



Изв. вузов «ПНД», т. 12, № 6, 2004

УДК 534.05179

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БИРИТМИЧНОЙ ПАРЫ
РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВБЛИЗИ
БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА – ХОПФА***

Е.И. Волков

Рассмотрены динамические режимы, возникающие в системе из двух одинаковых релаксационных осцилляторов ФитцХью – Нагумо, параметры которых выбраны вблизи бифуркации рождения цикла, при действии слабого гармонического сигнала на оба элемента. Показано, что обмен медленной переменной, порождающий три устойчивых предельных цикла: синфазный, антифазный и предельно асимметричный (один осциллятор не генерирует всплеск), радикально меняет отклик системы на сигнал по сравнению с классической динамикой вынужденных колебаний. Помимо ожидаемых языков синхронизации, которые образуются при взаимодействии синфазного аттрактора с сигналом, присутствие сосуществующих решений приводит, по крайней мере, к трем эффектам: 1 – появление широких полос синхронизации сигнала и противофазного решения на высоких частотах, кратных частоте противофазных колебаний, и резкое сужение основной полосы синхронизации противофазного решения; 2 – появление интервалов периодов сигнала, в которых образуются предельные циклы с несколькими всплесками быстрой переменной в течение полного периода и с дискретным одинаковым набором межвсплесочных интервалов в каждом осцилляторе; 3 – образование узких интервалов периодов сигнала, приводящих к сложным предельным циклам с неодинаковым числом всплесков быстрой переменной у осцилляторов в одном периоде и резко различными длительностями межвсплесочных интервалов. Предложено качественное объяснение механизма образования сложных ритмов в рассмотренных областях параметров, задающих релаксационность осцилляторов и их близость к точке бифуркации.

Введение

Динамика вынужденных колебаний изолированной автоколебательной системы изучается начиная с работ Ван дер Поля [1] и имеет мощное математическое обоснование [2]. Основные явления, связанные с синхронизацией автоколебаний

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

и внешних сигналов, давно рассмотрены и вошли как в старые [3, 4], так и в новые [5] книги. В классической теории нелинейных колебаний рассмотрены, как правило, вынужденные режимы в сосредоточенных системах. Однако закономерности вынужденной синхронизации часто используются при интерпретации физиологических экспериментов, см. например [6], и при разработке медицинских воздействий [7]. Эти системы являются распределенными, например, многоклеточными. При этом неявно предполагается, что связи между элементами распределенной системы так устроены, что система реагирует на сигнал как единый автоколебательный элемент. Однако это не всегда так. Давно известно, что взаимодействие одинаковых автоколебательных систем может приводить к мультиритмичности, то есть к сосуществованию нескольких устойчивых предельных циклов с разными периодами и фазовыми соотношениями. Например, использование небольших ансамблей из четырех, шести и восьми клеток стало популярным для объяснения наборов ритмов походок разных живых существ [8–10]. Цепочки из 3, 4 и 5 одинаковых биологических осцилляторов демонстрируют разные колебательные режимы [11]. Динамика сцепленных модельных нейронов [12–17], решеток Тоды [18], электронных осцилляторов [19, 20], лазеров [21], химических реакторов и их моделей [22–24], трехмерных бэрстеров [25, 26] также активно изучается с целью выяснения многообразия возможных коллективных мод в системах, состоящих из одинаковых или почти одинаковых элементов. Ранее при изучении систем из двух и трех одинаковых осцилляторов было показано теоретически [4, 27–30] и экспериментально [19, 31, 32], что локальный диффузионный обмен может порождать несколько предельных циклов с разными периодами. Мультиритмичность довольно естественно получается, когда связь между предельными циклами содержит задержку [33, 34]. Детальное изучение динамики ансамблей **релаксационных** двумерных осцилляторов с N -образной изоклиной показало, что большая жесткость изолированного осциллятора и преобладание обмена медленной переменной обеспечивают устойчивость несинфазных режимов в широкой области параметров [35–38]. В этих исследованиях основными бифуркационными параметрами являлись: параметр (обозначим его A), определяющий близость системы к бифуркации Андронова – Хопфа (БАХ) рождения предельного цикла, и параметр C , задающий интенсивность обмена медленной переменной. Линейный обмен медленной переменной является одним из вариантов ингибиторной связи, так как он способен существенно замедлять движение изображающих точек на значительных промежутках предельного цикла, то есть увеличивать разность фаз между осцилляторами. Одновременно, такой обмен не разрушает устойчивость однородного состояния (синфазные колебания) в ансамблях локально связанных двумерных осцилляторов с N -образной изоклиной для быстрой переменной.

Взаимодействие периодического сигнала с *мультиаттракторной* системой может приводить к образованию неожиданных режимов или способов захвата частоты, так как механизм «расталкивания» фаз за счет взаимодействия осцилляторов не всегда может быть согласован с сигналом в рамках простого аттрактора. Например, если сигнал одинаково и когерентно модулирует параметры связанных автоколебательных систем и имеет период близкий к периоду антифазного решения, то рассогласование фаз сигнала и разности фаз элементов в антифазном решении, может привести к потере его устойчивости. Настоящая работа посвящена исследованию коллективных режимов в системе из двух одинаковых ин-

гибиторно связанных релаксационных осцилляторов ФитцХью - Нагумо (ФХН) в присутствии слабого гармонического сигнала, но вблизи порога генерации автоколебаний изолированного элемента.

Интерес к динамике автоколебательных и возбудимых систем вблизи порога генерации всегда был большим, так как именно в этой области наблюдается максимальная регулируемость систем. В последнее время внимание к этой области обусловлено, в частности, большим количеством исследований «стохастического резонанса» в массивах нелинейных возбудимых элементов (см., например, обзор [39]), изучением динамики нейронов [40] и их ансамблей [41]. В отличие от исследований по стохастическому резонансу, где параметры осцилляторов выбираются близко к БАХ, но элементы являются возбудимыми, в настоящей работе будет исследована роль сигнала в системе с двумя осцилляторами, параметры которых выбраны недалеко от точки бифуркации их рождения, но с «автоколебательной» стороны, а биритмичность обусловлена типом связи.

Будет проведено систематическое численное исследование решений для двух областей значений параметров: область сосуществования синфазного и противофазного режимов и область сосуществования синфазного и несимметричного режима, в котором только один осциллятор совершает полноамплитудные колебания. Механизм образования сложных аттракторов связан с наличием так называемой бифуркации «утки», которая проявляется при бифуркации Андронова – Хопфа при правильном выборе степени нелинейности осцилляторов.

1. Модель и выбор областей параметров

Система из двух осцилляторов ФХН, обменивающихся медленной переменной, находящаяся под действием гармонического сигнала, описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = A - y_1 + C(x_2 - x_1) + A_s \sin(2\pi t/T_s), \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{dy_1}{dt} = x_1 - y_1^3/3 + y_1, \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = A - y_2 + C(x_1 - x_2) + A_s \sin(2\pi t/T_s), \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{dy_2}{dt} = x_2 - y_2^3/3 + y_2. \quad (4)$$

Хорошо известно, что изолированные элементы данной системы находятся в устойчивом стационарном состоянии при $|A| > 1.0$, из которого при $|A| = 1.0$ рождается предельный цикл в результате БАХ, обусловленной в данном случае наличием N-образной изоклины. Решающее значение для процесса образования ритмов при взаимодействии автоколебательных элементов имеет величина ε . Из изучения коллективных мод локально сцепленных осцилляторов известно, что релаксационность определяет богатство набора аттракторов, размеры областей их устойчивости в пространстве параметров и скорости переходов между аттракторами [35, 36, 42].

