



**ОЦЕНКА СВЯЗАННОСТИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПО ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ  
ПУТЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФАЗОВОЙ ДИНАМИКИ:  
ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА\***

*Д.А. Смирнов, М.Б. Бодров, Б.П. Безручко*

Рассматривается задача определения наличия и направленности связи между колебательными системами только по их временным реализациям. Один из эффективных «нелинейных» подходов к ее решению основан на расчете фаз колебаний по наблюдаемым сигналам и построении модельного отображения для фазовой динамики, свойства которого позволяют судить о характере связи. Подход теоретически обоснован для слабонелинейных и слабосвязанных фазовых осцилляторов под действием нормально-белого шума. В работе в вычислительном эксперименте выясняются практические пределы применимости подхода (при различных свойствах шумов, величинах фазовой нелинейности осцилляторов и интенсивности связи). Показана применимость используемых рабочих формул для оценок связанности для широкого круга ситуаций.

**Введение**

Проблема определения наличия и преимущественного направления взаимодействия (связи) между двумя колебательными системами важна во многих отраслях научных исследований и практики [1-11], в частности, в медицинской диагностике [10, 11]. Для ее решения существует ряд традиционных методов в математической статистике, спектральном анализе и теории информации. В последнее время новые перспективные методы предлагаются в рамках нелинейной динамики; анализ различных подходов приведен в [11]. Один из них, названный в [12] методом эволюционного отображения, рассмотрен в данной работе. Он опирается на известный из теории колебаний факт относительно высокой чувствительности фазы колебаний к внешнему воздействию и основан на эмпирическом моделировании фазовой динамики (МФД) систем и расчете интенсивности взаимодействия по значениям параметров

\* Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

полученной модели [12]. Метод МФД эффективен для анализа колебательных процессов, которые обладают явно выраженными основными ритмами колебаний (при этом можно корректно определить фазы колебаний) и не синхронизованы друг с другом. В его исходном варианте [12] для обеспечения надежных результатов требуются длинные стационарные ряды (около 5000 характерных периодов при умеренных шумах). Но в биологии, медицине, климатологии и других областях очень распространены нестационарные последовательности измеряемых величин [13]. При этом возникает потребность определения характеристик связанности по относительно коротким сегментам таких рядов и отслеживание их изменений во времени. Для решения этой задачи в рабочие формулы для оценок связанности были введены поправки [14], которые обеспечивают их несмещенность в случае относительно коротких рядов (длиной вплоть до 50 характерных периодов), а также были предложены рабочие формулы для их 95-процентных доверительных интервалов [14].

Выражения для новых оценок были получены для линейных несвязанных осцилляторов под действием нормального белого шума. Их применимость в других случаях не доказана и тщательно не исследовалась. Целью данной работы является систематическое исследование пределов применимости этих формул. Необходимость такого рассмотрения определяется разнообразием ситуаций, когда требуется выявить характер связи по коротким рядам.

В разделе 1 данной работы кратко описан метод МФД (п. 1.1) и методика исследования пределов его применимости (п. 1.2). В разделе 2 приведены результаты исследования: показано, как влияют на применимость оценок свойства шума (п. 2.1), нелинейность осцилляторов (п. 2.2), интенсивность связи и шума наблюдений (п. 2.3), несколько факторов вместе (п. 2.4). В заключении сделаны выводы о достаточно широкой области применимости рассмотренных рабочих формул [13] для оценки интенсивности и направленности взаимодействия.

## 1. Методика исследования

**1.1. Метод, основанный на моделировании фазовой динамики.** Основная идея метода – оценить, насколько сильно зависит будущая эволюция фазы одной системы от текущего значения фазы другой системы. Для этого по исходным временным рядам от двух систем  $\{x_1(t_1), \dots, x_1(t_N)\}$  и  $\{x_2(t_1), \dots, x_2(t_N)\}$  ( $t_i = i\Delta t$ ,  $\Delta t$  – интервал выборки) получают временные ряды фаз их колебаний  $\{\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_1(t_N)\}$  и  $\{\varphi_2(t_1), \dots, \varphi_2(t_N)\}$  [15, 16]. Затем по полученным реализациям фаз строят математическую модель.

Форму модели выбирают из следующих соображений. Для широкого круга ситуаций фазовая динамика осцилляторов, имеющих ярко выраженный основной ритм колебаний, адекватно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями [17]

$$d\varphi_{1,2}/dt = \omega_{1,2} + G_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2) + \xi_{1,2}(t), \quad (1)$$

где  $\omega_{1,2}$  – параметры, определяющие угловые частоты колебаний,  $\xi_i(t)$  – независимые гауссовы белые шумы с нулевым средним и автокорреляционными функциями (АКФ)  $\langle \xi_i(t)\xi_i(t') \rangle = \sigma_i^2 \delta(t - t')$ . При работе с дискретными временными рядами

удобно рассматривать разностную форму уравнений

$$\Delta_{1,2}(t) = F_{1,2}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \mathbf{a}_{1,2}) + \varepsilon_{1,2}(t), \quad (2)$$

где  $\Delta_i(t) \equiv \varphi_i(t + \tau) - \varphi_i(t)$  – приращение фазы за время  $\tau$ ,  $\varepsilon_i(t)$  – шумы с нулевым средним,  $F_i$  – тригонометрические многочлены,  $\mathbf{a}_i$  – векторы их коэффициентов.

Для построения модели (2) задают интервал  $\tau$  (обычно принимается равным характерному периоду колебаний [18]) и порядки многочленов  $F_i$ . Используя временные ряды, получают оценки коэффициентов  $\hat{\mathbf{a}}_i$  методом наименьших квадратов. Затем рассчитывают интенсивности воздействия осцилляторов друг на друга по коэффициентам модели.

