскости управляющих параметров двух связанных осцилляторов Дуффинга.

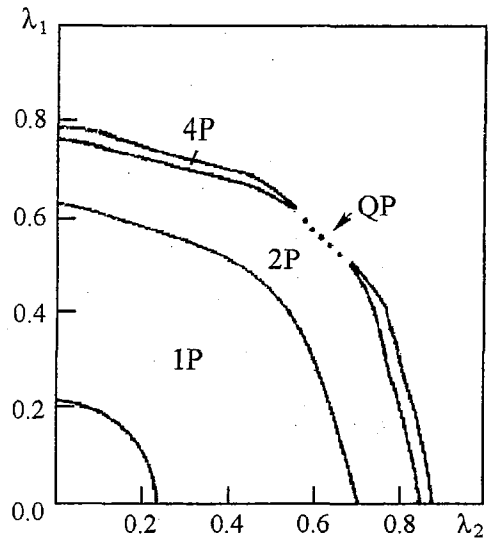
Введение

Большое количество работ, опубликованных в последнее время, посвящено сложной динамике связанных систем, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода (см., например, монографии [1,2] и цитированную в них литературу). В подавляющем количестве работ, однако, рассматриваются идентичные подсистемы. Среди работ по динамике неидентичных подсистем имеется работа [3], которая нацелена именно на изучение устройства плоскости параметров, управляющих удвоениями периода. В работе [3] показано, что введение неидентичности в систему двух связанных логистических отображений следующего вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4\lambda_1 x_n (1 - x_n) + \gamma y_n, \\ y_{n+1} = 4\lambda_2 y_n (\lambda - y_n) + \gamma x_n \end{cases} \quad (1)$$

(x, y - динамические переменные, λ_1, λ_2 - параметры, отвечающие за удвоения, γ - параметр связи) приводит к возможности сосуществования сценариев перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода и через разрушение квазипериодического режима (рис. 1). Однако детального изучения возможных бифуркаций и весьма многообразных феноменов нелинейной динамики в такой системе проведено не было. В данной работе мы постарались, по крайней мере отчасти, восполнить этот пробел и более тщательно изучить устройство пространства управляющих параметров неидентичных связанных систем с удвоениями периода. В центре внимания следующие вопросы: как устроена область квазипериодики QR; каковы особенности устройства языков синхронизации на плоскости управляющих параметров подсистем и что происходит с ними при вариации величины связи; какие типы критического

Рис. 1. Границы бифуркационных линий для отображения вида (1) на плоскости параметров (λ_2, λ_1) [3]. Пунктирная линия указывает границу между областью существования цикла периода 2 и областью QP с квазипериодическим поведением. 1P, 2P и 4P - области существования циклов периода 1, 2 и 4, соответственно. Параметр связи $\epsilon=0.4$



поведения характерны на плоскости параметров, где «встречаются» сценарии перехода к хаосу через удвоения периода и через разрушение квазипериодического движения; какие новые типы критичности возможны в такой системе? Еще один существенный вопрос, который затронут в настоящей работе, - что изменится, а что сохранится в картине нелинейных явлений при переходе от связанных отображений к дифференциальным уравнениям? С этой целью проведен сравнительный анализ устройства пространства параметров неидентичных связанных логистических отображений и связанных осцилляторов Дуффинга под внешним гармоническим воздействием.

1. Связанные логистические отображения

Первой частью работы является исследование плоскости управляющих параметров неидентичных связанных логистических отображений. Выберем систему для изучения в следующей форме:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda_1 - x_n^2 + \epsilon(x_n - y_n), \\ y_{n+1} = \lambda_2 - y_n^2 + \epsilon(y_n - x_n). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ϵ - параметр связи. (Такой вид системы связанных отображений сейчас более принят, нежели эквивалентная ей система (1).)

В качестве основного инструмента для изучения устройства пространства параметров выберем достаточно популярный в настоящее время метод карт динамических режимов (см., например, [4]). Он состоит в том, что с помощью компьютера строится плоскость параметров системы, на которой оттенками серого цвета обозначаются области различных периодов. Нами выбран способ задания начальных условий, когда они «наследуются» - то есть при сканировании плоскости параметров новые начальные условия отвечают установившемуся режиму в предыдущей точке. Такие карты были построены для системы (2) при различных значениях параметра связи ϵ (рис. 2). Увеличенные фрагменты карт представлены на рис. 3. Выбранная цветовая «палитра» приведена на рис. 2. Цифры обозначают период цикла. Периоды циклов некоторых наиболее крупных областей устойчивости отмечены непосредственно на картах.

