



ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ: ЧТО ЭТО ТАКОЕ?*

П.С. Ланда

- Дается краткое описание свойств турбулентных течений в затопленных дозвуковых струях. На начальном участке струи, где турбулентные пульсации достаточно малы, для расчетов процессов в струе используется метод Крылова – Боголюбова. Показано, что результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Понятие турбулентности включает в себя множество самых различных аспектов. Часто этим термином называют все явления динамического хаоса, часто любые случайные волны в сплошных средах, даже вызванные какими-либо внешними случайными источниками. Чтобы избежать неопределенности, в этой работе рассматривается только гидродинамическая турбулентность. Но и она бывает разная. Существует так называемая развитая турбулентность, которую можно охарактеризовать рядом универсальных закономерностей. Пионерами работ в этой области являются А.Н. Колмогоров и А.М. Обухова [1–4], а их продолжателями — И. Прокаччия, В.С. Львов и др. [5, 6]. Но с точки зрения теории колебаний и нелинейной динамики более интересным является переход от ламинарного течения к турбулентному, причины этого перехода и процесс развития турбулентности на начальном участке. Известно, что турбулентность в потоках жидкости или газа возникает при увеличении числа Рейнольдса, пропорционального скорости потока и обратно пропорционального вязкости. Первые экспериментальные работы по турбулентности были выполнены именно в этом русле [7, 8]. Проблемой устойчивости ламинарного течения жидкости занимались такие выдающиеся ученые как В. Гайзенберг [9] и Л.Д. Ландау [10]. Однако их результаты носили скорее математический характер. Из них невозможно сделать заключение о механизме возникающей неустойчивости. Широко распро-

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия

страненный в последние годы взгляд на возникновение турбулентности как на возбуждение автоколебаний верен только в исключительных случаях, когда в потоке имеется обратная связь. Как правило, такая связь отсутствует, вследствие чего автоколебания возбудиться не могут даже при наличии сильной неустойчивости. Здесь существенно, что неустойчивость в жидкости имеет конвективный характер, а не абсолютный. Отсюда следует, что причиной перехода к турбулентности является не возбуждение автоколебаний, а некий «фазовый переход» [11], вызванный сильным усилением слабого шума, всегда имеющегося в любой системе. В результате такого перехода система может перейти в качественно новое состояние, которое как раз и представляет собой турбулентное состояние.

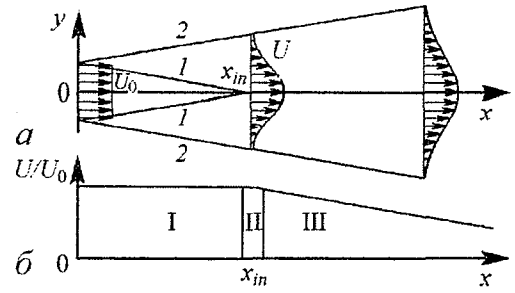
Такой переход легко может быть прослежен на примере струйных потоков. В отличие от течений в каналах, струйные потоки бывают ламинарными только при очень малых числах Рейнольдса. В широком диапазоне чисел Рейнольдса так называемые гидродинамические волны, рожденные очень слабыми случайными источниками во входном сечении струи, усиливаются и распространяются вниз по потоку со скоростью порядка скорости струи. Частотный спектр этих волн является весьма широким. Однако по мере распространения спектр гидродинамических волн существенно сужается, и на фоне этих случайных волн рождаются сравнительно крупномасштабные структуры — вихри, которые получили название когерентных структур. Образование таких структур сопровождается резким усилением интенсивности пульсаций скорости, что и можно трактовать как фазовый переход. Конечно, этот переход не является резко выраженным, как, например, в нелинейном осцилляторе с чисто мультипликативным шумом [12]. Однако, как показали наши исследования, существует глубокая аналогия между процессами в таком осцилляторе и в струях.

Интересно, что гидродинамические волны, взаимодействуя с каким-либо препятствием или неоднородностью, не испытывают простого отражения, а индуцируют акустические волны, распространяющиеся вверх по потоку. В свою очередь, акустические волны, взаимодействуя с препятствием или неоднородностью, индуцируют гидродинамические волны, распространяющиеся вниз по потоку. Безусловно, в этом заключен механизм некоторой обратной связи. Однако эта обратная связь в свободных струях является нелинейной и довольно слабой. Она не может не только вызвать самовозбуждение автоколебаний, но и поддерживать уже возбужденные автоколебания. Только в струях, взаимодействующих с жесткими препятствиями, например, в струях, ударяющихся об экран (так называемые импактные струи) [13], такое возбуждение автоколебаний имеет место.

