

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ТРЕХМЕРНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ГРУППОЙ СИММЕТРИИ D_2 *

А.И. Никифоров, Д.С. Рябов, Г.М. Чечин

Ранее нами были найдены все возможные трехмерные диссипативные системы с квадратичными нелинейностями, которые являются инвариантными относительно одной из 32 точечных групп кристаллографической симметрии и могут при этом демонстрировать хаотическое поведение при определенных значениях входящих в них параметров. Среди них была обнаружена система с симметрией D_2 , которая является более простой и более элегантной по сравнению с известными системами Лоренца и Ресслера, принадлежащими к тому же классу диссипативных систем. В настоящей работе исследуется регулярная и хаотическая динамика этой системы с акцентом на применимость общих положений теории нелинейных физических систем с дискретной симметрией.

Введение

В работе [1] Спротт поставил задачу нахождения трехмерных диссипативных систем с квадратичными нелинейностями, которые обладают хаотическими аттракторами и являются более простыми в смысле своей аналитической структуры по сравнению со ставшими уже классическими системами Лоренца [2] и Ресслера [3]. Найденные им 19 типов систем получены с помощью непосредственного машинного перебора возможных значений коэффициентов соответствующих уравнений.

В работе [4] мы поставили перед собой иную цель, а именно, нахождение диссипативных систем с квадратичными нелинейностями (или нелинейностями других типов), которые обладали бы некоторыми группами дискретной симметрии и демонстрировали бы при этом хаотическое поведение. Наряду с развитием общего метода поиска таких систем, основанного на теории представлений групп симметрии, в [4] полностью решена поставленная задача для случая трехмерных диссипативных систем с квадратичными нелинейностями, которые обладают кристаллографической

* Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия

точечной симметрией. Оказалось, что хаотические аттракторы могут наблюдаться только в системах со следующими семью группами симметрии (в обозначениях Шенфлиса):

$$C_1, C_s, C_2, C_3, S_4, D_2, C_{3v}. \quad (1)$$

В работе [4] также продемонстрировано, что разработанные ранее (см., например, работы [5, 6]) теоретико-групповые методы исследования нелинейной динамики для консервативных систем с дискретной симметрией, основанные на идее *бушевой мод*, могут оказаться плодотворными и при изучении диссипативных систем с хаотическим поведением.

Среди обнаруженных в [4] систем, демонстрирующих наличие детерминированного хаоса, особый интерес представляет система с симметрией D_2 , которая, на наш взгляд, является более простой и более изящной по сравнению с системами Лоренца и Ресслера. Именно этой системе и посвящена настоящая работа.

1. Построение диссипативной системы с точечной группой симметрии D_2

Рассматриваемая диссипативная система, которую для краткости мы будем называть D_2 -системой, может быть найдена следующим простым образом. Точечная группа D_2 состоит из четырех элементов симметрии: тождественного элемента E и трех поворотов на 180° вокруг осей X , Y и Z , которые мы обозначаем символами C_2^x , C_2^y , C_2^z , соответственно. В качестве генераторов (образующих элементов) этой группы можно выбрать любые два из этих поворотов, например, C_2^x и C_2^y . В трехмерном пространстве им соответствуют следующие преобразования координат:

$$\begin{aligned} C_2^x &: (x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z); \\ C_2^y &: (x, y, z) \rightarrow (-x, y, -z). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим теперь трехмерную диссипативную систему с квадратичными нелинейностями общего вида и запишем ее в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= f_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= f_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции $f_i(x, y, z)$ являются полиномами второй степени по всем трем своим аргументам. Потребуем, чтобы под действием обоих преобразований (2) система (3) оставалась инвариантной. В результате получим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1yz, \\ \dot{y} &= By + D_2xz, \\ \dot{z} &= Cz + D_3xy. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта система содержит шесть произвольных параметров (A, B, C, D_1, D_2, D_3) . С помощью масштабных преобразований¹ $x = \alpha\tilde{x}$, $y = \beta\tilde{y}$, $z = \gamma\tilde{z}$, $t = \delta\tilde{t}$, перехода от старых переменных (x, y, z, t) к новым переменным $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$, можно четыре из шести произвольных параметров системы (4) обратить в ± 1 , приведя тем самым эту систему к некоторой «канонической» форме. В результате в D_2 -системе остаются лишь два произвольных параметра, которые мы будем обозначать буквами a и b .

Можно показать [4], что хаотическое поведение будет наблюдаться в D_2 -системе не при всех ее возможных канонических формах. Например, в системе вида²

$$\dot{x} = ax + yz,$$

$$\dot{y} = by + xz,$$

$$\dot{z} = z + xy$$

хаотическое поведение невозможно, поскольку она приводится к форме Онзагера

$$\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \dot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \dot{z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + z^2) + xyz.$$

С другой стороны, как показано в [4] с помощью непосредственного вычислительного эксперимента, D_2 -система с канонической формой вида

$$\dot{x} = -ax + yz,$$

$$\dot{y} = -by + xz, \tag{5}$$

$$\dot{z} = z - xy$$

при $a > 0$, $b > 0$ может обладать хаотическими аттракторами.

2. Аттракторы в D_2 -системе

Как известно, о хаотичности поведения динамической системы можно судить по знаку старшего показателя Ляпунова λ_{\max} (см., например, [7]). На рис. 1 черным цветом показаны области в плоскости параметров (a, b) , в которых $\lambda_{\max} > 0$ и где, следовательно, поведение нашей системы является хаотическим. Уже из этого рисунка видно, что области параметров системы (5), для которых имеет место хаотическое поведение и которые изображены черным цветом, перемежаются областями белого цвета, соответствующими регулярному движению (для них $\lambda_{\max} \leq 0$).

Более подробная картина чередования хаотического и регулярного движений рассматриваемой динамической системы проявляется на рис. 2. При его построении мы использовали симметричность изображения на рис. 1 относительно диагонали $a = b$ и проследили характер поведения системы при изменении параметров a и b вдоль прямой $a + b = 4$, перпендикулярной вышеуказанной диагонали. Рис. 2, a

¹Заметим, что эти масштабные преобразования не изменяют группу симметрии D_2 рассматриваемой системы.

²Для удобства здесь и далее новые переменные, полученные в результате масштабных преобразований, мы по-прежнему будем обозначать буквами x, y, z .