Отметим, что система связанных отображений, вообще говоря, характеризуется мультистабильностью, и вид карт (в той или иной степени) может зависеть от выбора начальных условий и от способа сканирования плоскости параметров. В нашем случае направление сканирования при построении карт производится слева направо и далее снизу вверх. Заметим, что при изменении

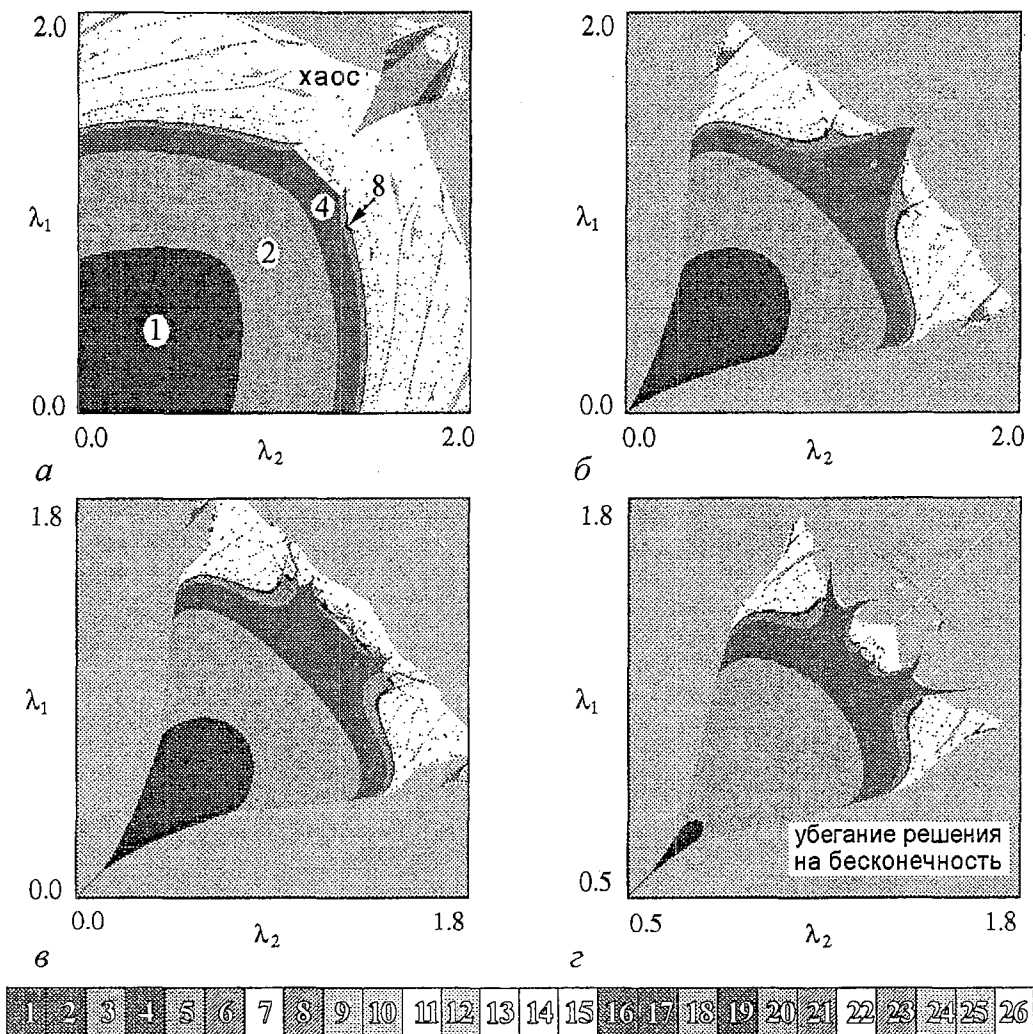


Рис. 2. Карты динамических режимов системы неидентичных связанных логистических отображений (2) на плоскости (λ_2, λ_1) при различных значениях параметра связи: $a - 0.2$, $б - 0.5$, $в - 0.6$, $г - 0.9$

порядка сканирования мы получали карту, визуально неотличимую от показанной на рис. 2. Это связано с выбранным способом построения - «наследование» начальных условий и «старт» из области периода 1.

Карты обладают рядом общих особенностей: они симметричны относительно главной диагонали, которой отвечает случай идентичных подсистем. Как и предсказано в работе [3], вблизи главной диагонали наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических режимов, а когда параметры λ_1 и λ_2 существенно отличаются друг от друга - по сценарию Фейгенбаума. Как уже отмечалось, особенно интересна для исследования область на плоскости параметров, где подходящие друг к другу критические линии Фейгенбаума терпят разрыв и образуют некоторую ограниченную слева и справа область квазипериодических режимов, содержащую внутри себя систему языков Арнольда (сравните рис. 1, 2 и 3). На рис. 2 видно, что эта область имеет некоторое достаточно сложное внутреннее устройство и испытывает существенные метаморфозы по мере увеличения параметра связи.