Вытекая из сопла, струя жидкости всегда заметно расширяется. Это связано с тем фактом, что, благодаря вязкости, соседние слои жидкости все больше вовлекаются в поток. Профиль средней скорости существенно изменяется при удалении от сопла. Если вблизи сопла он является почти прямоугольным, то дальше он постепенно становится колоколообразным. Уширение струи и изменение профиля средней скорости проиллюстрировано на рис. 1.

Так как вблизи сопла, из которого вытекает струя, флуктуации скорости являются достаточно малыми, для расчета перехода к турбулентности можно использовать квазилинейные методы, в частности, метод Крылова – Боголюбова [14]. Мы рассматриваем плоскую струю и используем в качестве исходных двумерные уравнения Навье – Стокса для функции тока $\Psi(t, x, y)$ и завихренности $\tilde{\Omega}(t, x, y)$. В без-

Рис. 1. *a* — схематическое изображение расходящейся свободной струи, иллюстрирующее изменение ее средней скорости и уширение пограничного слоя (линии 1, 2 соответствуют внутренней и внешней границам пограничного слоя); *b* — схематическая зависимость относительной средней скорости U/U_0 вдоль оси струи от относительного расстояния x от выходного отверстия сопла.



размерных координатах они имеют вид

$$\tilde{\Omega}(t, x, y) = \Delta \Psi(t, x, y), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\Omega}(t, x, y)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi(t, x, y)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\Omega}(t, x, y)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial \Psi(t, x, y)}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\Omega}(t, x, y)}{\partial x} - \frac{2}{\text{Re}} \Delta \tilde{\Omega}(t, x, y) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\text{Re} = 2U_0 d/\nu$ — число Рейнольдса, U_0 — средняя скорость в центре сопла. Заметим, что при таком выборе безразмерных переменных круговые частоты $\omega = 2\pi f$ измеряются в единицах $S = \omega d/U_0 \equiv \pi \text{St}$, где $\text{St} = 2fd/U_0$ — число Струхала.

В соответствии с нашими представлениями о природе турбулентности в струях, возникновение турбулентных пульсаций вызвано, главным образом, случайными возмущениями на выходе сопла. В большинстве работ, посвященных устойчивости этих малых возмущений [15–17], авторы представляют решение в виде суммы средних значений и малых отклонений от средних. По нашему мнению, эта процедура неудачна по двум причинам: во-первых, точные уравнения для средних значений неизвестны, а во-вторых, случайные возмущения вносят существенный вклад в средние значения. Поэтому мы представляем решение уравнений (1), (2) в виде суммы динамических и случайных составляющих. Пренебрегая случайными возмущениями везде, кроме выходного сечения сопла, мы полагаем

$$U(t, 0, y) = u_d(0, y) + \xi_1(t, y), \quad V(t, 0, y) = v_d(0, y) + \xi_2(t, y), \quad (3)$$

$$U(t, x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V(t, x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

— продольная и поперечная скорости течения, $u_d(0, y)$ и $v_d(0, y)$ — динамические составляющие скорости на выходе из сопла, $\xi_1(t, y)$ и $\xi_2(t, y)$ — случайные возмущения. Из уравнений (1), (2) следует, что динамические составляющие $u_d(x, y)$,

$v_d(x, y)$ и $\Omega_d(x, y)$ описываются уравнениями

$$\Omega_d(x, y) = \frac{\partial u_d(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial v_d(x, y)}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_d(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v_d(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$u_d(x, y) \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial x} + v_d(x, y) \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega_d(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_d(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Поскольку аналитическое решение этих уравнений невозможно, мы задали $u_d(x, y)$ в форме

$$u_d(x, y) = \frac{1}{1 + \tanh(q/\delta_{00} + r_0)} \left[1 - \tanh \left(q \frac{|y| - 1}{\delta_0(x)} - r(x) \right) \right], \quad (7)$$

где $\delta_0(x)$ и $r(x)$ — неизвестные функции x , q — неизвестная константа, $\delta_0(x)$ — относительная толщина пограничного слоя, $\delta_{00} = \delta_0(0)$, $r_0 = r(0)$. В случае ламинарного истечения из сопла можно положить $\delta_{00} = 1/(b_0\sqrt{\text{Re}})$, где b_0 — некоторая постоянная.