В нашем случае рабочая область по ε ($0.001 < \varepsilon < 0.01$) обеспечивает заметную область сосуществования синфазного и антифазного решений на фазовой диаграмме и разумное число сложных аттракторов при наличии сигнала, так как при больших релаксационностях очень малые изменения периода сигнала приводят к смене аттрактора, что затрудняет анализ закономерностей синхронизации.

В этом параграфе будет рассмотрена автономная пара осцилляторов ($A_s = 0$), перечислены основные решения и показаны области их существования на параметрической плоскости. Динамическое поведение двух сцепленных одинаковых двумерных осцилляторов изучалось много раз и основные результаты хорошо известны. Однако наш выбор значений параметра A около БАХ и интервала значений релаксационности приводит к появлению малоизвестных режимов, которые интересны как в автономной системе (1)-(4) при $A_s = 0$, так и при взаимодействии этой системы с сигналом. Причины появления этих режимов связаны с существованием так называемой бифуркации «утки» [43], то есть с образованием периодических траекторий малого периода и амплитуды, которые предшествуют взрывному появлению обычного релаксационного цикла при переходе параметра A через точку бифуркации (рис. 1).

Амплитуды этих циклов крайне чувствительны к величине параметра A , а период $\sim \sqrt{\varepsilon}$. Эти особенности и определяют рабочую область по параметру ε , так как при больших релаксационностях (очень малых ε) «утиные» траектории практически не видны. Динамическое поведение **изолированных** осцилляторов типа ФХН при наличии «утки» под действием периодического сигнала изучено [44–46], хотя и не так подробно, как классический осциллятор ФХН. Основное внимание было направлено на исследование режима динамического хаоса, который образуется при $\varepsilon \sim 0.1$, и на резонанс сигнала с малоамплитудными колебаниями. Совсем недавно [47] хаотизация кусочно-линейного осциллятора ФХН при наличии слабого гармонического сигнала была продемонстрирована аналитически.

При наличии ингибиторного взаимодействия двух осцилляторов набор динамических режимов расширяется. На рис. 2 представлена часть фазовой диаграммы

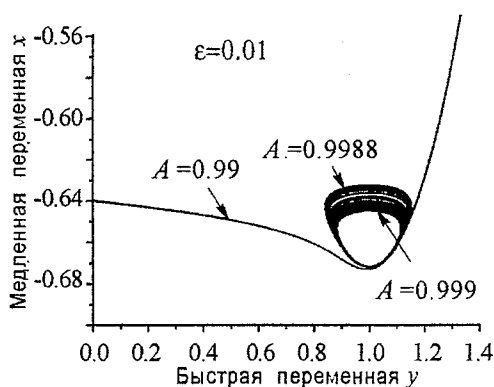


Рис. 1. Поведение фазовых траекторий изолированного осциллятора ФХН при $\varepsilon = 0.01$ при $A = 0.999$, $A = 0.9988$ и $A = 0.99$ вблизи точки срыва. Для $A = 0.99$ в выбранном масштабе поместилась только часть хорошо известной траектории осциллятора ФХН

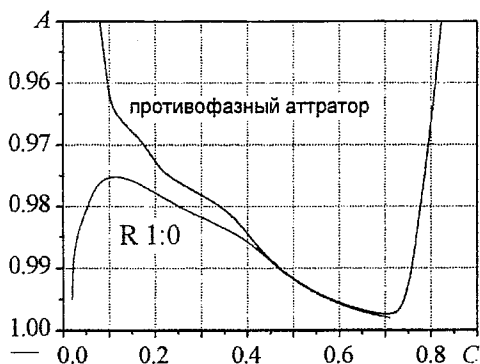


Рис. 2. Границы устойчивости режима 1:0 (до $A = 0.997$) и противофазного аттрактора (до $A = 0.95$) при $\varepsilon = 0.003$.

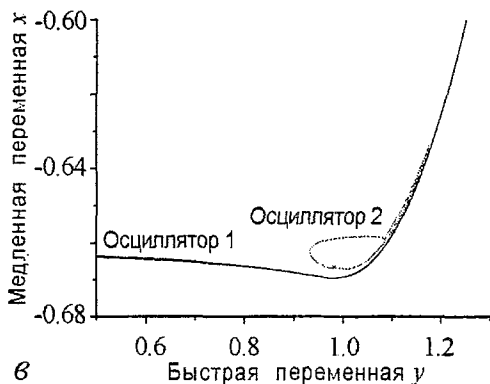
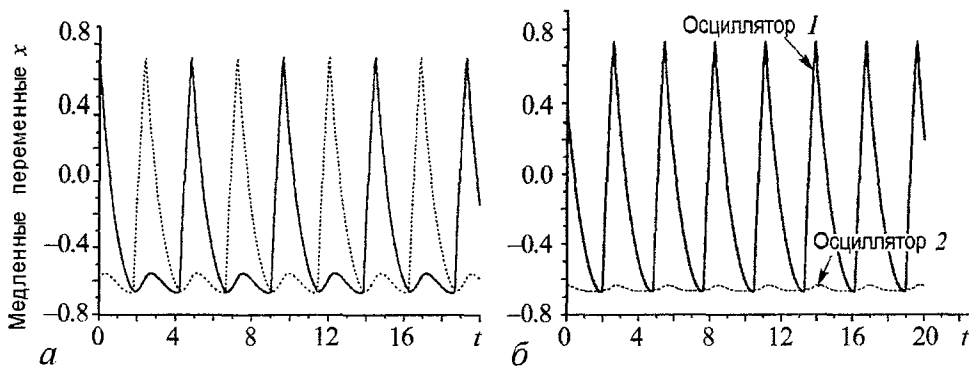


Рис. 3. Развертки медленных переменных двух связанных осцилляторов (без сигнала) при $A = 0.98$, $\varepsilon = 0.003$. *a* – противофазный режим, $C = 0.4$ (траектории различаются толщиной линий); *b* – режим 1:0, $C = 0.18$; *v* – детальный фазовый портрет режима 1:0 вблизи точки срыва

($A < 0.95$) системы (1), примыкающая к БАХ для $\varepsilon = 0.003$. На ней изображены границы устойчивости двух типов динамических режимов как функции параметров A (близость к бифуркации) и C (сила связи).

Основной противофазный режим (рис. 3, *a*), который в жестких системах ($\varepsilon \sim 10^{-4}$) устойчив при очень малых силах связи, при промежуточных релаксационностях уступает место режиму 1:0 (рис. 3, *b*), где только один осциллятор совершает полноамплитудные колебания, то есть генерирует вспышку быстрой переменной.

Рис. 3, *v* показывает поведение траекторий на фазовой плоскости. Видно, что тот из осцилляторов, который не генерирует вспышки, имеет траекторию, состоящую из двух частей: петля «утиной» траектории и вторая, узкая петля, вытянутая вдоль траектории большого цикла второго осциллятора. Вторая петля обусловлена ингибиторной связью, а первая петля порождается собственной динамикой, так как разность значений медленных переменных осцилляторов очень мала в области образования «утиной» петли. Вся траектория расположена внутри большого цикла и генерация вспышки невозможна.