На рис. 3 она показана в увеличенном масштабе, что позволяет более

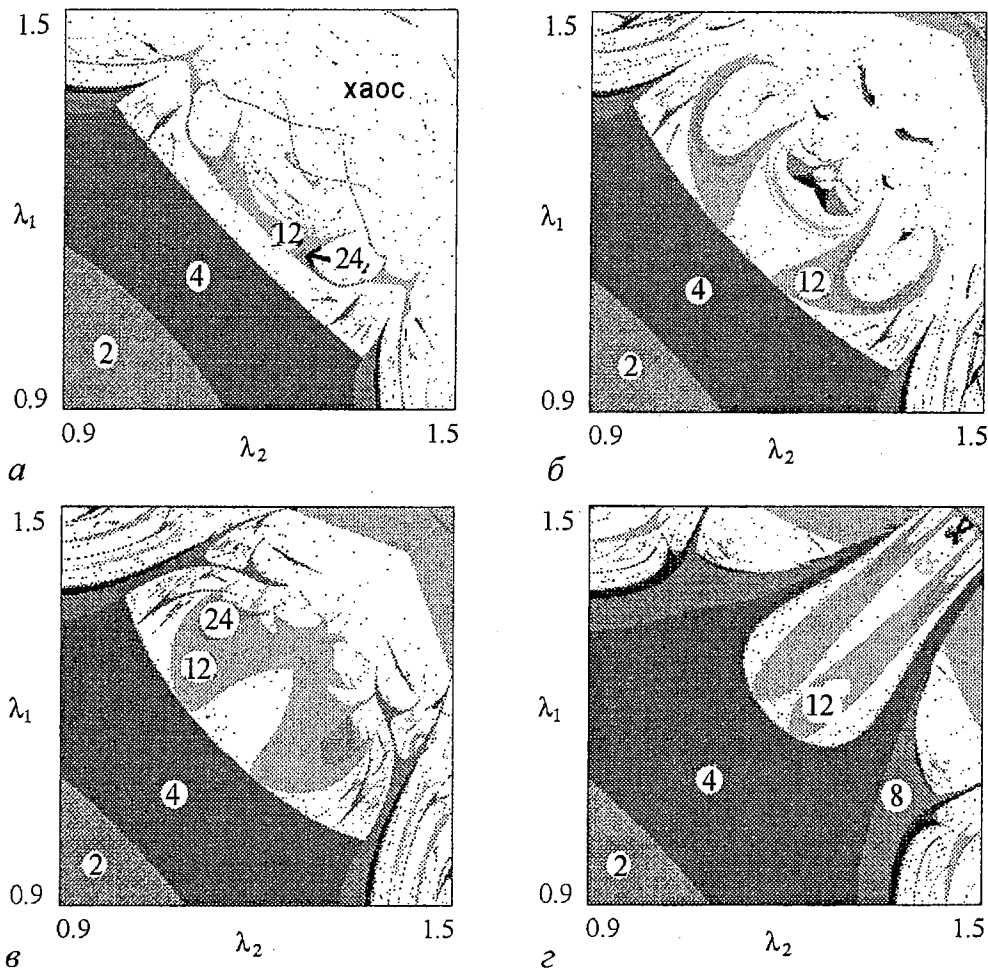


Рис. 3. Трансформация языков синхронизации системы (2) на плоскости (λ_2, λ_1) в диапазоне параметра диссипации ϵ от 0.3 до 0.49: а - 0.3, б - 0.4, в - 0.44, з - 0.49

детально рассмотреть ее устройство при вариации параметра связи от значения $\epsilon=0.3$ до $\epsilon=0.49$. Заметим, что снизу область квазипериодических режимов ограничена линией бифуркации Неймарка - Сакера (подробности см. ниже) на базе регулярного режима с периодом 4. При $\epsilon=0.3$ вблизи левого и правого края области квазипериодических движений располагаются очень узкие языки синхронизации больших периодов. Вблизи же диагонали можно видеть некоторую сложно устроенную область с основным периодом 12, внутри которой, в свою очередь, просматривается область периода 24 (рис. 3, а). Эта область на рис. 3, а лежит выше линии бифуркации Неймарка - Сакера и целиком располагается в области квазипериодических режимов. По мере увеличения ϵ она постепенно опускается вниз и, наконец, касается линии бифуркации Неймарка - Сакера, превращаясь в область резонанса 1:3. Затем она разрывается на две части, и возникают два языка синхронизации Арнольда периода 12, вершины которых скользят по границе существования цикла периода 4 (рис. 3, б). Кроме того, при $\epsilon=0.4$ вблизи диагонали на рис. 3, б можно видеть целую систему областей долгопериодических циклов, по-прежнему лежащих внутри областей квазипериодических режимов. При дальнейшем увеличении ϵ языки начинают деформироваться, как показано на рис. 3, в. Происходят существенные метаморфозы с краями области квазипериодических режимов. Резко удлиняются

образующие эти края линии периода 8, 16 и т.д. При $\epsilon=0.49$ резко удлиняются и искривляются уже границы области периода 4, у которой возникают два отростка, охватывающие языки синхронизации (рис. 3, з). Область квазипериодических режимов превращается в почти замкнутую область. Мелкие языки синхронизации, наблюдавшиеся ранее у ее левого и правого края, исчезают (по крайней мере, становятся незаметными).

На рис. 4 приведены фазовые портреты аттракторов в различных точках плоскости параметров (λ_1, λ_2) для значения параметра связи $\epsilon=0.4$. Видно, что язык синхронизации устроен сложным образом. В точках, близких к точке касания языка Арнольда линии бифуркации Неймарка - Сакера, фазовые портреты представляют собой гладкие инвариантные кривые. По мере удаления от точки касания инвариантные кривые начинают искажаться и терять гладкость (фрагменты 2 и 5), а в точках, близких к двум концам языка, наблюдаются фазовые портреты аттракторов в виде сложных лентообразных образований. Внутри языка наблюдается каскад удвоений периода.

Заметим также, что на рис. 3, в хорошо видно «наложение» друг на друга (вблизи диагонали) двух основных языков Арнольда периода 12, что иллюстрирует существование мультистабильности в системе. Мы, однако, не будем детально описывать этот феномен динамики связанных систем, а далее сосредоточимся на анализе критических явлений.