Толщины внутренней и внешней частей пограничного слоя ($\delta_1(x)$ и $\delta_2(x)$) определяются соотношениями

$$u_d(x, 1 - \delta_1(x)) = \alpha, \quad u_d(x, 1 + \delta_2(x)) = 1 - \alpha, \quad (8)$$

где α — число, близкое к 1. Как следует из (7) и (8),

$$q \frac{\delta_1(x)}{\delta_0(x)} + r(x) = \text{arc tanh}(2\alpha - 1), \quad q \frac{\delta_2(x)}{\delta_0(x)} - r(x) = \text{arc tanh}(2\alpha - 1). \quad (9)$$

Складывая выражения (9), находим связь между q и α :

$$q = 2 \text{arc tanh}(2\alpha - 1). \quad (10)$$

Например, при $\alpha = 0.95$ имеем $q \approx 3$. Подставляя (10) в (9), находим

$$\frac{\delta_1(x)}{\delta_0(x)} = \frac{1}{2} - \frac{r(x)}{q}, \quad \frac{\delta_2(x)}{\delta_0(x)} = \frac{1}{2} + \frac{r(x)}{q}. \quad (11)$$

Чтобы найти неизвестные функции в выражении (7), мы используем приближенные законы сохранения для потоков импульса и энергии. Обычно такие законы выводятся для средних значений этих потоков, исходя из уравнения Рейнольдса [18, 19]. Поэтому они включают в себя так называемую турбулентную вязкость. Мы выведем их исходя из уравнений (4)–(6) для динамических составляющих. С этой целью мы преобразуем уравнения (4)–(6) следующим образом. Подставляя $\Omega_d(x, y)$ из уравнения (4) в уравнение (6) и принимая во внимание, что на начальном участке струи производные $\partial^2 u_d/\partial x^2$ и $\partial^2 v_d/\partial x^2$ пренебрежимо малы, получаем

$$u_d(x, y) \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial x \partial y} + v_d(x, y) \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial y^2} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^3 u_d(x, y)}{\partial y^3} = 0. \quad (12)$$

Учитывая уравнение непрерывности (5), перепишем уравнение (12) в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_d^2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_d(x, y)v_d(x, y))}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по y , получаем следующее приближенное уравнение:

$$\frac{\partial u_d^2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_d(x, y)v_d(x, y))}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_d(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

Закон сохранения для потока импульса находится путем интегрирования уравнения (14) по y от $-\infty$ до ∞ с учетом того, что $u_d(x, \pm\infty) = 0$ и $\partial u_d(x, \pm\infty)/\partial y = 0$. Таким образом, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u_d^2(x, y) dy = 0. \quad (15)$$

Чтобы вывести закон сохранения для динамической составляющей потока энергии, умножим уравнение (14) на $2u_d(x, y)$ и преобразуем его к виду

$$\frac{\partial u_d^3}{\partial x} + \frac{\partial (u_d^2 v_d)}{\partial y} = \frac{4}{\text{Re}} u_d \frac{\partial^2 u_d}{\partial y^2}. \quad (16)$$

Интегрируя затем (16) по y от $-\infty$ до ∞ и принимая во внимание указанные выше граничные условия, находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u_d^3(x, y) dy = -\frac{4}{\text{Re}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u_d(x, y)}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (17)$$

Так как $u_d(x, y)$ является четной функцией y , из (15) и (17) получаем следующие приближенные уравнения:

$$\int_0^{\infty} u_d^2(x, y) dy = \int_0^{\infty} u_d^2(0, y) dy, \quad (18)$$

$$3 \int_0^{\infty} u_d^2(x, y) \frac{\partial u_d(x, y)}{\partial x} dy = -\frac{4}{\text{Re}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u_d(x, y)}{\partial y} \right)^2 dy. \quad (19)$$

Подставляя (7) в (18) и учитывая, что

$$\int_0^{\infty} u_d^2(0, y) dy \approx 1,$$

находим соотношение между $r(x)$ и $\delta_0(x)$:

$$\ln \left[2 \cosh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r(x) \right) \right] - \frac{q}{\delta_0(x)} + r(x) - \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r(x) \right) \right] = 0. \quad (20)$$