Если бы «истинные» уравнения фазовой динамики были известны априори, интенсивность воздействия второй системы на первую  $c_1$  определилась бы как крутизна зависимости  $F_1$  от  $\varphi_2$ , и первой на вторую –  $c_2$  – аналогично:

$$c_{1,2}^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial F_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2, \mathbf{a}_{1,2}) / \partial \varphi_{2,1})^2 d\varphi_1 d\varphi_2. \quad (3)$$

Индекс направленности определяется разницей  $c_1$  и  $c_2$ . Это были бы *истинные* характеристики связи. Но при анализе временного ряда имеются только оценки коэффициентов  $\hat{\mathbf{a}}_i$ , по которым нужно рассчитать оценки величин  $c_1$  и  $c_2$ . Наиболее прямой путь – использование формулы (3), подставляя оценки  $\hat{\mathbf{a}}_i$  вместо истинных значений  $\mathbf{a}_i$ . Но при этом оценки  $\hat{c}_{1,2}$  оказываются хороши только для очень длинных стационарных сигналов (длина порядка 5000 характерных периодов при частоте выборки 10–20 точек на периоде и умеренном уровне шума [12, 14]). Для более коротких рядов, с которыми приходится сталкиваться при анализе многих реальных сигналов, эти оценки оказываются смещенными. В [14] были предложены новые оценки  $\hat{\gamma}_{1,2}$  для величин  $c_{1,2}^2$  и оценка  $\hat{\delta} \equiv \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1$  для индекса направленности в форме  $\delta = c_2^2 - c_1^2$  (см. Приложение). Были получены также формулы для их 95-процентных доверительных интервалов вида  $[\hat{\gamma}_i - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}, \hat{\gamma}_i + 1.8\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}]$  и  $\hat{\delta} \pm 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}$ , где  $\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}$  и  $\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}$  рассчитываются по *тому же* короткому ряду. Новые оценки не смещены и обеспечивают частоту ошибочных выводов не выше 5% и для относительно коротких рядов (хотя с длиной не менее 50 периодов [14]).

**1.2. Методика исследования пределов применимости метода.** Рабочие формулы для оценок  $\hat{\gamma}_{1,2}$ ,  $\hat{\delta}$  были получены аналитически для линейных несвязанных фазовых осцилляторов с нормальным белым шумом, то есть для системы (1) с  $G_{1,2} \equiv 0$ . Ее уравнения аналитически приводятся к виду

$$\Delta_i(t) = \omega_{1,2}\tau + \varepsilon_i(t), \quad i = 1,2, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_i$  – независимые нормальные шумы с дисперсиями  $\sigma_i^2\tau$  и корреляционными функциями, линейно спадающими до 0 на интервале от 0 до  $\tau$  [14]. Если одно из перечисленных свойств системы (нормальность и вид корреляционной функции шумов  $\varepsilon_i$ , линейность осцилляторов, отсутствие связи) нарушается, то и оценки  $\hat{\gamma}_{1,2}$ ,  $\hat{\delta}$  могут стать смещенными, а рабочие формулы для доверительных интервалов могут не соответствовать 95-процентной надежности.

В работе мы проводим систематическое исследование пределов применимости рабочих формул для оценок  $\hat{\gamma}_{1,2}$ ,  $\hat{\delta}$  и их доверительных интервалов при вариации различных свойств осцилляторов. Для этого ищем ответы на следующие вопросы:

- при каких условиях оценки  $\hat{\gamma}_{1,2}$  остаются несмещенными;
- при каких условиях вероятность ошибочных выводов о направлении связи не превышает 5%.

Кроме оценки количества ошибочных выводов важен и вопрос о том, при каких условиях достаточно высока вероятность правильных выводов о направлении связи<sup>1</sup> (для определенности мы выясняли, когда эта вероятность не менее 75%).

Для ответа на эти вопросы рассчитывается смещение оценок  $\hat{\gamma}_{1,2}$ . Смещение оценки  $\hat{\gamma}_i$  есть разность между ее математическим ожиданием  $M[\hat{\gamma}_i]$  и истинным значением оцениваемой величины  $c_i^2$ . Математическое ожидание находится путем усреднения по ансамблю из 1000 временных рядов (стандартное отклонение среднего служит оценкой погрешности, с которой найдено  $M[\hat{\gamma}_i]$ ). Если  $c_i^2$  не известно априори, то оно принимается равным значению  $\hat{\gamma}_i$ , рассчитанному по длинному ряду ( $N = 200000$  точек). Оценка признается смещенной, если разность  $M[\hat{\gamma}_i] - c_i^2$  отличается от нуля больше, чем на удвоенную величину погрешности, с которой найдено  $M[\hat{\gamma}_i]$ .

По тому же ансамблю из 1000 рядов рассчитывается число ошибочных (правильных) выводов о наличии и направлении связи и определяется, не превышает ли оно 5% (не меньше ли оно 75%).

Временные ряды значений фаз в численных экспериментах имели длину  $N = 1000$  точек (кроме специально оговоренных случаев). В пп. 2.2–2.4 временные ряды генерировались системой стохастических дифференциальных уравнений, что реализовалось путем их численного интегрирования методом Эйлера с шагом 0.01л. Величина  $\tau$  всегда принималась равной  $2\pi$ , что примерно составляет характерный период, то есть время нарастания фазы на  $2\pi$ . Следуя [12, 14], мы использовали многочлены  $F_i$  третьего порядка. Для более полного представления результатов рассчитывался также индекс фазовой когерентности [19]  $\rho = \sqrt{\langle |\exp^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}| \rangle}$  (угловые скобки означают усреднение по времени), который показывает степень синхронности колебаний и может сигнализировать о неприменимости метода (по наблюдениям [20] это имеет место, если  $\rho > 0.6$ ).