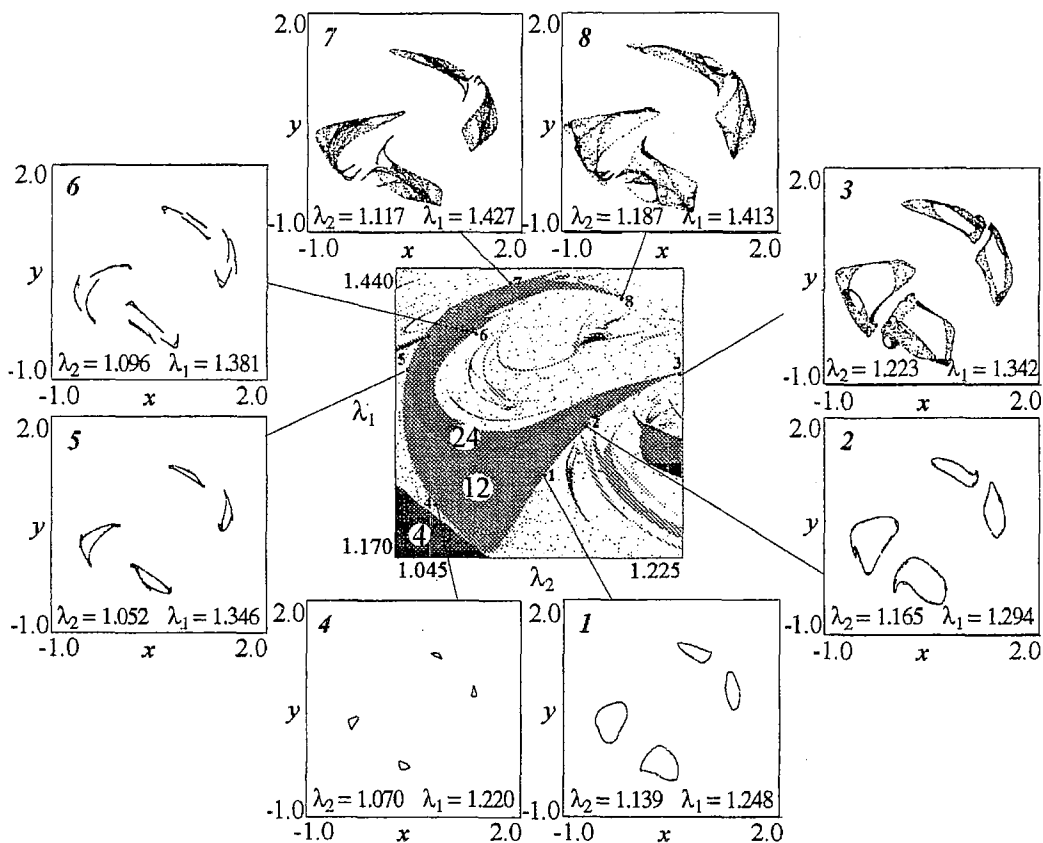


Рис. 4. Фазовые портреты аттракторов системы (2) в различных точках плоскости параметров (λ_2, λ_1) для значения параметра связи $\epsilon=0.4$. В центре представлена карта динамических режимов для $\epsilon=0.4$. Точные координаты (λ_2, λ_1) каждой выбранной точки на карте указаны в соответствующем фрагменте

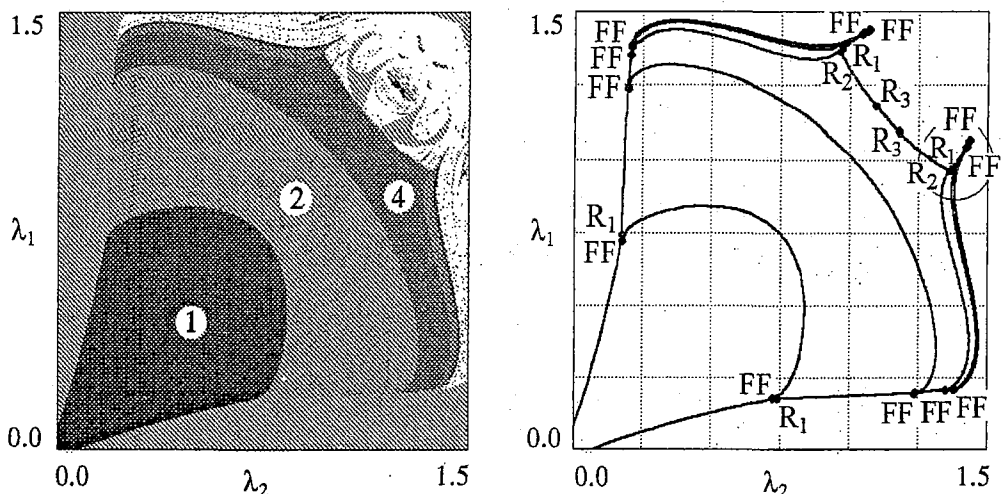


Рис. 5. Карта динамических режимов (а) системы (2) при $\varepsilon=0.4$ и соответствующая ей плоскость параметров (λ_2, λ_1) , на которой изображены основные бифуркационные линии (б). FF - терминальная точка, R1 - точка резонанса 1:1, R2 - точка резонанса 1:2, R3 - точка резонанса 1:3. С помощью окружности на фрагменте (б) выделена область, которая в увеличенном масштабе показана на рис. 6