На участке струи, где выполняется условие

$$\frac{q}{\delta_0(x)} \gg 1, \quad (21)$$

соотношение (20) сводится к $2r(x) \approx 1$, то есть $r(x) \approx r_0 = 0.5$. Отсюда и из (13), (11) следует, что

$$\delta_1(x) \approx \frac{\delta_0(x)}{3}, \quad \delta_2(x) \approx \frac{2\delta_0(x)}{3}. \quad (22)$$

Подставляя (7) в (19) и принимая во внимание (20), мы находим дифференциальное уравнение для $\delta_0(x)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ 5 \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) - 4 - \cosh^{-2} \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) - \frac{2q}{\delta_0(x)} \left[1 - \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} \left(3 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right) \cosh^{-2} \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right] \right\} \frac{d\delta_0(x)}{dx} = \\ & = \frac{4q^2}{3\text{Re}\delta_0(x)} \left[1 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right] \times \\ & \times \left[1 + \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) + \cosh^{-2} \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Аналитически решение этого уравнения можно найти только при условии (21). При этом условии уравнение (23) принимает вид

$$\frac{d\delta_0(x)}{dx} = \frac{16q^2}{3\text{Re}\delta_0(x)}, \quad (24)$$

откуда следует

$$\delta_0(x) = \sqrt{\delta_{00}^2 + 2kx}, \quad \frac{d\delta_0(x)}{dx} = \frac{k}{\delta_0(x)}, \quad (25)$$

где $k = 16q^2/(3\text{Re})$.

Выражения для $v_d(x, y)$ и $\Omega_d(x, y)$ могут быть найдены путем решения уравнений (4), (5). В результате находим

$$\begin{aligned} v_d(x, y) = & - \frac{16q\text{sign } y}{3\text{Re}\delta_0(x) \left(1 + \tanh(q/\delta_{00} + r_0) \right)} \times \\ & \times \left[\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} \tanh \left(\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} - r_0 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{q}{\delta_0(x)} \tanh \left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0 \right) - \ln \frac{\cosh \left(q(|y| - 1)/\delta_0(x) - r_0 \right)}{\cosh \left(q/\delta_0(x) + r_0 \right)} \right], \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_d(x, y) = & -\frac{q \operatorname{sign} y}{\delta_0(x) \left(1 + \tanh(q/\delta_{00} + r_0)\right)} \times \\
& \times \left\{ \left(1 + \frac{256q^4(|y| - 1)^2}{9\delta_0^4(x)\operatorname{Re}^2}\right) \cosh^{-2}\left(\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} - r_0\right) - \right. \\
& -\frac{256q^2}{9\delta_0^2(x)\operatorname{Re}^2} \left[\frac{q^2}{\delta_0^2(x)} \cosh^{-2}\left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0\right) - \frac{q}{\delta_0(x)} \left((|y| - 1) \tanh\left(\frac{q(|y| - 1)}{\delta_0(x)} - r_0\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \tanh\left(\frac{q}{\delta_0(x)} + r_0\right)\right) + \ln \frac{\cosh\left(q(|y| - 1)/\delta_0(x) - r_0\right)}{\cosh\left(q/\delta_0(x) + r_0\right)} \right] \left. \right\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Подставляя далее в уравнения (1), (2)

$$U(t, x, y) = u_d(x, y) + \frac{\partial \psi(t, x, y)}{\partial y}, \quad V(t, x, y) = v_d(x, y) - \frac{\partial \psi(t, x, y)}{\partial x}, \quad (28)$$

$$\tilde{\Omega}(t, x, y) = \Omega_d(x, y) + \Omega(t, x, y)$$

и учитывая (4)–(6), находим уравнения для стохастических компонент $\psi(t, x, y)$ и $\Omega(t, x, y)$, которые запишем в виде

$$\Omega - \Delta \psi = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u_d(x, y) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v_d(x, y) \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \Omega_{dy}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Omega_{dx}(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2}{\operatorname{Re}} \Delta \Omega = \\
= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad (30)
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_{dx}(x, y) = \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial x}, \quad \Omega_{dy}(x, y) = \frac{\partial \Omega_d(x, y)}{\partial y}.$$

Согласно (3), граничные условия для уравнений (29), (30) имеют вид

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{x=0} = \xi_1(t, y), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = -\xi_2(t, y). \quad (31)$$