## 2. Численный эксперимент

**2.1. Влияние свойств шума.** Оценки  $\hat{\gamma}_{1,2}$ ,  $\hat{\delta}$  получены для уравнений (4) с шумами  $\varepsilon_{1,2}$ , которые имеют нормальное распределение и корреляционные функции, линейно спадающие до нуля на интервале  $[0, \tau]$ . Чтобы проверить, насколько необходимо выполнение этих условий, метод применялся для оценки связанности по временным реализациям системы разностных уравнений (4) с различными свойствами шумов  $\varepsilon_{1,2}$ .

*Варьирование времени корреляции.* Шумы  $\varepsilon_{1,2}$  принимались нормальными и с АКФ, линейно спадающими до нуля на интервале  $[0, T]$ . Время корреляции  $T$  ва-

<sup>1</sup>Кроме ошибочных и правильных выводов могут быть и неопределенные, то есть когда достоверно не удастся выявить направление связи.

рыровалось в диапазоне  $[0, 10\tau]^2$ . Интервал выборки  $\Delta t$  принимался равным  $0.2\pi$  (то есть  $\tau = 10\Delta t$ ). Уровни шума  $\sigma_{1,2}$  менялись в диапазоне  $[0, 0.6]$ . В результате расчетов получено, что для всех  $T$  и уровней шума число ошибочных выводов о наличии связи не превышает 4%, и оценки  $\hat{\gamma}_{1,2}$ ,  $\hat{\delta}$  остаются несмещенными. Например, получено математическое ожидание оценок  $M[\hat{\gamma}_i] \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$  со стандартным отклонением  $3.1 \cdot 10^{-3}$  для  $\sigma_{1,2} = 0.12$  и  $T = 10\tau$ . Таким образом, судя по рассмотренному примеру, изменение корреляционной функции шумов  $\varepsilon_{1,2}$  не ограничивает применимость оценок.

*Различные законы распределения.* Рассматривались шумы  $\varepsilon_{1,2}$  с качественно различными законами распределения и корреляционными функциями, спадающими до нуля на интервале  $[0, \tau]$ . Для упрощения вычислений использовался интервал выборки  $\Delta t = \tau = 2\pi$ , чтобы АКФ была спадающей до нуля за один шаг дискретного времени и можно было бы использовать для генерирования ряда последовательность независимых величин  $\varepsilon_{1,2}(t_i)$ <sup>3</sup>. Рассматривались шумы со следующими свойствами:

- негладкая плотность распределения (равномерное распределение на отрезке);
- асимметричное распределение (распределение хи-квадрат с одной степенью свободы, приведенное к нулевому среднему);
- бимодальное распределение (случайное чередование значений из двух гауссовых распределений с различными средними).

Интенсивности шумов  $\sigma_{1,2}$  менялись в диапазоне от 0 до 0.6. Результаты для всех законов распределения и уровней шума практически одинаковы: оценки не смещены и число ошибочных выводов о наличии связи составляет не более 5%. Например, для равномерного распределения с  $\sigma_{1,2} = 0.12$  получено:  $M[\hat{\gamma}_i] \approx 1.0 \cdot 10^{-4}$ , стандартное отклонение  $3.7 \cdot 10^{-3}$ , число ошибок 5%. Для асимметричного распределения с  $\sigma_{1,2} = 0.12$ :  $M[\hat{\gamma}_i] \approx 2.3 \cdot 10^{-4}$ , стандартное отклонение  $3.8 \cdot 10^{-3}$ , число ошибок 5%. Для бимодального распределения с  $\sigma_{1,2} = 0.12$ :  $M[\hat{\gamma}_i] \approx 1.4 \cdot 10^{-4}$ , стандартное отклонение  $3.6 \cdot 10^{-3}$ , число ошибок 4.9%. Таким образом, вид функции распределения шумов  $\varepsilon_{1,2}$  также не повлиял на применимость оценок.

**2.2. Влияние индивидуальной нелинейности осцилляторов.** Чтобы проверить, насколько «портятся» свойства оценок связанности в случае наличия нелинейности осцилляторов, оценки рассчитывались по временным реализациям системы (1) с  $G_i(\varphi_1, \varphi_2) = \omega_i + b \cos \varphi_i$ ,  $\omega_1 = 1.1$ ,  $\omega_2 = 0.9$  и нормальными белыми шумами  $\xi_{1,2}$ . Коэффициент  $b$  определяет «величину фазовой нелинейности». Уровень шума  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  менялся в диапазоне  $[0, 0.66]$ ,  $b$  – в диапазоне  $[0, 0.80]$ . Рассчитывалось смещение оценок и число ошибочных выводов о наличии связи (правильных выводов здесь не может быть, так как связи нет).

Результаты для оценки  $\hat{\gamma}_1$  представлены на рис. 1, *a* (для  $\hat{\gamma}_2$  они аналогичны). Оценка  $\hat{\gamma}_1$  не смещена и вероятность ошибочного вывода о наличии связи не больше 5% в области слева от сплошной линии, то есть даже при достаточно сильной нелинейности (значения  $b$  до 0.3–0.7). Черным показана область, где вероятность

<sup>2</sup>Нужная корреляционная функция шума обеспечивалась путем фильтрации нормального белого шума с помощью скользящего среднего.

<sup>3</sup>Обеспечить последовательность случайных величин с заданным законом распределения и заданной АКФ можно с помощью метода, использующего преобразование Фурье и подгонку амплитуд [21], но это требует более трудоемких расчетов.