получен в результате прохождения этой прямой с некоторым малым шагом изменения параметра a , который отложен по горизонтальной оси. В силу конечности ЭТОГО шага и узости некоторых областей регулярного движения, точки, для которых вычислялись значения $\lambda_{\max}(a)$, не всегда точно попадают в такие области, в силу чего резкие скачки показателя Ляпунова вниз иногда не достигают нулевого уровня. На рис. 2, б для более узкого интервала изменения параметра a приведен график $\lambda_{\max}(a)$ с большей степенью разрешения.

Особенно наглядно чередование областей регулярного и хаотического движений видно на бифуркационной диаграмме, изображенной на рис. 3. Построена она следующим образом. По горизонтальной оси по-прежнему отложены значения параметра a вдоль выделенной нами прямой $a + b = 4$, перпендикулярной диагонали $a = b$ (см. рис. 1). По вертикальной оси отложены значения переменной $x(t)$, которые она принимает при пересечении фазовой траектории с плоскостью $y = 0$ независимо от направления этого пересечения. Как и на диаграмме логистического отображения, здесь хорошо просматривается появление в области хаоса окон регулярного движения различной ширины.

Обратим внимание на то, что на рис. 3, а при увеличении параметра a от значения 2.45 до 2.70 видны каскады бифуркаций регулярного движения, которые «постепенно» приводят к хаосу. При проходе окон регулярного движения слева направо хаотическое движение «скачком»

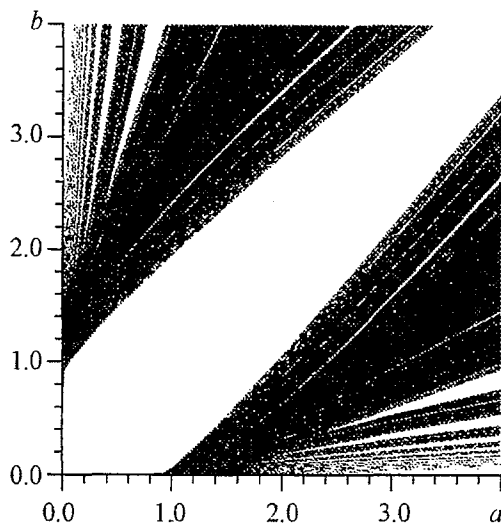


Рис. 1. Области параметров (a, b) , в которых может наблюдаться хаотическое поведение D_2 -системы (черный цвет соответствует значениям параметров, при которых $\lambda_{\max} > 0$)

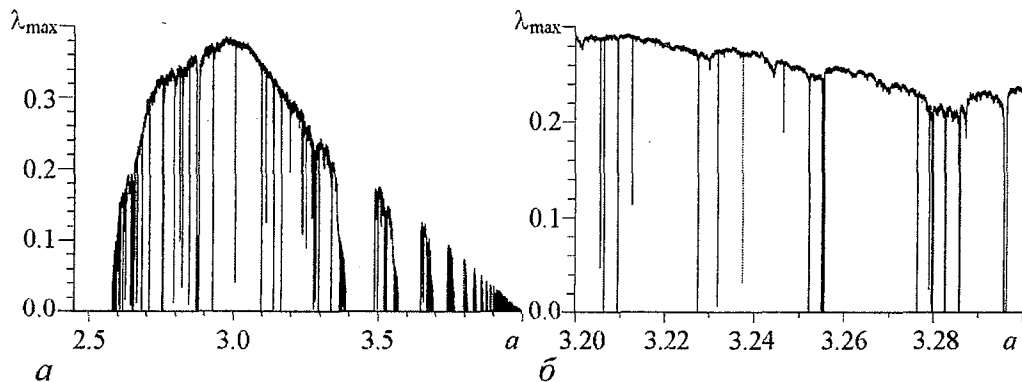


Рис. 2. Зависимость старшего показателя Ляпунова λ_{\max} от параметра a при изменении последнего вдоль прямой $a + b = 4$: $a \in [2.45, 4.0]$ (а); $a \in [3.2, 3.3]$ (б)

переходит в регулярное движение (далее наблюдается новый каскад бифуркаций и переход к новому участку хаотического движения). На рис. 3, *в* ($a \in [3.3, 4.0]$) наблюдается, в известном смысле, противоположная картина: в результате обратных