Области фазовой диаграммы на рис. 2 не являются сплошными, так как имеются очень малые интервалы сил связи, где устойчив только синфазный режим. Эти интервалы разделяют решения, которые по сути одинаковы, но различаются деталями траекторий малых петель. Исследование этого тонкого эффекта, который имеет место только вблизи бифуркации, выходит за рамки настоящей работы.

Усиление релаксационности осцилляторов прижимает область устойчивости режима 1:0 к $A = 1.0$ и расширяет область устойчивости противофазного режима. Например, при $\varepsilon = 0.001$ и $A = 0.97$, синфазное решение с периодом ($T_{in} = 2.87$) и противофазный цикл ($T_{anti} = 4.53$ при $C = 0.2$) начинают сосуществовать уже при $C \sim 0.05$. Напротив, ослабление релаксационности (например, $\varepsilon = 0.01$) расширяет область устойчивости режима 1:0 ($C \in (0.053, 0.29)$ при $A = 0.97$), отодвигая область начала устойчивости антифазного режима в сторону больших сил связи. Отметим, что значения параметра $\varepsilon \sim 0.01$ являются весьма популярными при численном изучении ансамблей осцилляторов ФХН. В изолированном осцилляторе с такой релаксационностью утиные траектории наблюдаемы лишь в очень малой области параметров [41, 47], но, как мы увидим ниже, в ингибиторно связанных осцилляторах связь обеспечивает попадание фазовой точки в область существования утиных траекторий и устойчивый режим 1:0 занимает существенную часть фазовой диаграммы вблизи БАХ.

Второй важный параметр системы (1)-(4) – амплитуда сигнала. Выбор параметра A вблизи БАХ определяет и масштаб амплитуды сигнала, которая не должна сильно превышать разность между A и 1.0. Мы рассмотрим отдельно режимы, возникающие при наличии сигнала с амплитудой меньше и больше ($1.0 - A$). Если амплитуда сигнала заметно больше этой разности, то положительные части длиннопериодических сигналов ($T_s > T_{anti}$) будут надолго сдвигать эффективное значение параметра A в область устойчивости стационарного состояния ($A > 1.0$). При нашем выборе записи сигнала, синфазное смещение A_{eff} обоих осцилляторов в область существования устойчивого стационарного состояния приведет к полному доминированию синфазного решения. В настоящей работе будут рассмотрены синфазные сигналы, но если сигналы, приложенные к разным осцилляторам, сдвинуты по фазе, то ограничение по амплитуде сигнала может быть изменено.

Уравнения системы решались, как правило, традиционным численным методом Рунге – Кутты 4-го порядка (с двойной точностью). Сравнение разных версий этого метода и изменение точности вычислений позволяют утверждать, что представленные результаты не являются артефактами численных методов или долгоживущими переходными процессами. Алгоритмы поиска и идентификации аттракторов основаны на переборе начальных точек и наблюдениях за динамикой межвспышечных интервалов каждого осциллятора по мере выхода систем на аттрактор. Поиск границ устойчивости найденного аттрактора удобно производить, медленно меняя один или два параметра, не покидая найденный аттрактор и уточняя шаг по параметрам в случае потери устойчивости аттрактора.

2. Синхронные режимы: сигналы малой амплитуды

При обсуждении набора динамических режимов прежде всего следует отметить, что классические закономерности вынужденных колебаний изолированного осциллятора имеют место и в системе (1)-(4) для синфазного решения. Синфазный аттрактор, который устойчив при данном типе связи, имеет малый бассейн притяжения. Оценки показывают, что при отсутствии сигнала система (1)-(4) с $\varepsilon \approx 0.001$ покидает этот аттрактор, если разность значений медленных переменных между ос-

цилляторами превышает 2–3 процента. При приближении фазовых точек к минимуму изоклины этого различия оказывается достаточно для дефазирования системы после резкого скачка одной фазовой точки на вторую ветвь изоклины. При добавлении синфазного сигнала бассейн синфазного решения резко расширяется для тех периодов сигнала, которые не порождают сложных решений в системе (1)-(4). Далее мы будем рассматривать только режимы, отличающиеся от синфазного, имея в виду, однако, что они с ним сосуществуют.

При наличии сигнала все сложные режимы имеют период, кратный периоду сигнала, то есть $nT_s = T$, где T - полный период, состоящий из некоторого числа оборотов каждого осциллятора по своему предельному циклу. Обычно (для изолированных осцилляторов) это соотношение выглядит как $nT_s = \sum^m T_i$, где T_i - набор из m межвысшыщечных интервалов за период T . Если амплитуда сигнала невелика, то и флуктуации T_i невелики, что позволяет в первом приближении заменить T_i на средний период колебаний и ввести традиционное число вращения m/n (см., например, [5]). Однако присутствие ингибиторной связи и близость системы к БАХ накладывают свои ограничения на набор T_i , так как теперь

$$nT_s = \sum^{m_1} T_i^{(1)} = \sum^{m_2} T_i^{(2)},$$

где m_i числа вспышек в первом (втором) осцилляторе за один период.

Теперь, в отличие от вынужденных колебаний изолированного осциллятора, m_1 может быть не равно m_2 , и разброс T_i может быть большим даже в случае $m_1 = m_2$. Иными словами, синхронизация каждого осциллятора с внешним сигналом должна учитывать дефазирющее действие ингибиторной связи между осцилляторами.

Рассмотрим основные эффекты сигнала с добифуркационной амплитудой, то есть сигнала с $A_s < (1.0 - A)$ в разных областях значений периода сигнала. При выборе конкретных значений периода сигнала мы будем использовать периоды синфазного и противофазного режимов как точки отсчета. Если период сигнала близок к периоду цикла изолированного осциллятора, то весь эффект сигнала сводится к расширению бассейна притяжения синфазного режима.

2.1. Симметричные периодические режимы. В этом параграфе рассмотрим отдельно режимы с $m_1 = m_2$. Действие синфазного сигнала с периодами, кратными периоду антифазного режима T_{anti} , проявляется в образовании полос синхронизации $nT_s = T_{anti}$, где $n = 2, 4$ (более высокие частоты сигнала не рассматривались) во всем интервале изученных релаксационностей. Случай $n = 1, 3$ следует рассматривать отдельно, так как здесь устойчивость антифазного режима зависит от ϵ . Физическая причина синхронизации ясно видна из рис. 4, на котором представлены развертки медленных переменных и сигнала.

Отрицательные полупериоды сигналов уменьшают эффективное значение A и ускоряют наступление вспышки. Антифазные колебания точно подстраиваются под сигнал за счет значительного изменения периода, то есть в широком интервале значений периода сигнала (от $T_s = 1.97$ до 2.55 при указанных выше параметрах). Когда фазовые точки осцилляторов далеко от точки срыва, они нечувствительны к сигналу

(рефрактерное состояние) и время прохода по циклу является главным характерным временем процесса. В силу рефрактерности большей части траекторий это время нельзя уменьшать как угодно с помощью сигнала, что и дает нижнюю границу полосы синхронизации режима с $2T_s = T_{anti}$. Из сравнения траекторий на рис. 4 до и после выключения сигнала легко видеть, что вблизи области генерации вспышки сигнал значительно увеличивает расстояние между траекториями осцилляторов в фазовом пространстве. Этот эффект важен при обсуждении чувствительности аттракторов к внешним воздействиям, например, шумовым. Если период сигнала точно равен половине периода автономного антифазного цикла, то сигнал не оказывает влияния, так как вспышки происходят при нулевом значении сигнала. Дальнейшее увеличение периода синфазного сигнала приводит к слиянию фазовых точек и переходу системы на синфазные колебания. Аналогично происходит синхронизация и при $n = 4$, но с более узкой полосой $T_s \in (1.0, 1.3)$.