Как уже отмечалось, особый интерес вызывает область, где встречаются два разных сценария перехода к хаосу - через удвоения периода и через разрушение квазипериодических режимов. Это окрестность двух характерных острий, хорошо видных на рис. 3, б. Однако для более детального описания этих областей уже недостаточно построения карт режимов, а требуется более тщательный бифуркационный анализ. Для того чтобы проиллюстрировать оба этих метода для системы (2), на рис. 5 показаны в одном масштабе карта режимов (рис. 5, а) и бифуркационная диаграмма (рис. 5, б) для значения параметра связи $\varepsilon=0.4^*$. Более детально бифуркационные линии и точки в окрестности правого острия показаны в увеличенном виде на рис. 6. Окрестность левого острия устроена совершенно аналогично в силу симметрии системы.

При движении из области устойчивости цикла периода 1 в сторону увеличения параметра λ_1 можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода. Начиная с цикла периода 4, соответствующие линии бифуркации удвоения периода при увеличении параметра λ_2 завершаются, не доходя до диагонали, в точках бифуркации коразмерности 2. Для цикла периода 4 - это точка резонанса 1:2 (на рисунке точка R2, оба мультипликатора цикла равны $\mu_{1,2}=-1$), а для циклов большего периода это терминальные точки, в которых мультипликаторы $\mu_1=-1$ и $\mu_2=1$ (на рисунке точки FF, от Flip-Fold).

Заметим, что из точки R2 выходит линия бифуркации Неймарка - Сакера NS_1 ($|\mu_{1,2}|=1$, выделена жирной линией), которая и образует край области квазипериодических режимов, описанной ранее с помощью карт динамических режимов. На нее опираются языки Арнольда различного периода (см. рис. 5, а), включая область резонанса 1:3 (точка резонанса R3 на рис. 5, б). Далее, из точки R2 выходит еще одна линия Неймарка - Сакера NS_2 , также показанная жирной линией на рис. 6. Таким образом, область устойчивости цикла периода 8 ограничена сверху (см. рис. 6) участком бифуркационной линии Неймарка -

* Расчеты проводились с помощью программы CONTENT [Yu.A. Kuznetsov and V.V. Levitin (1997) «CONTENT: A multiplatform environment for continuation and bifurcation analysis of dynamical systems» Centrum voor Wiskunde en Informatica, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, The Netherland, ftp://ftp.cwi.nl/pub/content].

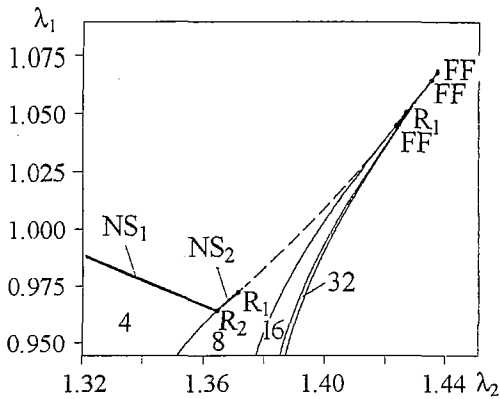


Рис. 6. Увеличенный фрагмент рис. 5,б. Цифрами отмечены области существования циклов периодов 4, 8, 16 и 32; сплошные линии соответствуют линиям бифуркаций удвоения периода, прерывистые - линиям жесткого перехода, жирные - линиям бифуркаций Неймарка - Сакера NS

Для циклов удвоенного периода на рис. 6 можно видеть последовательность терминальных точек FF (на рисунке указаны три такие точки). В Таблице приведены терминальные точки FF для линий бифуркации удвоения периода, начиная с цикла периода 8 до 1024. Можно видеть, что эта последовательность накапливается к некоторой предельной критической точке. Подобная последовательность бифуркаций типа терминальных точек FF исследовалась в работах [6-10], и было обнаружено, что соответствующая критическая точка этого типа ассоциируется с циклом периода 2 ренормгруппового преобразования удвоения (то есть с неподвижной точкой преобразования учетверения РГ). Эта точка является терминальной для фейгенбаумовской критической линии, то есть точкой, в которой фейгенбаумовская линия обрывается. Такой тип критичности получил наименование С-тип. Доказано, что в критической точке типа С критический квазиаттрактор состоит из бесконечного множества сосуществующих аттракторов - устойчивых циклов периодов $2 \cdot 4^k$ и неустойчивых циклов периодов 4^k ($k=1,2,\dots,\infty$) [7-11].

Сакера NS₂ и линией жесткого перехода ($\mu_1=1$, $|\mu_2|<1$, пунктирная линия), которые разделены точкой бифуркации коразмерности 2 (на рисунке обозначена R1 - точка резонанса 1:1, $\mu_{1,2}=-1$).