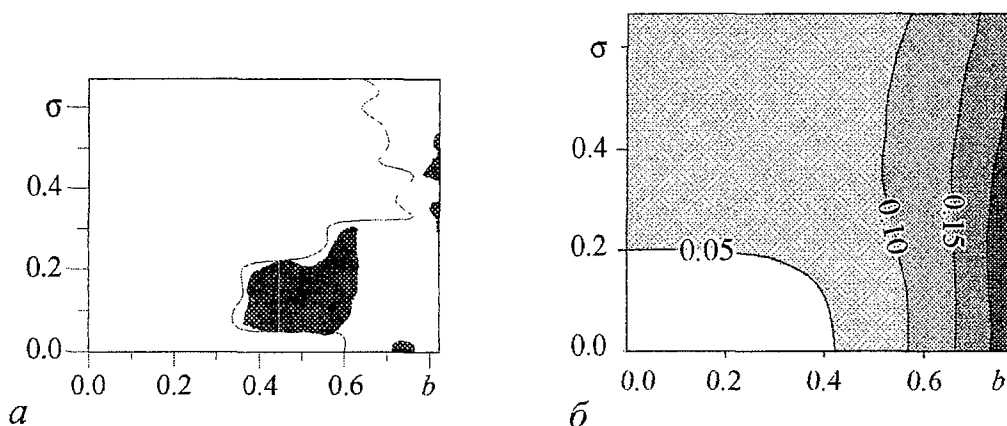


Рис. 1. *а* – области на плоскости коэффициент нелинейности – уровень шума: слева от сплошной линии – нет смещения оценки  $\hat{\gamma}_1$  и вероятность ошибочного вывода о наличии влияния второго осциллятора на первый не более 5%, черный цвет – вероятность ошибки больше 5%; *б* – значения индекса фазовой когерентности в серых полутонах. На рис. 2, *а*, 3 и 4, *а* эта информация совмещена и приведена на одной плоскости

ошибочного вывода превышает 5%. На рис. 1, *б* показаны величины индекса фазовой когерентности. Хотя с ростом нелинейности его величина растет, так как распределение разности фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  становится все более неравномерным, но она все-таки мала и не может выявить ситуации, где велика вероятность ошибок и/или смещены оценки.

Выразим результаты в относительных «физических» единицах, то есть вклад нелинейности  $b \cos \varphi_1$  и шума  $\xi_1$  в динамику по отношению к вкладу слагаемого  $\omega_1 = 1.1$ , которое можно интерпретировать как влияние линейной компоненты возвращающей силы осциллятора. Величину нелинейности выразим как  $b/\omega_1$  а уровень шума как  $\sigma/\sqrt{2\pi\omega_1}$  (так как вклад белого шума за период  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  есть  $\sigma\sqrt{T_1}$ , а вклад возвращающей силы равен  $\omega_1 T_1 = 2\pi$ ). Тогда численные значения по оси абсцисс на рис. 1, *а* практически не изменятся, а по оси ординат – уменьшатся примерно в 2.5 раза. Вывод: оценки не смещены и вероятность ошибочного вывода о наличии связи не более 5% для интенсивности шумов в диапазоне 0–25% от линейной компоненты возвращающей силы и фазовой нелинейности – вплоть до 30–70%. Таким образом, область применимости метода оказывается совсем не бесконечно малой по величине нелинейности.

**2.3. Влияние силы связи между осцилляторами.** Чтобы проверить, насколько применимы оценки  $\hat{\gamma}_{1,2}$ ,  $\hat{\delta}$  при наличии связи между осцилляторами, они рассчитывались по временным реализациям системы (1) с  $G_{1,2}(\varphi_1, \varphi_2) = \omega_{1,2} + k_{1,2} \sin(\varphi_{2,1} - \varphi_{1,2})$ ,  $\omega_1 = 1.1$ ,  $\omega_2 = 0.9$  и нормальными белыми шумами  $\xi_{1,2}$ . Коэффициенты  $k_1, k_2$  определяют силу связи. Поочередно рассматривались два случая:

- однонаправленная связь, когда один из коэффициентов равен нулю, а другой определяет и силу, и направление связи;
- двунаправленная связь, когда сумма коэффициентов  $k_1, k_2$  определяет общую силу связи, а их разность – ее направление.

Кроме того, рассматривалось влияние шума наблюдений на применимость метода (для краткости эти результаты приведены только для случая однонаправленной связи).

**Однонаправленная связь.**  $k_1 = 0$ , значение  $k_2 = k$  менялось в диапазоне  $(0, 0.25]$ , уровень шума  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  – в диапазоне  $[0, 0.5]$ . На рис. 2, а представлена область, где оценки  $\hat{\gamma}_{1,2}$  не смещены (это условие дает правую границу, почти вертикальную) и число правильных выводов не менее 75% (это условие дает изогнутую левую границу – минимальную надежно идентифицируемую величину связи). Внутри этой области индекс фазовой когерентности достигает значений 0.8 (рис. 2, а), то есть даже при таких больших значениях  $\rho$  метод может оставаться работоспособным. Левая граница при малых уровнях связи – почти прямая линия ( $\sigma \approx 4.6k$ ), правая граница дается условием  $k \approx 0.21$ .

Причины смещения оценок в случае больших  $k$ : при низких уровнях шума – синхронизация (см. рис. 2, а), при больших уровнях шума – только нелинейность фазовой динамики, вызванная наличием связи. Таким образом, при фиксированном уровне шума наилучшая ситуация – промежуточная величина однонаправленной связи (при малой связи мала вероятность правильного вывода – мешает шум, при большой связи появляется смещение оценок – мешает синхронизация или нелинейность). С ростом длины ряда область применимости оценок расширяется (см. результаты для ряда длиной  $N = 4000$  на рис. 2, б).