Значительно сложнее обнаружить синхронизацию при $n = 3$, $3T_s = T_{anti}$, так как в этом случае работают как отрицательные, так и положительные полупериоды сигнала (рис.5) и полоса синхронизации очень узкая по сравнению с $n = 2, 4$ (T_s от 1.47 до 1.5 при $\varepsilon = 0.003$). Заметим, что период получившегося режима короче, чем период автономного антифазного цикла ($T_{anti} = 5.0$ при $\varepsilon = 0.003$), а развертки несимметричны: один положительный полупериод сигнала задерживает наступление вспышки у одного осциллятора, а один отрицательный полупериод ускоряет появление вспышки у второго осциллятора. Задерживающий полупериод сигнала сильно сближает траектории осцилляторов вблизи точки срыва один раз за период, в то время как в автономном антифазном режиме такое сближение происходит дважды за период.

Синхронизация синфазного сигнала с противофазным режимом при $T_s \approx T_{anti}$ может происходить за счет несимметрии разверток результирующего режима вблизи точек срыва, аналогично тому как это имело место выше при синхронизации $3T_s = T_{anti}$. И в этом случае следует отметить наличие очень коротких временных интервалов, где значения переменных осцилляторов по обоим переменным почти совпадают, но производные имеют разные знаки (рис. 6). Тем не менее, начиная с релаксационностей $\varepsilon \leq 0.001$, этой малости достаточно для убегания от синфазного режима, и противофазный режим формально устойчив, хотя полоса синхронизации очень узкая (T_s от 4.48 до 4.54, при $T_{anti} = 4.53$, $\varepsilon = 0.001$). Помимо узости полосы синхронизации, наличие участков с близкими траекториями означает большую чувствительность к шуму, который переводит систему в синфазный режим.

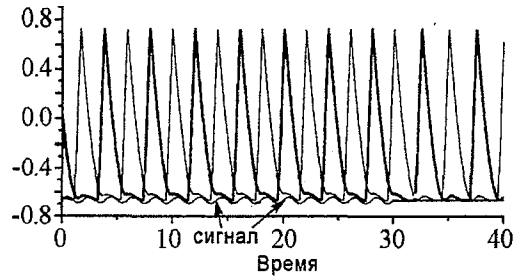


Рис. 4. Развертки медленных переменных (осцилляторы различаются толщиной линий) для антифазного аттрактора, синхронного с двумя периодами сигнала, $A_s = 0.025, T_s = 2.0$ при $A = 0.97, C = 0.2, \varepsilon = 0.003$. Развертка сигнала смещена к медленному участку траектории вблизи $x_i = -0.66$ и искусственно увеличена, чтобы было легче следить за влиянием сигнала на генерацию вспышек быстрой переменной, которая в этих координатах наблюдается как резкое возрастание медленной переменной. При $T = 30$ сигнал выключен и система выходит на обычный антифазный режим колебаний, устойчивый за счет ингибиторной связи

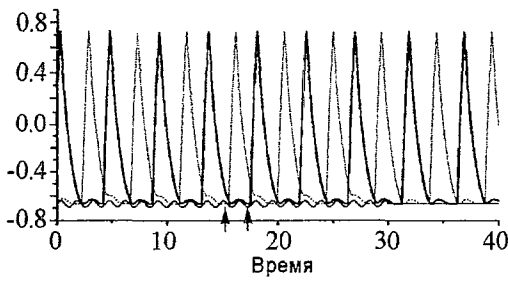


Рис. 5. Развертки медленных переменных для антифазного аттрактора, синхронного с тремя периодами сигнала $A_s = 0.025, T_s = 1.47$, при $C = 0.2, A = 0.97, \epsilon = 0.003$. Стрелками отмечены примеры задерживающего и ускоряющего полупериодов сигнала, соответственно

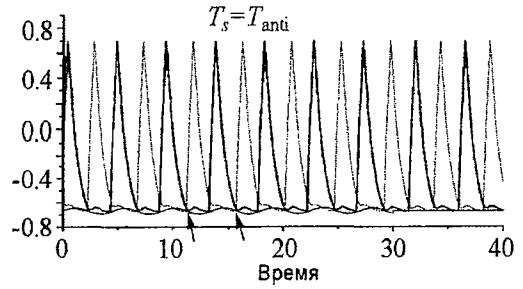


Рис. 6. Развертки медленных переменных для антифазного аттрактора, синхронного с сигналом $A_s = 0.025, T_s = 4.5$, при $C = 0.2, A = 0.97, \epsilon = 0.001$. Стрелками указаны критические моменты, которые определяют потерю устойчивости антифазного решения при уменьшении релаксационности. Для сравнения с автономным антифазным режимом сигнал выключен при $T = 30$

Если релаксационность не очень велика, например, $\epsilon = 0.003$, то синфазный сигнал с периодом, близким к T_{anti} , приводит к образованию нового сложного предельного цикла, структура которого есть результат взаимодействия ингибиторной связи и сигнала (рис. 7), $2T_s = T_1 + T_2$, где T_i - два существенно разных межвспышечных интервала, составляющих полный период цикла. Обозначим такой режим R222: на два периода сигнала приходится по два межвспышечных интервала в каждом осцилляторе (рис. 7, а).

Короткий интервал - это минимальное время движения по циклу, в то время как большой интервал обусловлен двумя последовательными задержками одного осциллятора вблизи точки срыва за счет ингибиторной связи. В этом режиме важны все полупериоды сигнала: отрицательные ускоряют наступление всплеск, несмотря на значительную разность значений медленных переменных (по сравнению с автономным антифазным режимом), а положительные полупериоды обеспечивают «сдвоенность» задержек осцилляторов, то есть большой разброс межвспышечных интервалов. Динамический механизм разного отклика осцилляторов на сигнал нетривиален и связан с образованием дополнительной очень маленькой петли на фазовом порт-

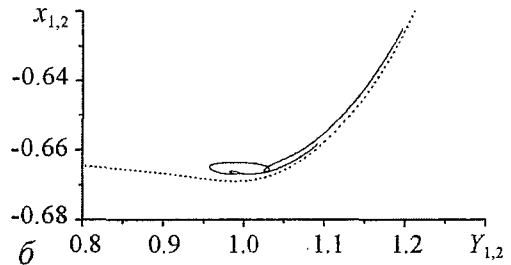
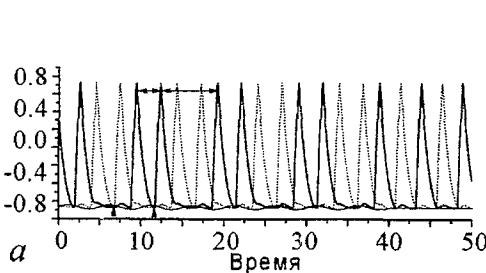


Рис. 7. а - развертки медленных переменных для сложного аттрактора, синхронного с двумя периодами сигнала $A_s = 0.025, T_s = 5.0$, при $C = 0.2, A = 0.97, \epsilon = 0.003$. Величины интервалов между всплесками: 2.8, 7.2 (указаны на развертке одного осциллятора). Отмечены моменты образования неодинаковости T_i . Сигнал выключен при $T = 40$. б - часть фазового портрета вблизи точек срывов, отмеченных на рис. (а)