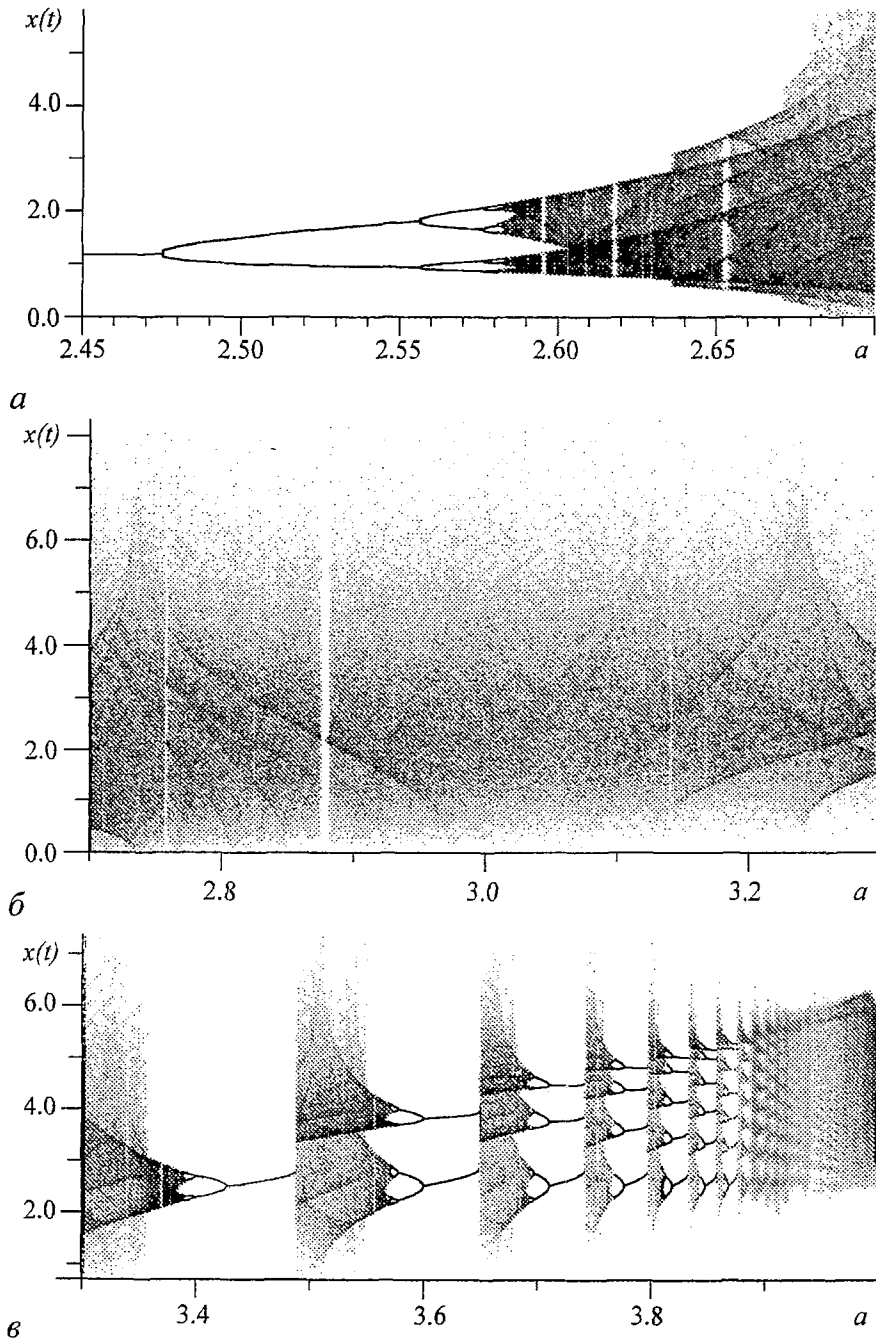


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма D_2 -системы при изменении параметров a и b вдоль прямой $a+b=4$ для $a \in [2.45, 2.70]$ (а); $a \in [2.7, 3.3]$ (б); $a \in [3.3, 4.0]$ (в)

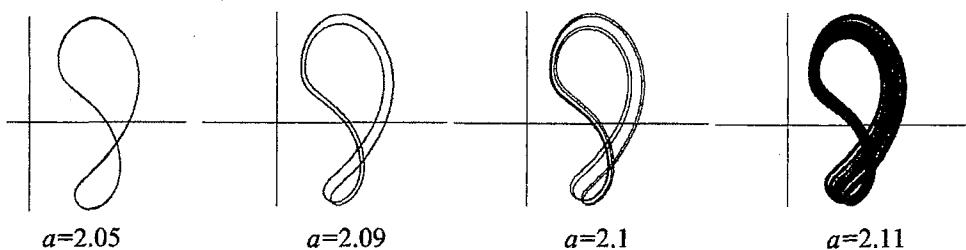


Рис. 4. Каскад бифуркаций аттракторов в проекции на плоскость YZ при увеличении параметра a от значения 2.05 до значения 2.11 при $a + b = 3$

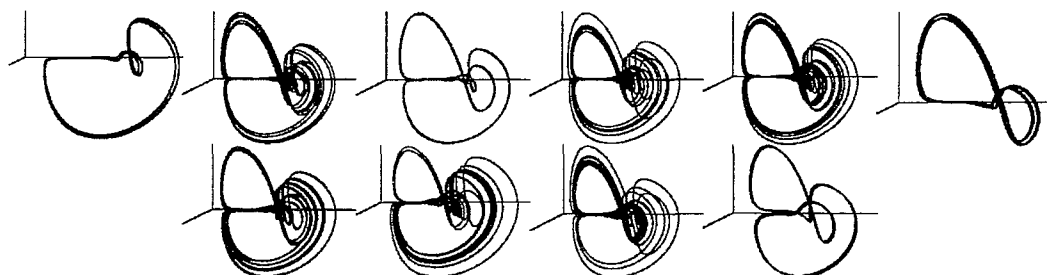


Рис. 5. Эволюция аттракторов при уменьшении параметра a от значения 2.89 до значения $a = 2.80$ с шагом 0.01 (трехмерное изображение)

бифуркаций кратность аттрактора³ понижается до некоторых минимальных величин (которые, кстати, последовательно принимают значения 1, 2, 3, 4, ...), после чего хаос возникает «скачком». На рис. 3, в также хорошо видно «сгущение» (уменьшение ширины) окон регулярного движения по мере приближения параметра a к значению 4.0.

На рис. 4 представлен каскад бифуркаций удвоения периода (в проекции на плоскость YZ) для аттракторов, возникающих при движении вдоль диагонали $a + b = 3$ для $a \in [2.05, 2.11]$, а на рис. 5 приведены трехмерные изображения аттракторов D_2 -системы при движении с шагом 0.01 вдоль той же диагонали $a + b = 3$ для значений a из интервала $[2.80, 2.89]$. С другой стороны, из рис. 1 видно, что на рассматриваемом в последнем случае интервале изменения параметра a существуют достаточно узкие, чередующиеся области хаотического и регулярного движения, что и демонстрируется на обсуждаемом сейчас рис. 5.

3. Некоторые симметричные аспекты динамики D_2 -системы

3.1. Одномерные инвариантные многообразия. При исследовании динамики систем с дискретной симметрией важную роль играют инвариантные многообразия, выделяемые подгруппами группы симметрии исходной системы [5, 6]. В рассматриваемом нами случае их нахождение тривиально – таковыми многообразиями являются координатные оси X , Y и Z , все точки которых стационарны (неподвижны) по

³Имеются в виду аттракторы для значений переменной $x(t)$, полученных описанным выше способом.

отношению к группам преобразований C_2^x , C_2^y и C_2^z , соответственно. Эти группы являются подгруппами группы D_2 (каждая из них содержит лишь один нетривиальный элемент – поворот на 180° вокруг соответствующей координатной оси⁴).

Тот факт, что вышеуказанные множества, которые мы будем обозначать символами M_X , M_Y и M_Z , являются инвариантными многообразиями в динамическом смысле, можно увидеть непосредственно из системы уравнений (5). Действительно, полагая, например, $x(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$, мы получим из (5) непротиворечивое уравнение движения для переменной $y(t)$: $\dot{y} = -by$. Таким образом, система (5) допускает решение вида $(0, y(t), 0)$, которое и определяет ось Y как инвариантное многообразие M_Y . Иными словами, решая систему (5) с начальными условиями $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = 0$ и считая процедуру такого решения идеальной (абсолютно точной), мы находим, что фазовая точка в любой момент времени остается на оси Y и при этом ее динамика описывается тривиальной формулой

$$y(t) = y_0 e^{-bt}. \quad (6)$$

Однако при решении системы (5) с помощью любого численного метода судьба фазовой точки определяется не только вышеуказанными соображениями, но и *устойчивостью* инвариантного многообразия $M_Y \equiv (0, y(t), 0)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Для того чтобы исследовать устойчивость движения на оси Y , линеаризуем систему уравнений (5) вблизи решения $[0, y(t), 0]$, то есть будем искать ее решение в форме $[\delta_1(t), y(t), \delta_2(t)]$, предполагая, что $\|\delta_i(t)\|$ ($i = 1, 2$) являются бесконечно малыми величинами. Подставляя такую форму решения в уравнения (5) и отбрасывая член второго порядка малости во втором уравнении, приходим к системе двух уравнений относительно $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= -a\delta_1 + \gamma(t)\delta_2, \\ \dot{\delta}_2 &= \delta_2 - \gamma(t)\delta_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\gamma(t) = y_0 e^{-bt}$.