В относительных единицах (на плоскости  $k/\omega_2, \sigma/\sqrt{2\pi\omega_2}$ ) получим, что метод работает для уровней связи до 20% от линейной возвращающей силы. Сила связи в 20% может быть надежно выявлена по ряду длиной 1000 точек для уровней

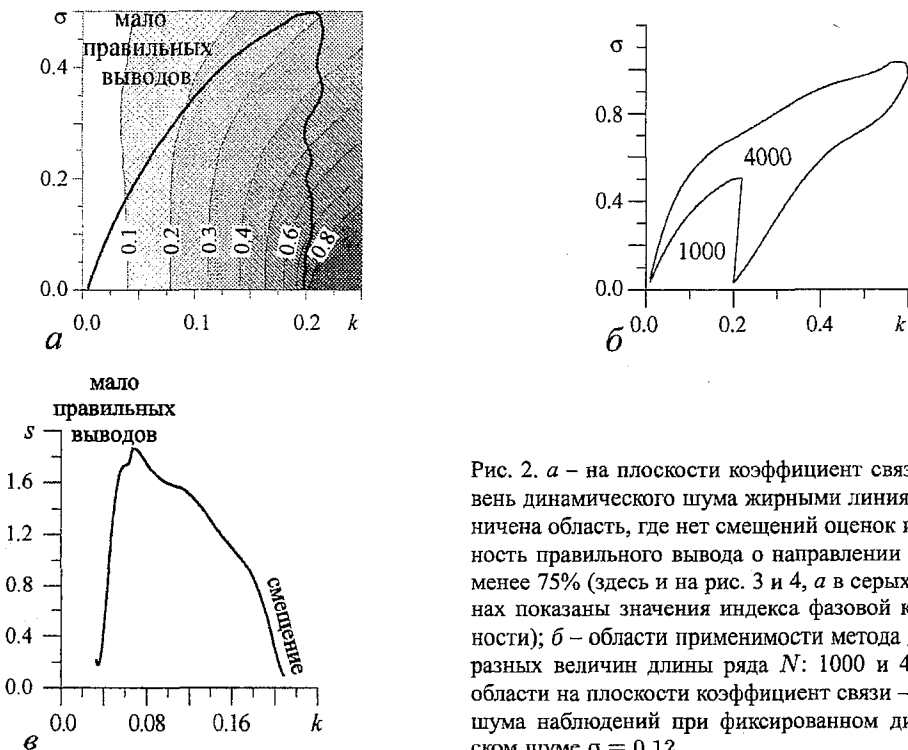


Рис. 2. а – на плоскости коэффициент связи – уровень динамического шума жирными линиями ограничена область, где нет смещений оценок и вероятность правильного вывода о направлении связи не менее 75% (здесь и на рис. 3 и 4, а в серых полукругах показаны значения индекса фазовой когерентности); б – области применимости метода для двух разных величин длины ряда  $N$ : 1000 и 4000; в – области на плоскости коэффициент связи – уровень шума наблюдений при фиксированном динамическом уровне шума  $\sigma = 0.12$

шума вплоть до 20%. Может быть надежно выявлена и сколь угодно слабая связь, если достаточно мал уровень шума. Таким образом, область применимости метода вновь оказывается широкой.

*Влияние шума наблюдений.* При фиксированном уровне динамического шума временной ряд значений фаз формировался путем добавления к истинным значениям фаз аддитивного нормального белого шума со стандартным отклонением  $s$ , которое варьировалось в широком диапазоне. Область применимости метода показана на рис. 2, в (для  $\sigma = 0.12$ ). По сравнению с зависимостью от уровня динамического шума правая граница изгибается влево, то есть с ростом уровня шума максимальная идентифицируемая величина связи уменьшается. Относительную величину шума наблюдений можно оценить как его стандартное отклонение, деленное на стандартное отклонение фазы  $\varphi_2$ , свернутой в отрезок  $[0, 2\pi]$ :  $s / \sqrt{\langle (\varphi_2 \bmod 2\pi)^2 \rangle} \approx s/1.8$ .

Результаты при этом таковы: направление связи величиной 7% можно достоверно определить при уровне шума наблюдений вплоть до 100%, метод работает для уровней связи до 20% при шуме до 30%. То есть вновь область применимости имеет значительные размеры.

*Двунаправленная связь.*  $k_1 = k, k_2 = k+0.02$ . Величина  $k$  менялась в диапазоне  $[0, 0.1]$ . Величина асимметрии связи всегда равна 0.02. Уровень шума  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  менялся в диапазоне  $(0, 0.12]$ .

Результаты расчетов представлены на рис. 3. Область эффективности оценок связанности ограничена справа (то есть при росте силы связи). Вновь индекс фазовой когерентности не превышает в этой области 0.8. И вновь имеется две причины ограничения применимости метода. При малом шуме это преимущественно повышение синхронности колебаний, ведущее к смещению оценок. При большем шуме – больший разброс значений оценок, что ведет к малой вероятности правильных выводов.

В относительных единицах  $k/\omega_2$  и  $\sigma/\sqrt{2\pi\omega_2}$  границы применимости метода до 8% по силе связи при шуме до 2% (и до 2% по силе связи при шуме около 5%). Уровень шума в 5% – максимально допустимый. Таким образом, и при наличии двунаправленной связи метод работает в значительных пределах по значениям связи и шума. Но эта область уже, чем ранее представленные, поскольку мала ве-

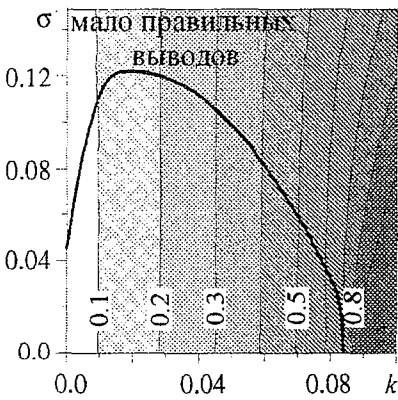


Рис. 3. На плоскости параметров коэффициент связи – уровень шума жирными линиями показана область, где нет смещений оценок, вероятность ошибочного вывода о направлении связи не более 5% и вероятность правильного вывода не менее 75%. В серых полутонах показаны значения индекса фазовой когерентности



личина асимметрии связи. С увеличением асимметрии связи (при фиксированной ее суммарной силе) границы применимости метода раздвигаются (см. выше случай однонаправленной связи как наиболее благоприятный).