Отметим, что список локальных бифуркаций, связанных с резонансом 1:2, исчерпывается приведенными на рис. 6. Следует, однако, подчеркнуть, что бифуркация Неймарка - Сакера на линии NS₂ является субкритической. В окрестности резонанса существует еще несколько линий глобальных бифуркаций, связанных с перестройками замкнутых инвариантных многообразий, возникающих в результате бифуркаций на линиях NS₁ и NS₂ (см., например, [5-6], где подробно описаны бифуркации в окрестности резонанса 1:2).

Таблица

Терминальные точки FF системы (2) для значения параметра связи $\epsilon=0.4$

№ уровня	x	y	λ_2	λ_1
8	1.52748654438	0.832027050076	1.42211434872	1.04536723026
16	1.51924944092	0.925594316666	1.43342291359	1.06527796425
32	1.51549610195	0.944420633912	1.43540783724	1.06925872682
64	1.51462907469	0.947525094423	1.43560852092	1.06967100717
128	1.51448606773	0.948436165896	1.43574276220	1.06994764874
256	1.51444199033	0.948492315004	1.43572781554	1.06991681069
512	1.55015567623	0.691545135397	1.43574642151	1.06995521068
1024	1.55014968148	0.691536759962	1.43573942195	1.06994076322

Следует отметить, что в области малых значений параметра λ_2 (а в силу симметрии и в области малых λ_1) также наблюдается накопление терминальных точек линий удвоения периода, однако в данной работе мы подробно исследуем лишь интересующую нас область, в которой сходятся области квазипериодических движений и каскад удвоения периода.

2. Связанные осцилляторы Дуффинга под внешним гармоническим воздействием

Как мы видели, устройство плоскости управляющих параметров системы двух неидентичных связанных логистических отображений обладает достаточно тонкой структурой. Интересно выяснить, в какой мере соответствующие особенности характерны для более реалистичных моделей, в частности, для дифференциальных систем. Для ответа на этот вопрос мы обратились к системе связанных осцилляторов Дуффинга, находящихся под внешним гармоническим воздействием

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 + \gamma dx/dt + x + x^3 + \varepsilon(x - y) &= A \cos(\omega t), \\ d^2y/dt^2 + \gamma dy/dt + y + y^3 + \varepsilon(y - x) &= B \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь x, y - динамические переменные, t - время, γ - параметр затухания, ε - параметр связи, A, B - амплитуды внешнего воздействия, ω - частота внешнего воздействия.

Автономный осциллятор Дуффинга при фиксированных параметре диссипации γ и частоте воздействия ω с ростом амплитуды внешнего сигнала A демонстрирует каскад бифуркаций удвоения и переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Поэтому можно ожидать, что два связанных осциллятора (3) относятся к рассматриваемому нами классу систем.

На рис. 7 изображены карты динамических режимов связанных осцилляторов Дуффинга на плоскости амплитуд воздействия отдельных осцилляторов (A, B) для различных значений параметра связи ε . Значения параметра диссипации и частоты внешнего сигнала выбраны равными соответственно $\gamma=0.2, \omega=1.46$. Рассмотрение карт для потоковой системы (3) и их сравнение с аналогичными картами для связанных логистических отображений (2) выявляют ряд сходных черт.

Имеется также характерная область квазипериодических режимов, только теперь она ограничена областью цикла периода 2. На рис. 7, в-д можно видеть мелкие языки синхронизации у левого и правого краев области квазипериодических движений. В то же время, устройство плоскости параметров в окрестности диагонали может существенно отличаться. Резонанс 1:3, столь характерный для связанных логистических отображений и занимающий почти всю область в центре рис. 3, здесь отсутствует. Вместо него на рис. 7, в мы видим резонанс 1:5. (Язык Арнольда периода 10, опирающийся на линию бифуркации Неймарка - Сакера области устойчивости цикла периода 2.) Однако с ростом параметра связи ε эволюция карт происходит по-другому. Область квазипериодических режимов не замыкается, как на рис. 3, г, а наоборот, расширяется (рис. 7, г-е). Также определенные отличия наблюдаются и при уменьшении параметра связи ε (рис. 7, а-б). Так, на рис. 7, а мы видим, что долгопериодические циклы образовали области, свернутые в виде полукольца.

Итак, система связанных осцилляторов Дуффинга также демонстрирует сосуществование двух сценариев перехода к хаосу - через удвоения периода и через