Общее решение полученной системы линейных дифференциальных уравнений с *переменными* коэффициентами выражается через функции Бесселя и имеет достаточно громоздкий вид. В связи с этим воспользуемся для анализа системы (7) следующим приближенным приемом. Будем считать γ не зависящей от времени функцией, каковой она на самом деле является ($\gamma(t) = y_0 e^{-bt}$), а *постоянным* параметром ($\gamma = const$), который при движении фазовой точки вдоль оси Y принимает все возможные значения на отрезке $[0, y_0]$. Тогда для каждого фиксированного значения $\gamma \in [0, y_0]$ можно провести анализ устойчивости системы (7) (которая становится системой линейных дифференциальных уравнений с *постоянными* коэффициентами) стандартным методом. Таким образом, мы представляем себе, что при своем движении фазовая точка последовательно проходит все участки оси Y , на которых характер устойчивости будет различным. Результаты такого приближенного анализа далее будут сравнены с результатами прямого численного решения «правильной» системы (7).

⁴Именно поэтому мы используем одинаковые обозначения для этого элемента и для порождаемой им группы.

Введем вектор $\vec{\delta} = [\delta_1(t), \delta_2(t)]$ и перепишем систему (7) в матричной форме

$$\dot{\vec{\delta}} = A\vec{\delta}, \quad (8)$$

где $A = \begin{pmatrix} -a & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$, а $\gamma = \text{const}$.

Дальнейший анализ устойчивости сводится к исследованию собственных значений матрицы A , которые следующим образом выражаются через ее след $\text{Sp } A$ и определитель $\text{Det } A$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{Sp } A \pm \sqrt{D}), \quad \text{где}$$

$$D = (\text{Sp } A)^2 - 4\text{Det } A.$$

В терминах $\text{Sp } A$, $\text{Det } A$ мы приходим к хорошо известной диаграмме устойчивости, изображенной на рис. 6, *a* (см., например, [8]). При этом для определенной уравнением (8) матрицы A имеем

$$\text{Sp } A = 1 - a, \quad \text{Det } A = -a + \gamma^2, \quad (9)$$

$$D = (1 + a)^2 - 4\gamma^2.$$

Воспользуемся теперь обсуждаемой диаграммой для анализа устойчивости инвариантного многообразия M_γ для тех значений параметров системы (5), для которых получается изображенная на рис. 7, *a* гомоклиническая траектория: $a = 2.893$, $b = 0.107$. В этом случае из формул (9) мы имеем

$$\text{Sp } A = -1.893, \quad \text{Det } A = -2.893 + \gamma^2,$$

$$D = (3.893)^2 - 4\gamma^2.$$

Проведя горизонтальную линию на общей диаграмме, изображенной на рис. 6, *a*, при значении $\text{Sp } A = -1.893$, видим, что она пересекает три различные по своим свойствам устойчивости области – области седла, устойчивого узла и устойчивого фокуса, границы между которыми определяются условиями $\text{Det } A = 0$ и $D = 0$. В результате приходим к диаграмме устойчивости при изменении параметра γ , приведенной на рис. 6, *b*.

Рассмотрим теперь достаточно большое значение y_0 (например, $y \sim 10$ или $y \sim 100$) и учтем, что $\gamma = y_0 e^{-bt}$. Тогда из рис. 6, *b* ясно, что фазовая точка начинает свое движение от y_0 в сторону нуля, а фазовая траектория бесконечно приближается

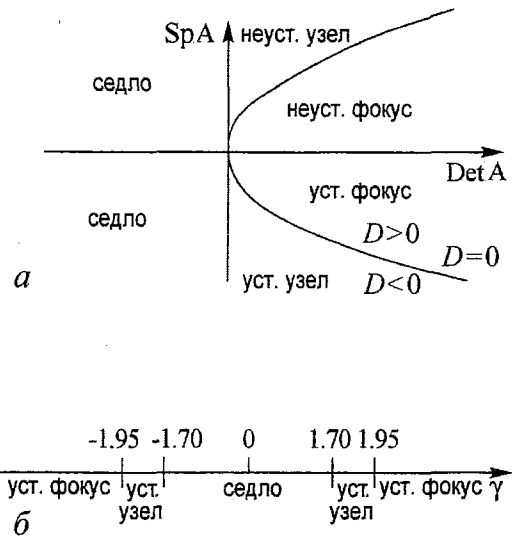


Рис. 6. *a* – общая диаграмма устойчивости двумерной системы (8) и *b* – диаграмма устойчивости по параметру γ при $a = 2.893$, $b = 0.107$

(экспоненциально, поскольку $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$) к оси Y – сначала с *накручиванием* на нее (вплоть до значения t , при котором $\gamma = 1.9465$), а потом без накручивания (до значения t , при котором $\gamma = 1.7009$). После прохождения значения $\gamma = 1.7009$ фазовая траектория попадает в область неустойчивости и удаляется от оси Y . Схематически поведение фазовой траектории вблизи инвариантного многообразия M_Y показано на рис. 7, б.

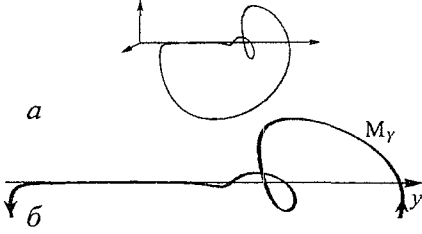


Рис. 7. «Гомоклиническая» траектория ($a = 2.893$, $b = 0.107$) и поведение фазовой траектории вблизи инвариантного многообразия M_Y .

После удаления от M_Y на значительное расстояние фазовая траектория вновь возвращается на это инвариантное многообразие, образуя некоторую петлю. В результате получается «гомоклиническая траектория»⁵, изображенная на рис. 7, а. Заметим, что в нашем случае это название не является полностью традиционным, поскольку под термином гомоклиническая траектория обычно понимается траектория, которая выходит из *особой точки* по неустойчи-

вому направлению и входит в нее же по устойчивому направлению. Рассмотренная же выше «гомоклиническая траектория» связана не с особой точкой, а с некоторым инвариантным многообразием M_Y .