**2.4. Связанные осцилляторы Ван дер Поля.** Более реалистична ситуация, когда наблюдению доступны не сами значения фаз, а значения переменных, по которым еще нужно рассчитать фазы и, следовательно, неизбежно внести некоторые погрешности. Для имитации такой ситуации в качестве объекта мы взяли связанные осцилляторы Ван дер Поля:

$$d^2x_{1,2}/dt^2 = 0.2(1 - x_{1,2}^2)dx_{1,2}/dt - \omega_{1,2}^2x_{1,2} + k_{1,2}(x_{2,1} - x_{1,2}) + \xi_{1,2}, \quad (5)$$

где  $\omega_{1,2}$  – круговые частоты колебаний,  $\omega_1 = 1.02$ ,  $\omega_2 = 0.98$ ,  $\xi_{1,2}$  – нормальный белый шум. В качестве наблюдаемых брались переменные  $x_1, x_2$ . Фазы колебаний рассчитывались с помощью построения аналитического сигнала через преобразование Гильберта. Интервал выборки  $\Delta t = 0.1\pi$ , чтобы обеспечить 20 точек на характерном периоде (эта частота выборки позволяет без больших искажений рассчитать фазу сигнала [14, 22]). Длина ряда была равна  $N = 1400$  точек, после расчета фаз отбрасывались 200 полученных значений с каждого края, чтобы избежать краевых эффектов [14]. Итоговый временной ряд значений фаз вновь содержал 1000 точек (50 характерных периодов). Осцилляторы в данном случае характеризуются индивидуальной фазовой нелинейностью, шум в уравнениях фазовой динамики не в точности нормальный белый. Таким образом, данный объект представляет собой вариант нарушения сразу нескольких приведенных выше условий. Рассматриваем случай однонаправленной связи:  $k_1 = 0$ , значение  $k_2 = k$  менялось в диапазоне  $[0, 0.08]$ .

*Без шума наблюдений.* Уровень динамического шума  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  менялся в диапазоне  $[0, 0.16]$ . На рис. 4, а представлена область, где оценки не смещены (правая граница) и вероятность правильного вывода о направлении связи не менее 75% (левая граница). Вероятность ошибочного вывода здесь всегда не более 5%. Границы области – практически прямые линии. Внутри этой области индекс фазо-

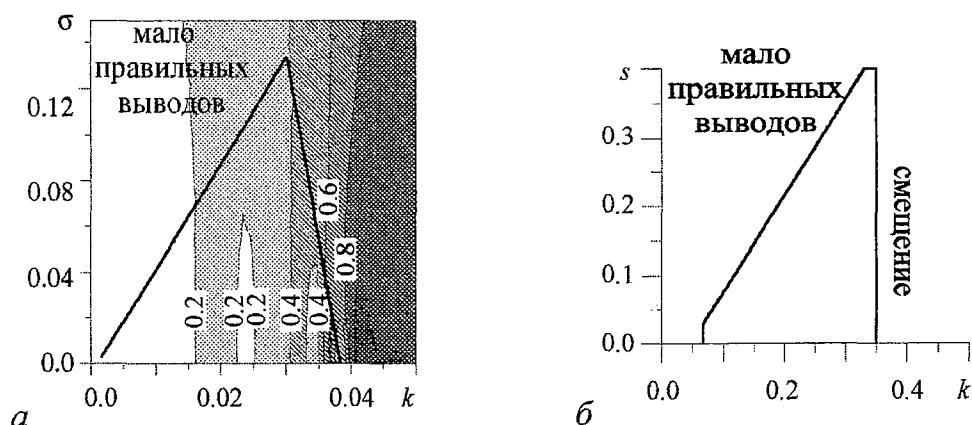


Рис. 4. а – на плоскости параметров коэффициент связи – уровень динамического шума для осцилляторов Ван дер Поля жирными линиями показана область, где нет смещений оценок и вероятность правильного вывода о направлении связи не менее 75%; б – та же область на плоскости коэффициент связи – уровень шума наблюдений (при фиксированном динамическом шуме  $\sigma = 0.025$ )

вой когерентности достигает примерно 0.7 (рис. 4, а). Справа от нее он становится больше, и оценки становятся смещенными из-за синхронности колебаний осцилляторов. Левая граница связана с малой вероятностью правильных выводов. Результаты вполне аналогичны п. 2.3 (см. рис. 2, а), только границы линейны, а не изогнуты, и правая граница не вертикальна, а наклонена влево. В относительных единицах вклады силы связи и шума можно выразить как  $k\sqrt{2\langle x_2^2 \rangle} / \omega_2^2 \sqrt{\langle x_2^2 \rangle} \approx 1.4k$  и  $\sigma\sqrt{T_2} / \omega_2^2 \sqrt{\langle x_2^2 \rangle} \approx 1.4\sigma$  (здесь  $\langle x_2^2 \rangle \approx 2.3$ ). Границы применимости – до 6.5% по силе связи (меньше, чем для фазовых осцилляторов, рис. 2, а) и до 17% по шуму (примерно так же, как для фазовых осцилляторов).

*С шумом наблюдений.* Уровень динамического шума был принят  $\sigma = 0.025$ . Стандартное отклонение шума наблюдений (нормальный белый шум, добавленный к наблюдаемым  $x_{1,2}$ ) менялось в диапазоне  $[0, 0.4]$ . Область эффективности метода показана на рис. 4, б. В относительных единицах по оси ординат (отношение  $s$  к стандартному отклонению  $x_2$ , при этом единицы уменьшаются в 1.5 раза) получим, что допускается шум до 25%. Количественное отличие влияния шума наблюдений в переменной  $x$  от шума наблюдений в самой фазе имеет место: по сравнению с рис. 2, в область эффективности стала существенно уже, особенно по уровню шума (допускается шум до 25% вместо 60%). Это говорит о том, что значения фаз весьма чувствительны к шуму в наблюдаемой. Тем не менее, и с этими замечаниями размеры области применимости метода значительны, а не пренебрежимо малы.