Уравнения (29), (30) с граничными условиями (31) мы решаем методом Крылова – Боголюбова для распределенных систем [20]. В нулевом приближении мы получаем следующее уравнение для стохастической компоненты функции тока:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial t} + u_d(x, y) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} + v_d(x, y) \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} - \\
- \Omega_{dy}(x, y) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \Omega_{dx}(x, y) \frac{\partial \psi_0}{\partial y} - \frac{2}{\operatorname{Re}} \Delta \Delta \psi_0 = 0. \quad (32)
\end{aligned}$$

Частное решение уравнения (32) ищем в виде суммы бегущих волн частоты S с медленно меняющимся волновым числом $Q(S, x)$:

$$\psi_0(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(S)}(x, y) \exp \left[i \left(St - \int_0^x Q(S, x) dx \right) \right] dS. \quad (33)$$

Принимая во внимание, что струя расширяется медленно, функцию $f^{(S)}(x, y)$ и волновое число $Q(S, x)$ можно представить в виде ряда по некоторому условному малому параметру $\mu \sim 1/\sqrt{\text{Re}}$:

$$f^{(S)}(x, y) = f_0(S, x, y) + \mu f_1(S, x, y) + \dots,$$

$$Q(S, x) = Q_0(S, x) + \mu Q_1(S, x) + \dots, \quad (34)$$

где $f_0(S, x, y)$, $f_1(S, x, y)$, \dots — неизвестные функции, которые (вместе со своими производными) должны обращаться в нуль при $y = \pm\infty$.

Подставляя (33), с учетом (34), в уравнение (32) и сохраняя члены, содержащие только первые производные по x , получаем для функций $f_0(S, x, y)$ и $f_1(S, x, y)$ следующие уравнения:

$$L_0(Q_0)f_0 = 0, \quad (35)$$

$$L_0(Q_0)f_1 = iQ_1L_1(Q_0)f_0 - L_2(Q_0)f_0, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} L_0(Q_0) = & i(S - u_d(x, y)Q_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \right) + v_d(x, y) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - Q_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) + \\ & + iQ_0 \Omega_{dy}(x, y) + \Omega_{dx}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2Q_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + Q_0^4 \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} L_1(Q_0) = & u_d(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 3Q_0^2 \right) + 2SQ_0 - 2iQ_0v_d(x, y) \frac{\partial}{\partial y} - \\ & - \Omega_{dy}(x, y) + \frac{8iQ_0}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \right), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} L_2(Q_0) = & S \left(2Q_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \right) + u_d(x, y) \left[\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - 3Q_0 \left(Q_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \right) \right] - \\ & - iv_d(x, y) \left(2Q_0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) - \Omega_{dy}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \\ & + \frac{4i}{\text{Re}} \left[2Q_0 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \left(2Q_0 \frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial Q_0}{\partial x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Уравнение (35) с указанными выше граничными условиями описывает несамосопряженную краевую задачу, где Q_0 играет роль собственного значения. Подобные краевые задачи, но на конечном интервале, решались М.В. Келдышем [21]. Согласно теореме Фредгольма для линейных краевых задач, описываемых неоднородными уравнениями, уравнение (36) имеет нетривиальное решение только при условии

$$iQ_1 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(S, x, y) L_1(Q_0) f_0(S, x, y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(S, x, y) L_2(Q_0) f_0(S, x, y) dy = 0, \quad (40)$$

где $\bar{\chi}(S, x, y)$ — комплексно-сопряженная собственная функция сопряженной краевой задачи, описываемой уравнением:

$$i \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - Q_0^2 \right) \left[(S - u_d(x, y) Q_0) \bar{\chi} \right] - \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} - Q_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) (v_d(x, y) \bar{\chi}) + \\ + i Q_0 \Omega_{dy}(x, y) \bar{\chi} - \frac{\partial (\Omega_{dx}(x, y) \bar{\chi})}{\partial y} - \frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^4 \bar{\chi}}{\partial y^4} - 2Q_0^2 \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial y^2} + Q_0^4 \bar{\chi} \right) = 0. \quad (41)$$

Условие (40) позволяет найти поправку $Q_1(S, x)$ к собственному значению $Q_0(S, x)$.

Действительная часть собственного значения $Q(S, x)$ равна реальному волновому числу $K(S, x)$, которое позволяет найти фазовую скорость волны, а мнимая часть $Q(S, x)$ определяет коэффициент усиления волны $\Gamma(S, x)$. Найденные таким образом зависимости Γ от S для ряда значений x показаны на рис. 2. Мы видим, что диапазон частот (в числах Струхала), в котором происходит усиление гидродинамических волн, во-первых, существенно сужается при удалении от сопла, а во-вторых, значительно сдвигается в низкочастотную область.