Отметим также, что границы областей существования устойчивого фокуса, устойчивого узла и седла, которые были найдены нами с помощью приближенного метода, с хорошей степенью точности совпадают с результатами, полученными при непосредственном численном решении системы дифференциальных уравнений (7).

Рассмотрим теперь устойчивость инвариантных многообразий M_X и M_Z . В первом случае анализ устойчивости сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений $\dot{\delta} = A\delta$, где $A = \begin{pmatrix} -b & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}$ и $\gamma = x_0 e^{-at}$. Из этого следует, что можно воспользоваться полученными ранее результатами для случая M_Y , просто делая замену $a \leftrightarrow b$. В частности, для уже рассмотренного нами случая $a = 2.893$, $b = 0.107$ находим, что $\text{Sp } A = 0.893 > 0$. Тогда из рис. 6, а очевидно, что *все* точки множества M_X будут неустойчивыми (седло, неустойчивый узел или неустойчивый фокус).

Совершенно аналогично, анализ устойчивости многообразия M_Z сводится к исследованию системы $\dot{\delta} = A\delta$, где $A = \begin{pmatrix} -a & \gamma \\ \gamma & -b \end{pmatrix}$ и $\gamma = z_0 e^t$. Таким образом, $\text{Sp } A = -(a + b)$, $\text{Det } A = ab - \gamma^2$, $D = (a - b)^2 + 4\gamma^2$ и при $a = 2.893$, $b = 0.107$ мы имеем: $\text{Sp } A = -3$, $\text{Det } A = 0.30955 - \gamma^2$, $D = 7.7618 + 4\gamma^2$. С ростом t движение фазовой точки будет происходить вдоль оси Z в сторону $+\infty$ или $-\infty$ (в зависимости от знака z_0) и при этом траектория будет *прижиматься* к оси Z только для значений $\gamma \in [-0.55637, +0.55637]$, которые соответствуют устойчивому узлу (все точки оси Z , соответствующие значениям γ вне этого интервала, являются седловыми).

⁵В связи с обсуждаемыми гомоклиническими контурами заметим, что их форма от начальных условий не зависит.

3.2. Особые точки. Из условия $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$ находим следующие пять особых точек для рассматриваемой D_2 -системы (5):

$$1 - (0, 0, 0); \quad 2 - (\mu, \nu, \mu\nu); \quad 3 - (\mu, -\nu, -\mu\nu); \\ 4 - (-\mu, \nu, -\mu\nu); \quad 5 - (-\mu, -\nu, \mu\nu),$$

где $\mu = \sqrt{b}, \nu = \sqrt{a}$.

Первая точка является началом координат. Точки 2, 4 расположены в плоскости $y = \sqrt{a}$, а точки 3, 5 – в плоскости $y = -\sqrt{a}$, причем симметрично относительно начала координат. Первая особая точка является седло-узлом, что видно непосредственно из системы (5), поскольку ее линеаризация в окрестности начала координат означает просто отброс нелинейных членов во всех уравнениях. В общем же случае, линеаризуя систему (5) в окрестности особой точки (x_0, y_0, z_0) , приходим к выводу, что для анализа характера устойчивости этой точки необходимо найти знаки вещественных частей собственных значений матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -a & z_0 & y_0 \\ z_0 & -b & x_0 \\ -y_0 & -x_0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В нашем случае достаточно проанализировать устойчивость лишь одной из четырех особых точек 2, 3, 4, 5, поскольку все они получаются друг из друга действием элементов симметрии группы D_2 . Подставляя в уравнение (10) $x_0 = \sqrt{b}, y_0 = \sqrt{a}, z_0 = \sqrt{ab}$, то есть координаты особой точки 2, и вычисляя соответствующий характеристический полином, получим

$$\lambda^3 + \lambda^2(a + b - 1) + 4ab = 0. \quad (11)$$

Характер устойчивости рассматриваемой особой точки можно определить с помощью критерия Рауса – Гурвица. Вычисляя определители, входящие в этот критерий, находим, что второй из них, $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$ ⁶, оказывается отрицательным: $\Delta_2 = -4ab < 0$ в случае $a > 0, b > 0$ (напомним, что хаотическое поведение системы (5) возможно лишь при таких знаках параметров a и b). Таким образом, особая точка 2 – $(\sqrt{b}, \sqrt{a}, \sqrt{ab})$, а значит, и симметрично связанные с ней точки 3, 4, 5, являются *неустойчивыми* во всей области интересующих нас параметров a и b . С учетом того, что начало координат является седло-узлом, приходим к выводу, что устойчивых особых точек в D_2 -системе при $a > 0, b > 0$ нет.

3.3. Динамические домены. Согласно общей теории нелинейных систем с дискретной симметрией [5, 6], различные динамические режимы в данной системе классифицируются по подгруппам G_j ее группы симметрии G_0 . При этом, если рассматриваемый динамический режим инвариантен относительно подгруппы $G_j \subset G_0$, то можно утверждать, что в исходной системе должно существовать вполне определенное число n «близнецов» – динамических доменов⁷ этого режима, причем

⁶Здесь a_i ($i = 0, 1, 2, 3$) суть коэффициенты при последовательных степенях параметра λ в характеристическом уравнении (11).

⁷Этот термин заимствован из теории фазовых переходов в кристаллах.

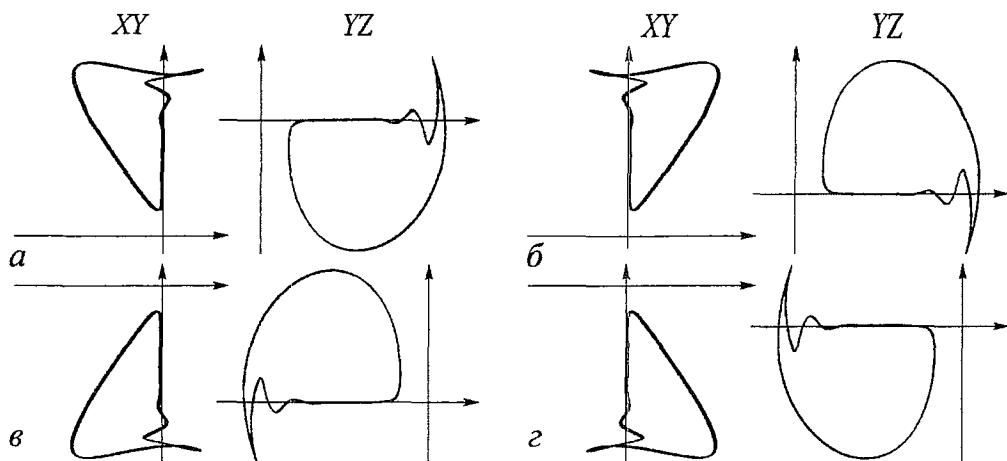


Рис. 8. Проекция «близнецов» гомоклинической траектории ($a = 2.893$, $b = 0.107$) на координатные плоскости XY (левый столбец) и YZ (правый столбец)

это число равно порядку подгруппы G_j в группе G_0 , то есть $n = \|G_0\|/\|G_j\|$ ⁸. Эти различные динамические домены получаются друг из друга за счет действия тех элементов симметрии группы G_0 , которые исчезают при понижении симметрии $G_0 \rightarrow G_j$.