### Заключение

Как показывают результаты проведенных численных экспериментов, метод определения наличия и направления связи между колебательными системами по временным рядам, основанный на моделировании фазовой динамики, имеет достаточно широкую область применимости. Несмотря на то, что выражения для оценок выведены в приближении линейных несвязанных осцилляторов под действием нормального белого шума, метод эффективен при различных свойствах шумов и конечных (не малых) величинах нелинейности, связи и шума наблюдений. По рассмотренным в работе примерам можно сделать следующие выводы:

- вариация функции корреляции и функции распределения вероятностей шума в разностных уравнениях фазовой динамики не влияет на применимость метода;
- допустимо наличие индивидуальной нелинейности осцилляторов до 30 – 60% от линейной компоненты возвращающей силы, но возможно наличие существенных ошибок метода, когда вклад нелинейности и шума в фазовую динамику примерно одинаков;
- допустима связь между осцилляторами примерно до 5 – 20% от линейной компоненты возвращающей силы;
- при некоторых величинах связи допустим измерительный шум (шум наблюдения) в значениях фаз колебаний примерно до 100% и в самих наблюдаемых до 25%;
- значение индекса фазовой когерентности, с одной стороны, не является однозначным показателем применимости метода и при  $\rho \approx 0.1$  могут иметь место смещения оценок и частые ошибочные выводы о наличии связи, с другой стороны, при  $\rho \approx 0.8$  метод может быть вполне эффективен;

- вероятность правильного вывода о наличии и направлении связи мала в случае очень слабой связи и больших шумов, но соответствующие границы применимости раздвигаются при увеличении длины ряда;
- вероятность ошибочного вывода о наличии и направлении связи велика при очень сильной связи из-за повышения синхронности колебаний осцилляторов, соответствующие границы применимости мало меняются при увеличении длины ряда.

Хотя суммированные здесь эмпирические условия применимости метода могут несколько измениться количественно при рассмотрении других типов нелинейности и связи осцилляторов, полученные результаты уже позволяют утверждать, что эти условия достаточно мягки. Тем самым подтверждена перспективность и целесообразность применения метода на практике для анализа сложных систем.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-02-16305), программы BRNE (REC-006), гранта Президента РФ (МК-1067.2004.2) и Фонда содействия отечественной науке.*

## Приложение

### Рабочие формулы для оценок связанности

Формулы для оценок связанности  $\hat{\gamma}_{1,2}$  получены для системы линейных несвязанных осцилляторов с нормальным белым шумом [14] и выражаются через оценки коэффициентов модели (2), где функции  $F_i$  – тригонометрические многочлены

$$F_i = \sum_{m,n} [a_{i,m,n} \cos(m\varphi_1 + n\varphi_2) + b_{i,m,n} \sin(m\varphi_1 + n\varphi_2)], i = 1, 2. \quad (\text{П1})$$

Оценки коэффициентов многочленов  $\hat{a}_{i,m,n}$  и  $\hat{b}_{i,m,n}$  получают методом наименьших квадратов, а оценки их дисперсий есть

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 = \frac{2\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2}{N-k} \times \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{k-1} \left( 1 - \frac{l}{k} \right) \cos \left( \frac{l(m\hat{a}_{1,0,0} + n\hat{a}_{2,0,0})}{k} \right) \exp \left( - \frac{l(m^2\hat{\sigma}_{\varepsilon_1}^2 + n^2\hat{\sigma}_{\varepsilon_2}^2)}{2k} \right) \right), \quad (\text{П2})$$

где  $\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2$  – оценка дисперсии шума  $\varepsilon_i$  в разностных уравнениях (4):

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{N-k-L_i} \sum_{j=1}^{N-k} \left( \Delta_i(t_j) - \frac{1}{N-k} \sum_{l=1}^{N-k} \Delta_i(t_l) \right), \quad (\text{П3})$$

$L_i$  – число коэффициентов многочлена  $F_i$ . Для оценки дисперсий  $\hat{b}_{i,m,n}$  формула та же самая.

Выражение для  $\hat{\gamma}_1$  через оценки коэффициентов и их дисперсий

$$\hat{\gamma}_1 = \sum_{m,n} n^2 \left( \hat{a}_{1,m,n}^2 + \hat{b}_{1,m,n}^2 - 2\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 \right); \quad (\text{П4})$$

аналогично и для  $\hat{\gamma}_2$ . Индекс направленности связи определяется как  $\hat{\delta} = \hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1$ .

Оценка дисперсии  $\hat{\gamma}_1$  есть:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1}^2 = \begin{cases} \sum_{m,n} n^4 (\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_{1,m,n}}^2), & \hat{\gamma}_1 \geq 5 \sqrt{\sum_{m,n} n^4 (\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_{1,m,n}}^2)}, \\ \frac{1}{2} \sum_{m,n} n^4 (\hat{\sigma}_{\hat{a}_{1,m,n}}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_{1,m,n}}^2), & \end{cases} \quad (\text{П5})$$

где

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 = \begin{cases} 2\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^4 + 4 \left( \hat{a}_{i,m,n}^2 - \hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 \right) \hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2, & \hat{a}_{i,m,n}^2 - \hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^2 \geq 0, \\ 2\hat{\sigma}_{\hat{a}_{i,m,n}}^4, & \end{cases} \quad (\text{П6})$$

для  $\hat{\sigma}_{\hat{b}_{i,m,n}}^2$  – то же самое. Оценка дисперсии  $\hat{\gamma}_2$  вычисляется аналогично. Для индекса направленности имеем оценку дисперсии  $\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}^2 = \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1}^2 + \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_2}^2$ .

Доверительные интервалы для оценок связанности выражаются через их дисперсии. Так 95-процентный доверительный интервал был найден полуэмпирически и составляет  $[\hat{\gamma}_i - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}, \hat{\gamma}_i + 1.8\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_i}]$  для  $\hat{\gamma}_i$  и  $[\hat{\delta} - 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}, \hat{\delta} + 1.6\hat{\sigma}_{\hat{\delta}}]$  для индекса направленности.