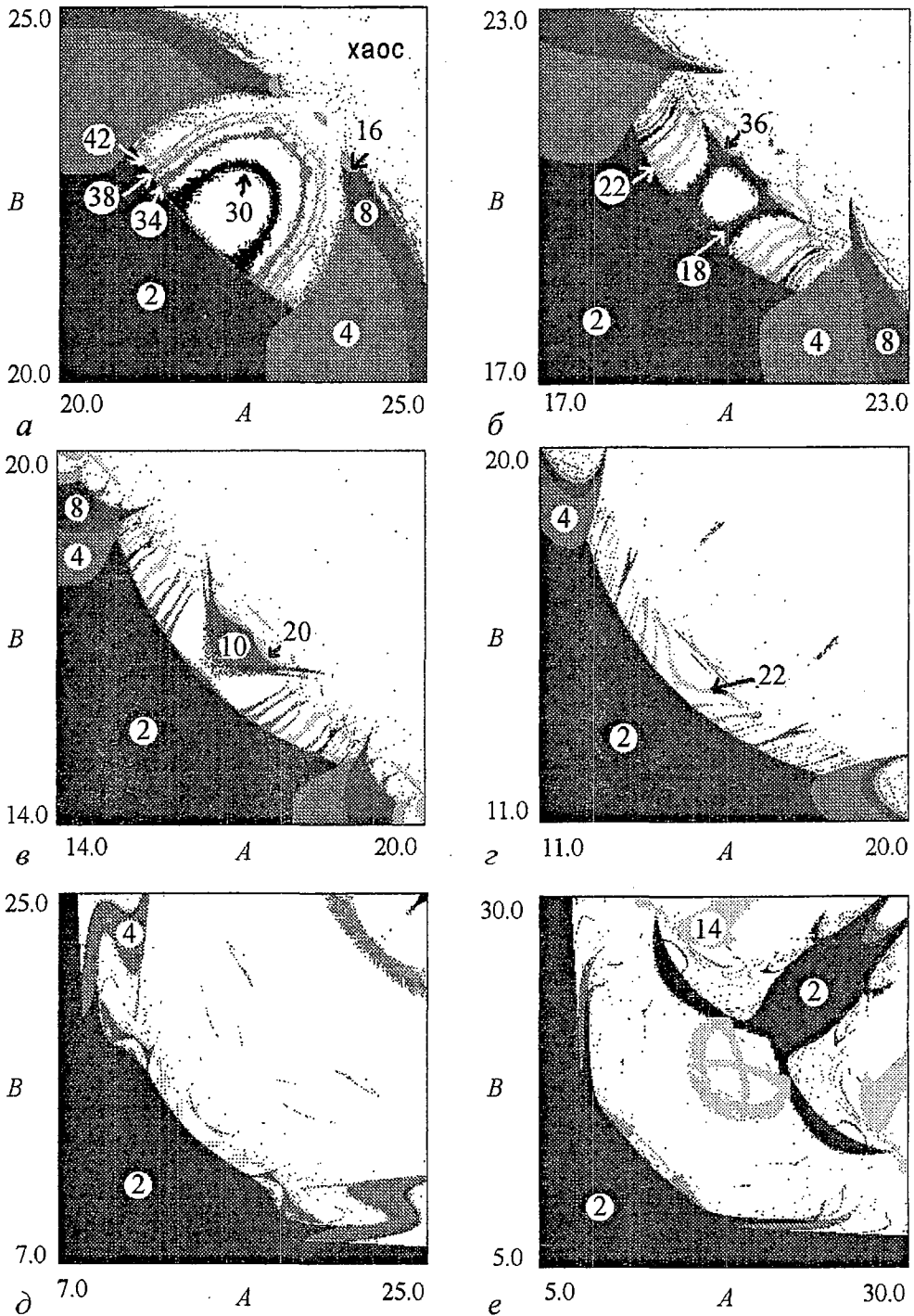


Рис. 7. Карты динамических режимов системы связанных осцилляторов Дuffинга (3) на плоскости (A, B) при различных значениях параметра связи: $a - 0.2, б - 0.3, в - 0.5, г - 0.7, д - 0.8, е - 1.0$. При построении карт рассматривались периоды, кратные двум. Параметры $\gamma=0.2$ и $\omega=1.46$. Цифрами отмечены области существования циклов различных периодов

квазипериодические режимы, однако тонкие детали картины перехода могут отличаться от аналогичной картины для связанных логистических отображений. В то же время, на рис. 7, *в* можно видеть характерные острия в области, где встречаются эти сценарии. Это сигнализирует о возможности существования

соответствующего типа критичности коразмерности два. Однако его поиск и надежная идентификация для дифференциальной системы даже для современных компьютеров представляет слишком сложную задачу. Таким образом, пока приходится ограничиться визуальным сопоставлением карт режимов.

Заметим, наконец, что для системы (3) при $\epsilon=0.3$ построены также фазовые портреты аттракторов в сечении Пуанкаре (рис. 8).