В качестве группы G_0 в нашем случае выступает точечная группа D_2 , относительно которой инвариантны динамические уравнения (5). Подгруппами группы $G_0 = D_2$ являются: группа тривиальной симметрии C_1 (она состоит лишь из одного тождественного элемента), сама группа D_2 и три взаимно-сопряженные подгруппы второго порядка – C_2^x , C_2^y , C_2^z .

На рис. 7, *a* приведено трехмерное изображение гомоклинической траектории, которая некоторой своей частью «прижимается» к инвариантному многообразию M_U ($a = 2.893$, $b = 0.107$). Она была получена при различных начальных условиях, в частности, при $\{x(0) = 0.04, y(0) = 0.05, z(0) = 0.06\}$ ⁹. На рис. 8 изображены ее проекции на координатные плоскости XY и YZ .

Из рис. 8, *a* видно, что наша гомоклиническая траектория не обладает никакой нетривиальной симметрией и, следовательно, ее группа симметрии $G_j = C_1$. Порядок этой подгруппы в группе D_2 равен 4, в силу чего в фазовом пространстве D_2 -системы заведомо существуют области, в которых располагаются еще три «близнеца» рассматриваемой нами сейчас гомоклинической траектории. Проекция этих близнецов (динамических доменов) гомоклинической траектории ($a = 2.893$, $b = 0.107$) на координатные плоскости XY и YZ приведены на рис. 8, *б*, *в* и *г*, соответственно. При выборе начальных условий для их построения удобно учесть, что бассейны притяжения динамических доменов, как и сами они, переходят друг в друга под действием элементов симметрии группы D_2 , исчезнувших при понижении симметрии $G_0 \rightarrow G_j$. Например, если для построения рис. 8, *a* начальные условия имели вид $\{x(0) = 0.04, y(0) = 0.05, z(0) = 0.06\}$, то для постро-

⁸Здесь символом $\|G\|$ обозначен порядок группы G , то есть число ее элементов.

⁹Здесь и далее начальная часть траектории, описывающая «историю выхода» на данный аттрактор, то есть соответствующая переходному процессу, отброшена.

ения рис. 8, b их можно выбрать следующим образом: $\{x(0) = -0.04, y(0) = 0.05, z(0) = -0.06\}$.

При изменении параметров (a, b) в окрестности тех значений, при которых получается рассмотренная выше гомоклиническая траектория, происходят бифуркации этой траектории, приводящие, в конце концов, к возникновению хаотического аттрактора. Этот процесс иллюстрируется рис. 9, где показан такой аттрактор при $(a = 2.9, b = 0.1)$. Здесь изображен аттрактор, который порожден бифуркациями двух смежных близнецов гомоклинической траектории, соприкасающихся вдоль оси Y . Такое объединение связано с тем, что при выходе из устойчивой части инвариантного многообразия M_Y в область неустойчивости, фазовая траектория с равной вероятностью может отклониться от оси Y в *любую* сторону по отношению к оси Z . Эти отклонения при многократных обходах по кривым, близким к исследуемой нами гомоклинической траектории, действительно происходят в разные стороны, причем, последовательность оборотов (в положительном или отрицательном направлениях по отношению к оси Z) является *случайной*.

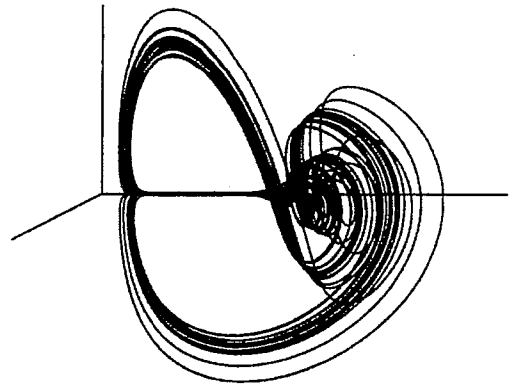


Рис. 9. Хаотический аттрактор, развивающийся из гомоклинической траектории, изображенной на рис. 7 ($a = 2.9, b = 0.1$)

Заметим, что, если рассмотреть совокупность всех доменов, каждый из которых обладает симметрией $G_j \subset G_0$, то полученное в результате множество всех аттракторов-близнецов снова имеет исходную симметрию G_0 . Это общее положение теории хорошо иллюстрируется рис. 10. Здесь показаны проекции на плоскость YZ четырех *разных* аттракторов ($a = 0.883, b = 2.117$), каждый из которых обладает лишь тривиальной симметрией C_1 (левая часть рисунка). В результате же их *наложения* получается фигура с симметрией D_2 (правая часть рисунка).

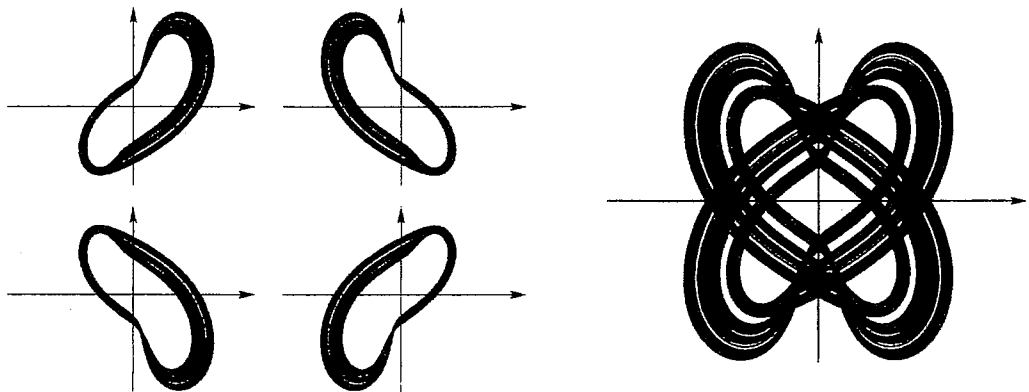


Рис. 10. Проекция на плоскость YZ «близнецов» хаотического аттрактора с симметрией C_1 ($a = 0.883, b = 2.117$) и результат их наложения друг на друга (справа)