Полученные нами результаты дают хорошее качественное согласие с известными экспериментальными данными и позволяют объяснить многие наблюдаемые явления. При этом оказывается, что часто в объяснениях, даваемых экспериментаторами, причина принимается за следствие и наоборот. Характер зависимостей коэффициента усиления гидродинамических волн от частоты и расстояния от сопла позволяет сделать заключение о возможности моделирования процессов в струе цепочкой нелинейных осцилляторов и выбрать параметры этой модели.

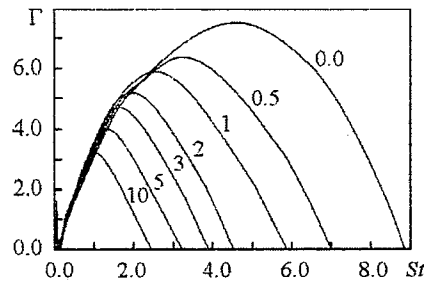


Рис. 2. Зависимости коэффициента усиления Γ гидродинамических волн от числа Струхала для разных расстояний от сопла. Значение безразмерного расстояния x указано возле соответствующей кривой

Библиографический список

1. *Бовшверов В.М., Красильников В.Н.* Предварительные результаты акустического зондирования атмосферы монохроматическим лучом // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 44–46.
2. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299–303.
3. *Колмогоров А.Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 19–21.
4. *Обухов А.М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // ДАН СССР. 1941. Т. 32. С. 22–24.
5. *Segel D., L'vov V.S., Procaccia I.* Extended self-similarity in turbulent systems: an analytically solvable example // Phys. Rev. Letters. 1996. Vol. 76. P. 1828.
6. *L'vov V.S., Procaccia I.* Towards a nonperturbative theory of hydrodynamic turbulence: fusion rules, exact bridge relations and anomalous scaling functions // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54. P. 6268.
7. *Hagen G.* Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren // Pogg. Ann. 1839. Vol. 46. P. 423.
8. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1883. Vol. 174. P. 935.
9. *Heisenberg W.* Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // Ann. Phys. 1924. Vol. 74. P. 577.
10. *Ландау Л.Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339–342.
11. *Ланда П.С.* Возникновение турбулентности в незамкнутых течениях жидкости как неравновесный шумоиндуцированный фазовый переход второго рода // ЖТФ. 1998. Т. 68. С. 31.
12. *Ланда П.С., Заикин А.А.* Неравновесные индуцированные шумом фазовые переходы в простых системах // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 358.
13. *Chih-Ming Ho, Nosseir N.S.* Dynamics of an impinging jet 1. The feedback phenomenon // J. Fluid Mech. 1981. Vol. 105. P. 1192.
14. *Landa P.S., McClintock P.V.E.* Development of turbulence in subsonic submerged jets // Phys. Rep. 2004. Vol. 397. P. 1.
15. *Crighton D.G., Gaster M.* Stability of slowly diverging jet flow. // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 77. P. 397.
16. *Plaschko P.* Helical instabilities of slowly diverging jets // J. Fluid Mech. 1979. Vol. 92. P. 209.
17. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // Progr. Aerosp. Sci. 1984. Vol. 21. P. 159.
18. *Гиневский А.С.* Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиноведение, 1969.
19. *Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Моделирование турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей. М.: Наука, 1995.

20. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.
21. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77. С. 11–14.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.12.2004

TURBULENCE IN JET FLOWS: WHAT IS IT?

P.S. Landa

Brief description of the properties of turbulent flows in submerged subsonic jets is given. Within the jet's initial part, where turbulent pulsations are sufficiently small, the asymptotic Krylov–Bogolyubov method is used for calculating of the jet processes. It is shown that the results of the calculations are in good coincidence with experimental data.



Ланда Полина Соломоновна – родилась в 1931 году в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 году. С 1956 года работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Профессор, ведущий сотрудник МГУ. Область научных интересов - теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор пяти монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания», переведенной на английский язык, а также монографии «Нелинейные колебания и волны в динамических системах», выпущенной в издательстве «Kluwer» (Голландия). Член Национального комитета по механике (Россия). Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика».
E-mail:landa@phys.msu.su