следующий цикл, несмотря на близость фазовых переменных обоих осцилляторов. В этом принципиальное отличие данного режима от режимов $nT_s = T_{anti}, n = 1, 3$, в которых траектории близко сходились при нулевом значении сигнала, а не при максимально положительном. Часть траектории, выходящая из петли и поднимающаяся вдоль предельного цикла, обусловлена ингибиторной связью со вторым осциллятором, фазовая точка которого перескочила на вторую ветвь изоклины. Какой из осцилляторов выйдет на петлевую траекторию, определяется их предысторией, а сама петля есть одна из «утиных» траекторий, которые мы рассматривали в предыдущем параграфе. Эти траектории образуются только вблизи бифуркации рождения цикла и роль сигнала с добифуркационной амплитудой сводится к кратковременному, но в нужный момент, смещению эффективного значения параметра A ближе к 1.0, что увеличивает область притяжения «утиных» траекторий. Размеры этих петель и их характерные периоды зависят от ε таким образом, что с ростом релаксационности область существования петель исчезает, а вместе с ней и область устойчивости режима R222 и аналогичных ему. Размер полосы (или полос) синхронизации R222 мал по сравнению с T_{anti} ($T_s \in (5.0, 5.2)$ при $A_s = 0.02, \varepsilon = 0.003, A = 0.97$), так как продолжительность короткого межвспышечного интервала уже минимальна и определяет размер полосы синхронизации. Изменяя период сигнала, можно обнаружить и другие предельные циклы, образование которых обусловлено наличием «утиных» траекторий: например, при $T_s = 4.1$ устойчив режим R655 с пятью вспышками в течение шести периодов сигнала.

2.2. Несимметричные периодические режимы. В режимах типа R222 траектории осцилляторов сдвинуты во времени, но одинаковы по числу вспышек в полном периоде. Однако внешний сигнал может породить и глобально несимметричные решения, с неодинаковыми числами вспышек у осцилляторов. На рис. 8 представлен самый простой цикл этого типа для сигналов с добифуркационной амплитудой: R212.

Как и в случае режима R222, один из положительных полупериодов сигнала удерживает один из осцилляторов вблизи точки срыва на петлевой траектории, позволяя второму генерировать подряд две вспышки. По существу, положительные полупериоды работают через раз, так как второй не влияет на этот режим, действуя в течение рефрактерной части траектории. Поэтому данный режим может существовать и в форме R112 в довольно широком интервале периодов сигнала $T_s \in (7.3, 7.7)$. При значительном увеличении периода сигнала появляются дополнительные возможности для образования устойчивых несимметричных режимов вида R225, R113, так как на положительном полупериоде сигнала может уместиться несколько вспышек быстрой переменной. Однако исследования сигналов с большими периодами выходит за пределы данной работы.

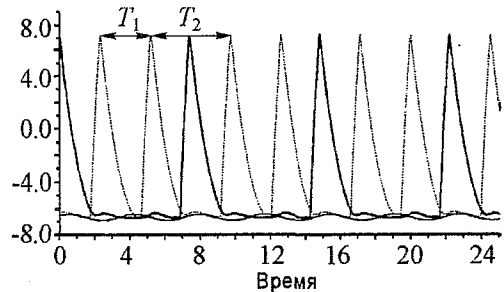


Рис. 8. Развертки медленных переменных для сложного несимметричного аттрактора R212, синхронного с двумя периодами сигнала $A_s = 0.025, T_s = 3.7$, при $C = 0.2, A = 0.97, \varepsilon = 0.003$. Величины интервалов между вспышками у одного осциллятора: $T_1 = 2.9, T_2 = 4.5$

До сих пор были использованы такие параметры модели ($A = 0.97, C = 0.2$), которые соответствуют сосуществованию синфазного и противофазного устойчивых предельных циклов (см. рис. 2). Однако на фазовой диаграмме имеется ещё одна область биритмичности, в которой синфазный режим сосуществует с режимом 1:0. Выберем для определенности $A = 0.98, C = 0.15, A_s = 0.015$. В этой области параметров сигнал может породить предельные циклы, отличающиеся от рассмотренных выше. Прежде чем переходить к новым режимам, отметим, что антифазный предельный цикл, который неустойчив в автономной системе при такой силе связи, становится устойчивым при наличии сигнала, если значение периода $T_s \in (2.4, 2.67)$, то есть стабилизируется синхронный режим $2T_s = T_{anti}$. Остается устойчивым и режим R222 (см. рис. 7) в пределах узких полос синхронизации $T_s \in (1.78, 1.85)$ и $T_s \in (5.425, 5.52)$.

Специфическими к данному выбору параметров A и C являются аттракторы, возникающие из-за взаимодействия сигнала и цикла 1:0. Прежде всего отметим, что основная полоса синхронизации режима 1:0 довольно узка: $T_s \in (2.85, 2.93)$, так как расстояние между предельными циклами осцилляторов на фазовой плоскости мало (см. рис. 3, б) и даже небольшое рассогласование периодов оказывается достаточным для слипания фазовых траекторий и перехода к синфазному режиму по краям основной полосы синхронизации.

Однако при отклонении величины периода сигнала от полосы основной синхронизации возникают предельно несимметричные режимы типа $nT_s = nT_i^1 = T^2$, например: R331 ($T_s = 3.7, 3.72$), R551 ($T_s = 3.35$), R661 ($T_s = 3.37, 3.38$), R771 ($T_s = 3.22$) и т.д. Наиболее простой пример такого аттрактора для $n = 3$ приведен на рис. 9.

Аналогично устроены и другие режимы этого типа: $(n - 1)$ колебание с $T_i \sim 2.9$ и одно колебание с $T_i \sim 5.2$. Иными словами, $(n - 1)$ колебание в режиме R1:0 и один антифазный цикл.

Можно найти такие периоды сигналов, при которых реализуется другой предельный случай: симметричные аттракторы, состоящие из чередующихся частей режима R1:0, например, R433 ($T_s = 4.12, 4.17$), R855 ($T_s = 3.5$) (рис. 10).

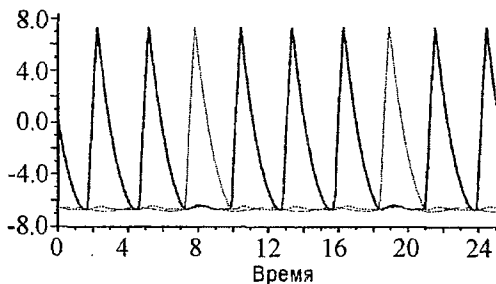


Рис. 9. Развертки медленных переменных для сложного несимметричного аттрактора R331, синхронного с тремя периодами сигнала $A_s = 0.015$, $T_s = 3.7$, при $C = 0.15, A = 0.98, \varepsilon = 0.003$. Величины интервалов между вспышками у одного осциллятора: 2.92, 2.92, 5.25

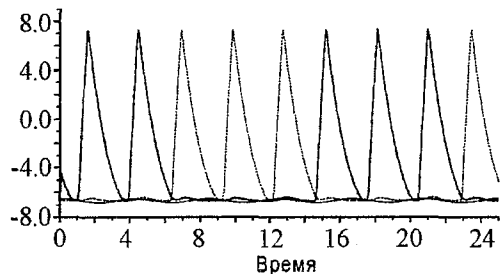


Рис. 10. Развертки медленных переменных для сложного симметричного аттрактора R433, синхронного с четырьмя периодами сигнала $A_s = 0.015, T_s = 4.15$, при $C = 0.15, A = 0.98, \varepsilon = 0.003$. Величины интервалов между вспышками: $4T_s = 16.6 = 2.86 + 2.94 + 10.8$

В обоих типах режимов разброс значений межвспышечных интервалов максимален по сравнению со всеми вышеперечисленными аттракторами, так как максимальное значение T_i должно быть кратно большому числу длительностей минимальных циклов. Узость полос синхронизации определяется необходимостью точной подгонки длительности сигнала под какое-либо число минимальных циклов, которые уже нельзя укоротить ни сигналом, ни связью.