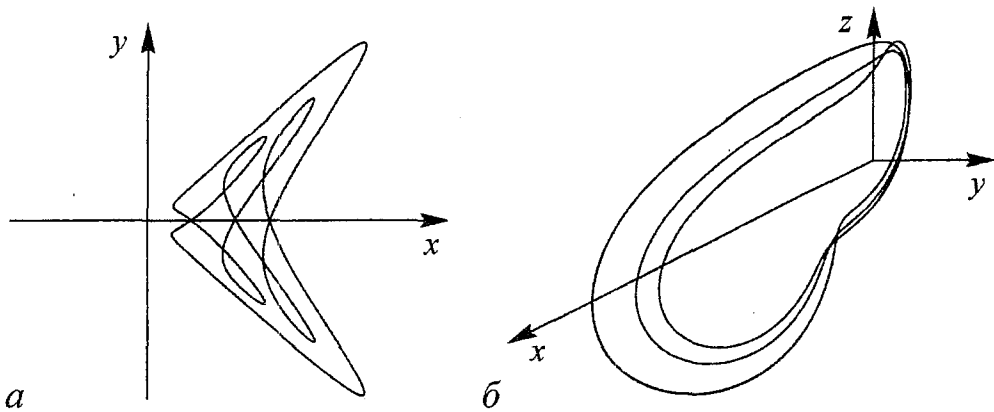


Рис. 11. Регулярный аттрактор с симметрией C_2 , соответствующий циклу 3 при $a = 0.878$, $b = 2.122$ (а) и регулярный аттрактор с симметрией C_1 , соответствующий циклу 3 при $a = 0.889$, $b = 2.111$ (б)

3.4. Симметрия аттракторов. Рассмотренный в предыдущем разделе аттрактор представлял собой гомоклиническую траекторию ($a = 2.893$, $b = 0.107$), симметрия которой характеризуется тривиальной подгруппой $C_1 \subset D_2$. Однако, как уже отмечалось, группа симметрии системы D_2 имеет в качестве подгрупп три взаимно сопряженные группы второго порядка: C_2^x , C_2^y , C_2^z . В силу этого следует ожидать,

что в рассматриваемой системе могут существовать аттракторы (регулярные и хаотические) и с такими группами симметрии. Один из регулярных аттракторов с группой симметрии C_2^x , соответствующий циклу 3, был обнаружен в одном из окон регулярного движения ($a = 0.878$, $b = 2.122$)¹⁰. Проекция этого аттрактора на плоскость XU приведена на рис. 11, а, где хорошо видна его симметрия относительно оси X .

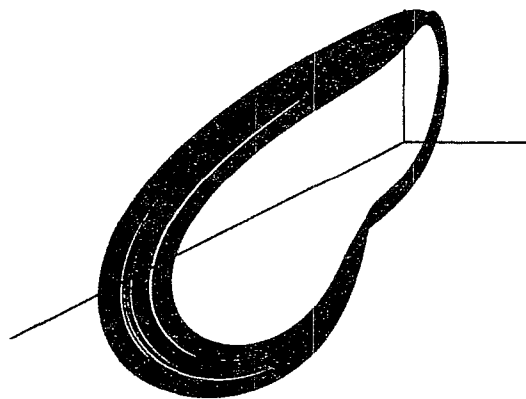


Рис. 12. Хаотический аттрактор с симметрией C_1 , развивающийся из регулярного аттрактора, приведенного на рис. 11, б, в результате каскада бифуркаций ($a = 0.89$, $b = 2.11$)

Если в случае гомоклинической траектории ($a = 2.893$, $b = 0.107$) выделенной была ось Y , то для рассматриваемого сейчас аттрактора (рис. 11, а) выделенной является ось X . Объяснение этого факта можно получить с помощью исследования устойчивости ин-

вариантных многообразий M_X и M_Y . Анализ устойчивости многообразия M_Y показывает, что при $a = 0.878$, $b = 2.122$ оно будет *всюду неустойчивым*, в то время как многообразие M_X , наоборот, при $\gamma > 1.457$ ($\gamma = x_0 e^{-at}$) является устойчивым. Очевидно, именно таким характером устойчивости многообразий M_X и M_Y объясняется расположение аттрактора на рис. 11, а вблизи оси X , которая является при этом его осью симметрии.

¹⁰ Аттрактор, соответствующий циклу 3, но обладающий симметрией C_1 , изображен на рис. 11, б ($a = 0.889$, $b = 2.111$), а развивающийся из него хаотический аттрактор при $a = 0.890$, $b = 2.110$ представлен на рис. 12.

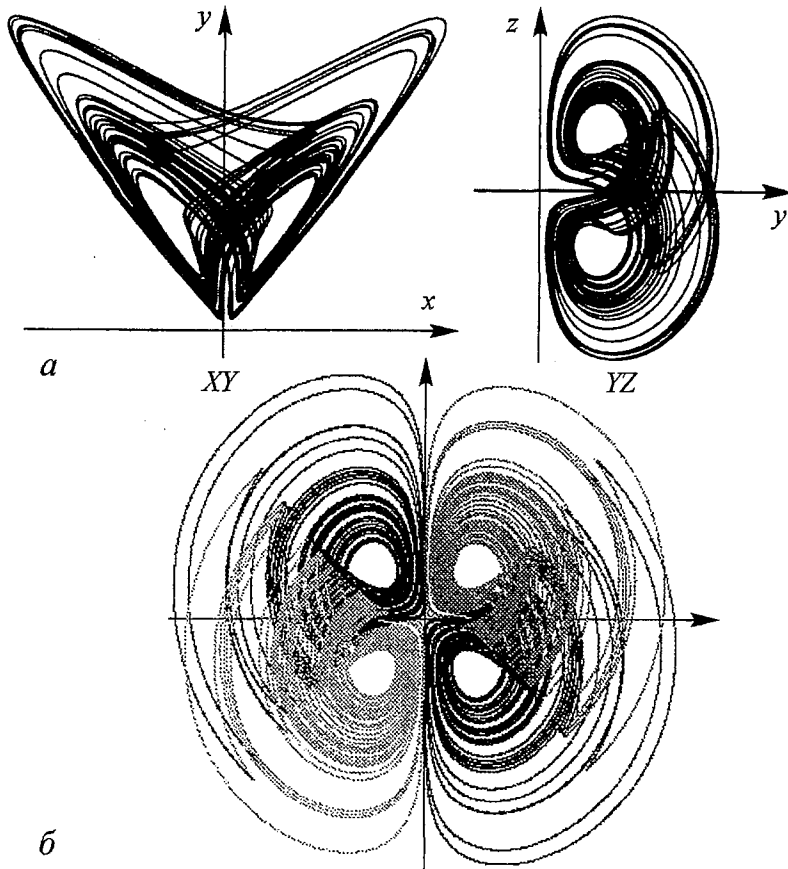


Рис. 13. Хаотический аттрактор D_2 -системы при $a = 4$, $b = 1$ (а) и оба его близнеца (б)