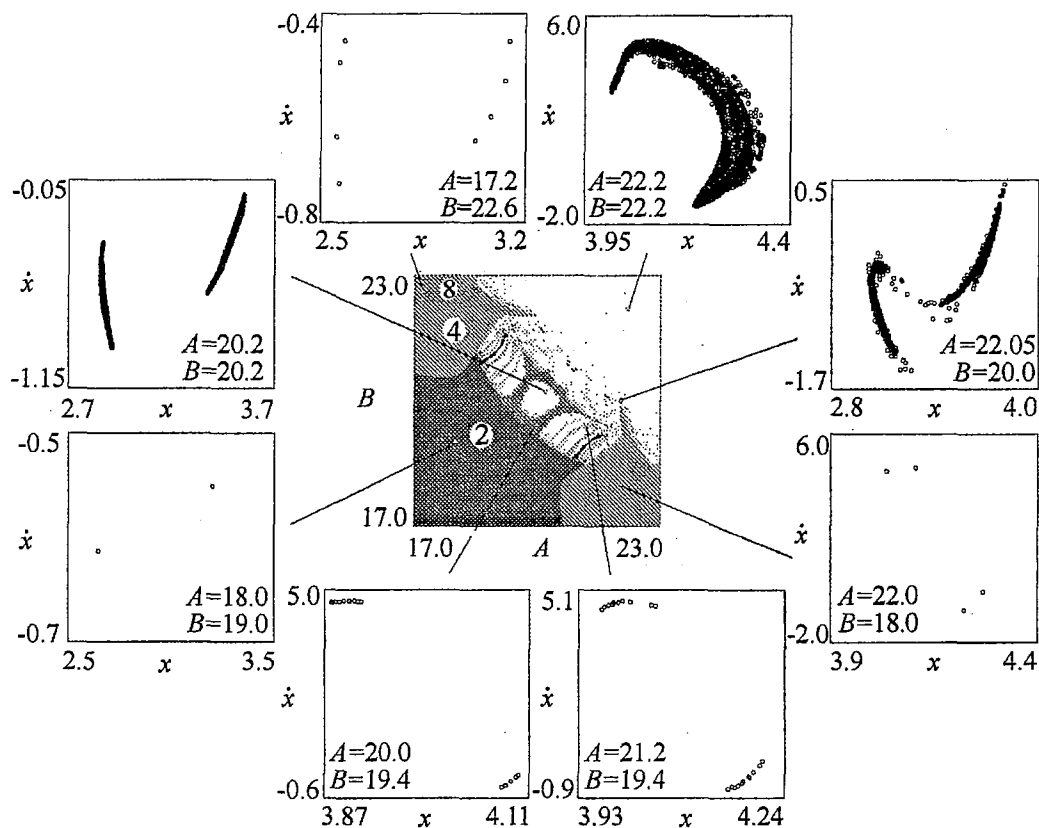


Рис. 8. Фазовые портреты аттракторов системы (3) в сечении Пуанкаре в различных точках плоскости параметров (A, B) для значения параметра связи $\epsilon=0.3$ (в центре рисунка представлен фрагмент карты динамических режимов для $\epsilon=0.3$). Точные координаты (A, B) каждой выбранной точки на карте режимов указаны рядом с соответствующим сечением Пуанкаре

Заключение

Таким образом, пространство управляющих параметров простейших связанных неидентичных систем с удвоениями периода - логистических отображений - обладает очень тонким и сложным устройством. Оно характеризуется своеобразной картиной языков синхронизации и наличием критических точек коразмерности два, известных как С-тип критичности и представляющих собой концевые точки фейгенбаумовских линий. Для осцилляторов Дуффинга под гармоническим воздействием можно отметить сходство с такой картиной, но имеются и определенные отличия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-02-16074), Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF, грант № REC-006) и фонда некоммерческих программ «Династия» при содействии МЦФФМ.

Библиографический список

1. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
2. Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D. Chaotic synchronization. Application to living systems// World Scientific Series on Nonlinear Science, 2002, Series A. Vol. 42, 440 p.
3. Jian-Min Yuan, Mingwei Tung, Da Hsuan Feng, and Lorenzo M. Narducci. Instability and irregular behavior of coupled logistic equations // Phys. Rev. A, 1983. Vol. 28, № 3. P. 1662.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
5. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. РХД, 1999.
6. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
7. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // Physica D. 1997. Vol. 109. P. 91.
8. Кузнецов С.П., Сатаев И.Р. Гибрид удвоений периода и касательной бифуркации: количественная универсальность и двухпараметрический скейлинг // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 4. С. 3.
9. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Period-doubling for two-dimensional non-invertible maps: Renormalization group analysis and quantitative universality // Physica D. 1997. Vol. 101. P. 249.
10. Kuznetsov S.P., Sataev I.R. Universality and scaling for the breakup of phase synchronization at the onset of chaos in a periodically driven Rossler oscillator // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64, № 4, 046214 (7 pages).
11. Кузнецов А.П., Кузнецова А.Ю., Сатаев И.Р. О критическом поведении отображения с бифуркацией Неймарка - Сакера при разрушении фазовой синхронизации в предельной точке фейгенбаумовского каскада // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 1. С. 12.

Саратовское отделение Института
радиотехники и электронике РАН
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 19.11.03
после доработки 21.09.04

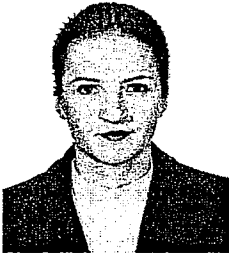
STRUCTURE OF CONTROL PARAMETERS SPACE OF NONIDENTICAL COUPLED SYSTEMS WITH PERIOD-DOUBLINGS

A.P. Kuznetsov, J.V. Sedova, I.R. Sataev

The structure of control parameters space of nonidentical coupled logistic maps is discussed. The critical points of codimension two connected with accumulation of bifurcation situations of codimension two are found. The structure of control parameters space of two coupled Duffing oscillators is discussed.



Сатаев Игорь Рустамович – родился в 1959 году. Окончил Московский физико-технический институт (1982). Кандидат физико-математических наук (1998, СГУ), старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов – критические явления в нелинейной динамике, моделирование динамики на пороге хаоса, применение численных методов для решения ренормгрупповых уравнений. Автор более 30 научных публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



Седова Юлия Викторовна – родилась в 1979 году. Окончила Саратовский государственный университет (2001). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2004), научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Научные интересы – влияние шума на динамические системы, дискретные отображения, связанные системы, динамический хаос. Автор 6 статей в отечественной и зарубежной печати.