В рассмотренной области фазовой диаграммы сигнал порождает и другие устойчивые предельные циклы с очень узкими полосами синхронизации. Их изучение выходит за рамки данной работы.

3. Синхронные режимы: большие сигналы

Рассмотрим теперь сигналы, амплитуды которых больше величины $(A - 1.0)$. В этом случае в течение части положительного полупериода сигнала $A_{eff} > 1.0$ осцилляторы останавливают движение по предельному циклу, если их фазовые точки близки к точке срыва. Как отмечалось выше, при больших амплитудах синфазного сигнала это приводит к доминированию синфазного режима. Поэтому будут рассмотрены те амплитуды сигналов, при которых образуются нетривиальные динамические режимы, не получающиеся при добифуркационных амплитудах сигналов.

Увеличение амплитуды сигнала приводит к появлению устойчивых режимов типа $nT_s : nT^1 : 0$, где n чаще всего равно 1. Эти режимы представляют собой еще более сложное образование, чем автономный режим R1:0, так как синхронизация одного осциллятора с сигналом



Рис. 11. Диаграмма синхронизации режима $nT_s : nT^1 : 0$ без разделения по n при $A = 0.97, \epsilon = 0.003, C = 0.2$, амплитуда сигнала $A_s = 0.05$

должна сопровождаться удержанием второго осциллятора вблизи стационарного состояния. Согласование этих требований приводит к необычному виду диаграммы синхронизации (рис. 11), вычисленной, например, для $A = 0.97, A_s = 0.05, \epsilon = 0.003, C = 0.2$, то есть для значений параметров, при которых автономный режим 1:0 неустойчив. Прямоугольниками представлены области устойчивости режима $nT_s : nT^1 : 0$ для любых n , в зависимости от периода сигнала.

Видно, что вся широкая область по T_s разбивается на сегменты, разделенные промежутками, где имеется только синфазный режим. Размеры сегментов определяются характерным временем малоамплитудных осцилляций траекторий осцилляторов вблизи точки срыва. Для демонстрации роли этих колебаний рассмотрим поведение траекторий при таком периоде сигнала $T_s = 4.1$, который обеспечивает заметный интервал времени удержания обеих фазовых точек около стационарного состояния (рис. 12).

На рис. 12, а показан один период режима R1:1:0 и ясно виден интервал времени, в котором сигнал удерживает оба осциллятора в стационарном состоянии. При таком разрешении неясно, почему только один осциллятор доходит до точки срыва и дает вспышку, когда действие сигнала прекращается. Детальная картина поведения траекторий представлена на рис. 12, б. Из нее ясно, что тот осциллятор, который

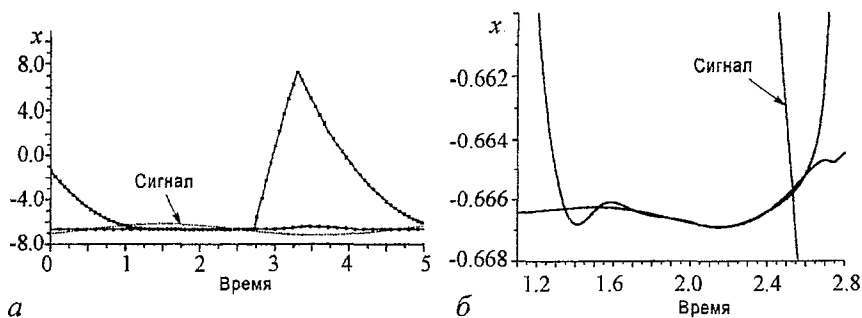


Рис. 12. *a* – развертки медленных переменных для режима $R1 : 1 : 0$ при $A = 0.97$, $\varepsilon = 0.003$, $C = 0.2$, амплитуда сигнала $A_s = 0.05$; *б* – детальное поведение траекторий около точки срыва

приближается к точке срыва после генерации вспышки, попадает в режим малоамплитудных осцилляций, которые приводят его к новому срыву. Так как периоды осцилляций не зависят от периода сигнала, то найдутся такие интервалы периодов сигнала, в которых удерживающее действие сигнала закончится в момент практически полного слияния траекторий, что приведет к синфазному режиму. Поэтому размеры интервалов значений периодов сигнала, где на синхрограмме (см. рис. 11) имеются только синфазные колебания, имеют порядок периодов малоамплитудных «утиных» осцилляций. Рассмотренные режимы образуются и в той области фазовой диаграммы, например, $A = 0.98$, $C = 0.15$, $A_s = 0.04$, где устойчив автономный режим $R1:0$.

4. Обсуждение

Принципиальным отличием данной работы от многочисленных исследований по вынужденным колебаниям нелинейных осцилляторов является рассмотрение системы, в которой исходно имеется сосуществование по крайней мере двух предельных циклов, различающихся периодами и фазовыми соотношениями. Была рассмотрена вполне реалистическая ситуация, в которой сигнал представляет собой некоторое общее поле, одинаково модулирующее параметры обоих осцилляторов. На амплитуду сигнала были наложены ограничения, позволяющие избежать полного доминирования синфазного режима колебаний, вынужденные колебания которого уже хорошо изучены.

В качестве модели, обладающей мультиритмичностью, была использована простая «базовая» система из двух одинаковых релаксационных осцилляторов ФХН, связанных диффузией по медленным переменным. В модели в явном виде присутствуют параметры управляющие степенью нелинейности (ε) и близостью к бифуркации (A) Андронова – Хопфа. Вблизи БАХ такая связь обеспечивает существование трех устойчивых предельных циклов и попарное сосуществование по крайней мере двух из них. Обмен медленной переменной в реакционно-диффузионных уравнениях обычно рассматривается в связи с изучением диссипативных структур и автосолиитонов в средах, где диффузия ингибитора быстрее, чем диффузия активатора [52, 53]. В автоколебательных системах подобные взаимодействия обнаруживаются при исследовании малых ансамблей из нейронов [54]. Недавние исследования генетиче-

ских осцилляторов также привели к моделям, где доминирует обмен медленной переменной [55, 56].

Изучение взаимодействия сигнала с несинфазными предельными циклами выявило два основных механизма образования коллективных режимов. Первый механизм - это классический захват частоты колебаний, который работает в случае образования антифазного режима. Существуют интервалы значений периода сигнала, в которых реализуется антифазный режим $nT_s = T_{anti}$. Особенность систем с антифазными циклами, порожденными ингибиторной связью, состоит в том, что максимальный размер полосы синхронизации имеет место при $n = 2$, а полоса с $n = 1$ очень узка и наблюдается только для очень жестких осцилляторов. Синхронизация на удвоенной частоте приводит к устойчивым антифазным колебаниям даже при малых силах связи, где автономный антифазный режим неустойчив. Кроме того, есть физические основания полагать, что антифазный режим с $n = 2$ значительно менее чувствителен к шуму, чем автономный антифазный режим, так как траектории вынужденных колебаний проходят дальше от точки срыва. Выделенность $n = 2$ обусловлена в нашем случае наличием только двух осцилляторов в системе. Однако ясно, что похожие особенности процесса взаимодействия сигнала и предельных циклов с разными фазовыми соотношениями будут иметь место и в массивах из большего числа осцилляторов.