При $a = 4$, $b = 1$ в D_2 -системе существует хаотический аттрактор с симметрией C_2^y . Легко проверить, что в этом случае «привлекательной» вновь становится ось Y , поскольку инвариантное многообразие M_X оказывается неустойчивым, а вполне определенная часть ($\gamma > 2$) многообразия M_Y является устойчивой. Аттрактор расположен вблизи оси Y , которая является его осью симметрии, что хорошо видно из проекций этого аттрактора на плоскости XY и YZ , показанных на рис.13, а. В середине «глаз» рассматриваемого хаотического аттрактора располагаются особые точки 2 и 4, которые, как уже отмечалось, являются неустойчивыми и, следовательно, не могут принадлежать аттрактору.

Поскольку симметрия аттрактора ($a = 4$, $b = 1$) определяется точечной группой C_2^y , которая является подгруппой второго порядка группы симметрии D_2 -системы, то у этого хаотического аттрактора должен существовать один близнец, который получается действием на него элементов симметрии C_2^z (или C_2^x). Оба эти хаотические аттрактора-близнеца представлены на рис. 13, б (разумеется, каждому из них соответствует свой бассейн притяжения).

Подчеркнем, что, говоря о симметрии аттракторов, прежде всего хаотических, мы имеем в виду не только визуальную констатацию этого факта, но и проверку симметрии аттрактора с помощью соответствующей компьютерной программы, алгоритм которой описан в нашей работе [4].

Выше были приведены примеры регулярных и нерегулярных аттракторов с группами симметрии C_1 и C_2 . Исходя из общих теоретических соображений, можно ожидать, что при некоторых значениях параметров a, b может произойти бифуркация объединения (слияния) близнецов хаотических аттракторов с симметрией C_2^y в единый аттрактор с симметрией, определяемой полной группой рассматриваемой системы – $G_0 = D_2$. Тем не менее, такое объединение нам обнаружить пока что не удалось.

Разумеется, особый интерес представляют точки бифуркаций аттракторов, в которых скачком изменяется их симметрия (они являются аналогами точек фазовых переходов в кристаллах), однако исследование этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

Заключение

В данной работе исследованы вопросы регулярной и нерегулярной динамики трехмерной динамической системы с квадратичными нелинейностями, уравнения которой инвариантны относительно точечной группы симметрии D_2 . Более подробное исследование этой системы предполагается провести в рамках другой работы. При этом представляется весьма перспективным использование теории хаотических аттракторов, развитой в [8], а также использование топологических методов [9, 10].

Выражаем искреннюю благодарность В.П. Сахненко за поддержку развиваемого авторами направления исследований и Н.А. Колодину за проведение ряда вычислений на начальной стадии подготовки данной статьи.

Библиографический список

1. *Sprott J.C.* Some simple chaotic flows // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol.50. P.R647.
2. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol.20. P.130.
3. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett. A.* 1976. Vol.57. P.397.
4. *Chechin G.M., Ryabov D.S.* Three-dimensional chaotic flows with discrete symmetries // *Phys. Rev. E.* 2004. Vol.69. P.036202.
5. *Сахненко В.П., Чечин Г.М.* Симметричные правила отбора в нелинейной динамике атомных смещений // *Докл. Акад. Наук.* 1993. Т.330. С.308.
6. *Chechin G.M., Sakhnenko V.P.* Interaction between normal modes in nonlinear dynamical systems with discrete symmetry. Exact results // *Physica D.* 1998. Vol. 117. P. 43.
7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. (Серия «Современная теория колебаний и волн»). М.: Физматлит, 2001.
8. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 318 с.
9. *Gilmore R.* Topological analysis of chaotic dynamical systems // *Rev. Mod. Phys.* 1998. Vol.70. P.1455.
10. *Letellier C., Gilmore R.* Covering dynamical systems: twofold covers // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol.63. P.016206.

Ростовский государственный
университет

Поступила в редакцию

16.11.2004

DYNAMICAL CHAOS IN THREE-DIMENSIONAL DISSIPATIVE SYSTEM WITH D_2 -SYMMETRY GROUP

A.I. Nikiforov, D.S. Ryabov, G.M. Chechin

Earlier, we found all three-dimensional dissipative systems with quadratic nonlinearities which are invariant with respect to any of 32 point symmetry groups of crystallographic symmetry and which can demonstrate chaotic behavior for appropriate values of their pertinent parameters. Among these systems, there is one with the D_2 -symmetry group. This system seems to be more simple and more elegant than those by Lorenz and Rossler which also belong to the above mentioned class of dissipative systems. In the present paper, we investigate regular and chaotic dynamics of the D_2 -symmetry system emphasizing the usefulness of the general theory of the nonlinear dynamical systems with discrete symmetries.



Никифоров Антон Игоревич – родился в Ростове-на-Дону (1980), окончил физический факультет РГУ (2003). В настоящее время – ассистент преподавателя в университете Бригама Янга (г. Прово, шт. Юта, США). Область интересов – динамический хаос в системах с дискретной симметрией, структурные фазовые переходы, символьные вычисления.



Рябов Денис Сергеевич – родился в Москве (1982). В настоящее время является студентом 2-го года магистратуры РГУ. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, вычислительная физика.



Чечин Георгий Михайлович – родился в Новочеркасске (1937), окончил РГУ (1960), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и вычислительной физики Ростовского государственного университета. Научный руководитель студенческой лаборатории нелинейной кристаллофизики при НИИ физики РГУ. Соросовский доцент. Читает лекции по численным методам, вычислительной и нелинейной физике. Область научных интересов – теоретико-групповые методы в физике, теория фазовых переходов, нелинейная динамика и вычислительная физика. Автор около 100 научных публикаций.
E-mail: chechin@phys.rsu.ru