### Библиографический список

1. *Palus M., Stefanovska A.* Direction of coupling from phases of interacting oscillators: An information-theoretic approach // *Phys. Rev. E.* 67, 055201(R) (2003).
2. *Kazantsev V.B., Nekorkin V.I., Makarenko V.I., Llinas R.* Olivo-cerebellar cluster-based universal control system // *PNAS.* 2003. Vol. 100, 13064.
3. *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H.* Bimodal oscillations in nephron autoregulation // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66. P. 061909.
4. *Jevrejeva S., Moore J., Grinsted A.* Influence of the Arctic Oscillation and El Nino, Southern Oscillation (ENSO) on ice conditions in the Baltic Sea: The wavelet approach // *Journal of Geophysical Research.* 2003. Vol. 108. P. 4677.
5. *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Characterizing direction of coupling from experimental observations // *Chaos.* 2003. Vol. 13. P. 179.
6. *Schiff S.J., So P., Chang T., Burke R.E., Sauer T.* Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54. P. 6708.
7. *Arnhold J., Lehnertz K., Grassberger P., Elger C.E.* A robust method for detecting interdependences: application to intracranially recorded EEG // *Physica D.* 1999. Vol. 134. P. 419.
8. *Meeren H.K.M., Pijn J.P.M., van Luijtelaaar E.L.J.M., Coenen A.L.M., Lopes da Silva F.H.* Cortical focus drives widespread corticothalamic networks during spontaneous absence seizures in rats // *J. Neurosci.* 2002. Vol. 22. P. 1480.
9. *Feldmann U., Bhattacharya J.* Predictability improvement as an asymmetrical measure of interdependence in bivariate time series // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2004. Vol. 14. P. 504.

10. *Mormann F., Kreuz T., Rieke C., Andrzejak R.G., Kraskov A., David P., Elger C., Lehnertz K.* On the predictability of epileptic seizures // *Clin. Neurophysiol.* p. in press (2004).
11. *Quiñan Quiroga R., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: a case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041903.
12. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Detecting direction of coupling in interacting oscillators // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol. 64. P. 045202.
13. *Каплан А.Я.* Нестационарность ЭЭГ: методологический и экспериментальный анализ // *Успехи физиол. наук.* 1998. Т. 29, № 3. С. 35.
14. *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* Estimation of interaction strength and direction from short and noisy time series // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 046209.
15. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., Schafer C., Tass P. A.* Phase synchronization: from theory to data analysis // *Neuro-informatics / Eds F. Moss and S. Gielen, Handbook of Biological Physics, Elsevier Science, New York.* 2001. Vol. 4. P. 279.
16. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I.* Instantaneous phase method in studying chaotic and stochastic oscillations and its limitations // *Fluctuation and Noise Letters.* 2004. Vol. 4, № 1. P. L219.
17. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 2000. Vol. 10. P. 2291.
18. *Rosenblum M.G., Cimponeriu L., Bezerianos A., Patzak A., Mrowka R.* Identification of coupling direction: application to cardiorespiratory interaction // *Physical Review E.* 2002. Vol. 65. P. 041909.
19. *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients // *Physica D.* 2000. Vol. 144. P. 358.
20. *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* Characterizing direction of coupling from experimental observations // *Chaos.* 2003. Vol. 13, № 1. P. 179.
21. *Schreiber T., Schmitz A.* Improved surrogate data for nonlinearity tests // *Physical Review Letters.* 1997. Vol. 77. P. 635.
22. *Huang N.E., Shen Z., Long S.R.* The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *The Royal Society.* 1998. P. 903.

*Саратовский государственный  
университет  
Саратовское отделение ИРЭ РАН*

*Поступила в редакцию 22.11.2004*

# ESTIMATION OF COUPLING BETWEEN OSCILLATORS FROM TIME SERIES VIA PHASE DYNAMICS MODELING: LIMITS OF METHOD'S APPLICABILITY

*D.A. Smirnov, M.B. Bodrov, B.P. Bezruchko*

The problem of determination of the presence and directionality of coupling between oscillatory systems only from their time realizations is considered. One of the efficient «nonlinear» approaches to its solution is based on calculation of the phases of oscillations from the observed signals and construction of a model map describing the phase dynamics, whose properties allow coupling characterization. The approach was justified theoretically for weakly nonlinear and weakly coupled phase oscillators under the influence of normal white noise. In this work, we find out practical limits of applicability of the approach in numerical experiment (for different properties of noise and different values of phase nonlinearity and coupling intensity). Applicability of the employed working formulas for coupling estimators in a wide range of situations is shown.



*Смирнов Дмитрий Алексеевич* – родился в 1977 году. Окончил Высший колледж прикладных наук Саратовского государственного университета (1999). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика в СГУ (2001). Область научных интересов: теория динамических систем, математическое моделирование, анализ временных рядов, научные вычисления. Имеет 67 научных публикаций, в том числе 16 статей в реферируемых журналах. Поддержан индивидуальными грантами РФФИ (2001-2003), Президента РФ (2004), Фонда содействия отечественной науке (2004), программы BRNE (2004).



*Бодров Максим Борисович* – родился в 1981 году. Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2003). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Имеет 17 научных публикаций. Область научных интересов: компьютерное моделирование биологических процессов, изучение явления синхронизации, разработка методов обнаружения характера и интенсивности взаимодействия между сложными системами по их экспериментальным данным.



*Безручко Борис Петрович* – родился в 1946 году. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1969). Доктор физико-математических наук (1995), профессор кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Научные интересы - экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических и электронных системах, математическое моделирование по экспериментально наблюдаемым временным рядам. Опубликовал более 100 статей в российских и зарубежных изданиях.