Второй механизм действия сигнала связан с существованием «утиных» траекторий (см. рис. 1), если значение A близко к БАХ и осциллятор не очень жесткий. В автономной системе это приводит к режиму 1:0, то есть к постоянному удержанию одного осциллятора вне цикла. При наличии сигнала удержание перестает быть постоянным. Сигнал модулирует отклонение A_{eff} от бифуркационного значения, приводя к тому, что какой-либо из осцилляторов задерживается на малой петле «утиной» траектории на очень короткое время, позволяя второму осциллятору совершить два, три и т.д. (в зависимости от периода сигнала) цикла подряд. Сигнал чередует режимы 1:0 и антифазный режим, порождая такие моды, как R222 (см. рис. 7), R212 (см. рис. 8), R331 (см. рис. 9) и другие. Если амплитуда сигнала больше расстояния до точки бифуркации, то возникают дополнительные режимы типа $n : n : 0$, в которых сигнал управляет полосами синхронизации (см. рис. 11). Все режимы, в которых участвует второй механизм действия сигнала, значительно более чувствительны к шуму, чем антифазный режим. При наличии сосуществующего устойчивого синфазного режима вопрос о наблюдаемости этих режимов в реальных процессах заслуживает отдельного рассмотрения.

Следует отметить еще одну особенность аттракторов, индуцируемых сигналом вблизи БАХ, проявляющуюся в распределениях величин межвспышечных интервалов. На классической диаграмме синхронизации, состоящей из языков синхронизации, разброс T_i обычно имеет тот же порядок, что и отношение периодов сигнала и свободного периода автоколебательной системы. В нашей системе вариации межвспышечных интервалов могут быть велики, даже когда период сигнала не сильно отличается от периода автономных колебаний. Причина большой вариабельности связана с образованием предельных циклов типа R222, R433, в которых осцилляторы периодически попадают на «утиные» траектории, а значения T_i принимают дискретные значения из-за наличия ингибиторной связи, которая делает траектории нечувствительными к сигналам в течение рефрактерных периодов почти фик-

сированной длительности. Для осцилляторов связанных по медленной переменной описанное явление можно рассматривать как механизм генерации variability в присутствии сигнала.

Использованный метод исследования не может гарантировать нахождения всех периодических решений даже в ограниченном интервале изменения периода сигнала. Однако, он эффективен для нахождения наиболее вероятных решений. В работе рассмотрена популярная, но все-таки «теоретическая» модель, которая не описывает конкретные процессы. Полученные результаты необходимо проверить на других моделях, демонстрирующих мультиритмичность. Однако, выявленные специфические особенности действия сигнала на мультиритмичные системы следует принимать во внимание при интерпретации экспериментальных данных о динамике вынужденных колебаний массивов осцилляторов, особенно, если заранее неизвестен тип взаимодействия между ними.

Автор признателен Б. Безручко, М. Заксу, А. Кузнецову, А. Полежаеву, А. Пиковскому, М. Розенблюму за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Программы «Проблемы радиофизики» ОФН РАН и Программы поддержки ведущих научных школ.

Библиографический список

1. *Van der Pol B.* Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode) // *Phil. Mag.* 1926. Vol. 3. P. 64.
2. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978
3. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968.
4. *Ланда П.С.* Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
5. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
6. *Glass L., Mackey M.C.* From Clocks to Chaos. The Rhythms of Life. Princeton University Press, 1988.
7. *Tass P.A.* Phase Resetting in Medicine and Biology. Stochastic Modelling and Data Analysis. Springer, Berlin, 1999.
8. *Yuasa H., Ito M.* Coordination of many oscillators and generation of locomotory patterns // *Biol. Cybern.* 1990. Vol. 63. P. 177.
9. *Collins J.J., Stewart I.N.* Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits // *J. Nonlinear Sci.* 1993. Vol. 3. P. 349.
10. *Golubitsky M., Stewart I., Buono P.-L., Collins J.J.* A modular network for legged locomotion // *Physica D.* 1998. Vol. 115. P. 56.
11. *Takamatsu A. et al.* Spatiotemporal Symmetry in Rings of Coupled Biological Oscillators of *Physarum* Plasmodial Slime mold // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87. P. 078102.

12. Wang X.-J., Rinzel J. Alternating and synchronous rhythms in reciprocally inhibitory model neurons // *Neural Comput.* 1992. Vol. 4. P. 84.
13. Cymbalyuk G.S., Nikolaev E.V., Borisyyuk R.M. In-phase and antiphase self-oscillations in a model of two electrically coupled pacemakers // *Biol. Cybern.* 1994. Vol. 71. P. 153.
14. Абарбанель Г.Д., Рабинович М.И., Селверстон А. и др. Синхронизация в нейронных ансамблях // *Усп. Физ. Наук.* 1996. Т. 166. № 4. С. 363.
15. Postnov D., Han S.K., Kook H. Synchronization of diffusively coupled oscillators near the homoclinic bifurcation // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60. P. 2799.
16. Courbage M., Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Senneret M. Emergence of chaotic attractor and anti-synchronization for two coupled monostable neurons // *Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 1148.
17. Kopell N., Somers D. Anti-phase solutions in relaxation oscillators coupled through excitatory interactions // *J. Math. Biol.* 1995. Vol. 33. P. 261.
18. Ebeling W., Landa P.S., Ushakov V.G. Self-oscillations in ring Toda chains with negative friction // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 63. P. 046601.
19. Ruwisch D., Bode M., Schutz P., Markus M. Parallel analog computation of coupled cell cycles with electrical oscillators // *Phys. Lett.A.* 1994. Vol. 186. P. 137.
20. Brailove A.A., Linsay P.S. An experimental study of a population of relaxation oscillators with a phase-repelling mean-field coupling // *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1996. Vol. 6. P. 1211.
21. Khibnik A.I. et al. Amplitude dropout in coupled lasers // *Phys. Rev. A.* 2000. Vol. 62. P. 063815.
22. Bar-Eli K. Coupling of identical chemical oscillators // *J. Phys. Chem.* 1990. Vol. 94. P. 2368.
23. Yoshimoto M., Yoshikawa K., Mori Y. Coupling among three chemical oscillators: synchronization, phase death, and frustration // *Phys. Rev. E.* 1993. Vol. 47. P. 864.
24. Vanag V.K., Yang L., Dolnik M., Zhabotinsky A.M., Epshtein I.R. Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback // *Nature.* 2000. Vol. 406. P. 389.
25. Rabinovich M., Huerta R., Bazhenov M., Kozlov A.K., Abarbanel H.D.I. Computer simulations of stimulus dependent state switching in basic circuits of bursting neurons // *Phys. Rev.E.* 1998. Vol. 58. P. 6418.
26. Sosnovtseva O. V., Postnov D. E., Nekrasov A. M., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H. Phase multistability of self-modulated oscillations // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66, P. 036224.
27. Rand R.H., Holmes P.J. Bifurcations of periodic motions in two weakly coupled van der Pol oscillators // *Int. J. Non-linear Mech.* 1980. Vol. 15. P. 387.
28. Schreiber I., Holodniok M., Kubiček M., Marek M. Periodic and aperiodic regimes in coupled dissipative chemical oscillators // *J. Stat. Phys.* 1986. Vol. 43, P. 314.
29. Aronson D.G., Doedel E.J., Othmer H.G. An analytical and numerical study of the bifurcations in a system of linearly-coupled oscillators // *Physica D.* 1987. Vol. 25. P. 20.

30. *Ashwin P., King G.P., Swift J.W.* Three identical oscillators with symmetrical coupling // *Nonlinearity*. 1990. Vol. 3. P. 585.
31. *Crowley M.F., Epstein I.R.* Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: phase death, multistability, and in-phase and out-of-phase entrainment // *J.Phys.Chem.* 1989. Vol. 93. P. 2496.
32. *Ruwisch D., Bode M., Volkov D.V., Volkov E.I.* Collective modes of the three coupled relaxation oscillators: the influence of detuning // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1999. Vol. 9, P. 1969.
33. *Ramana Reddy D.V., Sen A., Johnston G.L.* Experimental evidence of time-delay-induced death in coupled limit-cycle oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. P. 3381.
34. *Renversez G.* Synchronization in two neurons: Results for a two-component dynamical model with time-delayed inhibition // *Physica D*. 1998. Vol. 114. P. 147.
35. *Volkov E.I., Stolyarov M.N.* Birhythmicity in a system of two coupled oscillators // *Phys. Lett. A*. 1991. Vol. 159, P. 61.
36. *Volkov E.I., Stolyarov M.N.* Temporal variability in a system of coupled mitotic timers // *Biol. Cybern.* 1994. Vol. 71. P. 451.
37. *Волков Д.В., Столяров М.Н., Волков Е.И.* Эффективный численный способ изучения динамики цепочек сильно релаксационных осцилляторов // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1996. Т. 4, № 3. С. 77.
38. *Volkov E.I., Stolyarov M.N.* Temporal variability generated by coupling of mitotic timers // *J. Biol. Systems*. 1995. Vol. 3. P. 63.
39. *Анищенко В. С., Нейман А. Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // *Усп. Физ. Наук*. 1999. Т. 169. С. 7.
40. *Izhikevich E.M.* Resonance and selective communication via bursts in neurons having subthreshold oscillations // *BioSystems*. 2002. Vol.67. P.95.
41. *Medvedev G.S., Cisternas J.E.* Multimodal regimes in a compartmental model of the dopamine neuron // *Physica D*. 2004. Vol. 194. P. 333.
42. *Somers D., Kopell N.* Rapid synchronization through fast threshold modulation // *Biol. Cybern.* 1993. Vol. 68. P. 393.
43. *Eckhause W.* Relaxation oscillations including a standard case of French ducks // In: *Springer Lecture Notes Math*. 1983. Vol.985. P. 449.
44. *Braaksma B., Grasman J.* Critical dynamics of the Bonhoeffer-van der Pol equation and its chaotic response to periodic stimulation // *Physica D*. 1992. Vol. 68. P. 265.
45. *Lloyd D., Lloyd A.L., Olsen L.F.* The cell division cycle: a physiologically plausible dynamic model can exhibit chaotic solutions // *BioSystems*. 1992. Vol. 27. P. 17.
46. *Landa P. S., Rabinovitch A.* Exhibition of intrinsic properties of certain systems in response to external disturbances // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 61. P. 1829.
47. *Sekikawa M., Inaba N., Tsubouchi T.* Chaos via duck solution breakdown in a piecewise linear van der Pol oscillator driven by an extremely small periodic perturbation // *Physica D*. 2004. Vol. 194. P. 227.

48. *Treutlein H., Schulten K.* Noise-induced neural impulses // *Eur. Biophys. J.* 1986. Vol. 13. P. 355.
49. *Volkov E.I., Stolyarov M.N., Zaikin A., Kurths J.* Coherence resonance and polymodality in inhibitory coupled excitable oscillators // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 67. P. 066202.
50. *Postnov D.E., Sosnovtseva O.V., Han S.K., Kim W.S.* Noise-induced multimode behavior in excitable systems // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 016203.
51. *Volkov E.I., Ullner E., Zaikin A.A., and Kurths J.* // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 061112.
52. *Кернер Б., Осинков В.* // *Усп. Физ. Наук.* 1990. Т. 33. С. 679.
53. *Castets V., Dulos E., Boissonade J., De Kepper P.* Experimental evidence of a sustained standing turing-type nonequilibrium chemical pattern // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 2953.
54. *Wang X-J., Rinzel J.* Alternating and synchronous rhythms in reciprocally inhibitory model neurons // *Neural Comp.* 1992. Vol. 4. P. 84
55. *McMillen D., Kopell N., Hasty J., Collins J.J.* Synchronizing genetic relaxation oscillators by intercell signalling // *Proc. Natl. Acad. Sci.* 2002. Vol. 99. P. 679.
56. *Kuznetsov A., Kaern M., Kopell N.* Synchrony in a population of hysteresis-based generic oscillators // *SIAM J. Appl. Math.* 2005. Vol. 65. P. 392.

Отделение теоретической физики Поступила в редакцию 29.11.2005
Физического института им. П.Н. Лебедева
РАН, Москва

**FORCED OSCILLATION MODES IN A BIRHYTHMIC SYSTEM
OF TWO COUPLED RELAXATION OSCILLATORS
NEAR ANDRONOV – HOPF BIFURCATION**

E.I. Volkov

A system of two identical relaxation oscillators of the FitzHugh-Nagumo type with the parameters chosen in the vicinity of a bifurcation of limit cycle emergence was examined for the dynamic modes arising in the presence of a weak harmonic signal applied to both elements. Slow variable exchange between them gives rise to three stable limit cycles called in-phase, anti-phase, and extremely asymmetrical, in which only one of the oscillators generates spikes. In this study, we show that slow variable exchange also causes this system to respond to weak harmonic forcing in a manner quite different from what is known in the classical dynamics of forced oscillations. In addition to the expected synchronization tongues generated by interaction of the signal with the in-phase attractor, we observed at least three other consequences of the coexistence of different solutions: (i) there appeared broad bands of synchronization of the signal with the anti-phase solution at high frequencies multiple to the frequency of the anti-phase oscillations, whereas the base synchronization frequency band became much narrower; (ii) signal period ranges were found in which the limit cycles were such that several spikes were produced over the complete period and each oscillator was characterized with the same set of discrete

interspike intervals; and (iii) narrow signal period ranges were detected, in which complex limit cycles emerged, with oscillators producing different numbers of spikes per complete period and at very different interspike intervals. A qualitative explanation is proposed for the mechanism whereby complex rhythms arise in the regions of the parameters setting the relaxation properties of oscillators and their proximity to the bifurcation point.



Волков Евгений Израилевич – родился в Москве (1947). Закончил физический факультет МГУ (1971). Защитил кандидатскую диссертацию (1976). С 1976 года сотрудник сектора теоретической биофизики ФИ РАН. С 1988 года заместитель директора отделения теоретической физики ФИ РАН. В 2002 году защитил диссертацию «Исследование механизмов генерации ритмов в системах взаимодействующих биологических и физических осцилляторов» на звание доктора физико-математических наук. Область научных интересов - модели биологических мембран, математические модели автоколебательных процессов в физике и биологии, исследование коллективных режимов в небольших сетях из релаксационных элементов, роль шумов и слабых сигналов в генерации новых ритмов. Автор многих статей в отечественных и зарубежных изданиях. E-mail: volkov@td.lpi.ru