



ФАЗОВО-АМПЛИТУДНЫЕ КЛАСТЕРЫ В АНСАМБЛЕ ГЕНЕРАТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ*

В. В. Клиньшов, В. Б. Казанцев, В. И. Некоркин

В работе представлены результаты исследования коллективной динамики ансамбля глобально связанных генераторов Ван дер Поля. Исследуется эффект формирования фазово-амплитудных кластеров согласно заданному стимулу. Кластеры соответствуют разбиению генераторов на две группы, колебания в которых происходят в противофазе. Эффект может быть использован для осуществления различных процессов обработки информации, в частности, для записи, хранения и распознавания бинарных образов.

Введение

Интерес к исследованию информационно-вычислительных систем, в той или иной степени имитирующих процессы в нейронных сетях мозга, – нейрокомпьютеров – чрезвычайно вырос в последнее время. В значительной степени это объясняется тем, что казавшаяся еще сравнительно недавно чисто теоретической проблема построения таких систем в связи с успехами современной молекулярной и полупроводниковой микроэлектроники приобрела прикладной характер. Сейчас вполне обоснованно считается, что новая генерация компьютеров будет базироваться на принципах нейрокомпьютинга.

Структурно нейрокомпьютеры представляют собой сети, состоящие из большого числа взаимодействующих активных элементов, работающих параллельно. В основе работы нейропроцессоров лежит коллективная динамика нелинейных взаимодействующих подсистем, приводящая к процессам структурообразования и реализующая механизмы ассоциативной памяти. Динамические свойства элементов нейропроцессоров варьируются в достаточно широких пределах. В процессоре Hopffild [1–3] это бистабильные элементы, в нейрокомпьютере Hoppensteadt-

*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1-6 октября 2004, Саратов, Россия.

Izhikevich [4] - простейшие колебательные элементы (в приближении фазового описания), а в сети Baird, Eeckman [5] элементы могут демонстрировать хаотическую динамику (см. также [6, 7]).

Важной характеристикой нейрокомпьютерных процессоров является архитектура связей между элементами. Именно за счет подходящим образом организованной структуры связей и пространственной конфигурации процессора удается осуществить в нейросистемах даже с очень простой собственной динамикой элементов сложные вычислительные процедуры. Например, нейропроцессор Хопфилда, межэлементные связи которого удовлетворяют так называемому правилу Хебба (правилу формирования определенной матрицы весовых коэффициентов), может осуществлять запоминание и/или распознавание бинарных информационных образов.

В данной работе будет показано, что на базе сети глобально связанных генераторов Ван дер Поля может быть реализован нейропроцессор типа Хопфилда. Будут представлены результаты исследования коллективной динамики системы. Изучены процессы формирования фазовых и фазово-амплитудных кластеров в соответствии с бинарным информационным шаблоном, задаваемым через матрицу коэффициентов связи. Такие свойства системы позволяют осуществлять запись, хранение и распознавание двоичных образов, кодируемых в виде фазовых кластеров. Будут изучены характеристики процесса фазового кластерообразования.

В разделе 1 мы вводим в рассмотрение модель сети генераторов Ван-дер-Поля. Раздел 2 посвящен вопросу формирования в системе фазовых кластеров и «запоминанию» наперед заданных шаблонов. В разделе 3 рассматривается более общий случай фазово-амплитудных кластеров. В разделе 4 обсуждаются временные характеристики динамики системы. Раздел 5 посвящен функционированию сети при частично «испорченных» связях между элементами. В разделе 6 мы касаемся проблемы распознавания образов в изучаемой системе. В Заключении кратко сформулированы основные результаты работы. В Приложениях 1, 2 и 3 представлены доказательства некоторых вспомогательных утверждений.

1. Модель

Рассмотрим сеть, состоящую из N генераторов Ван дер Поля, связанных глобальной резистивной связью по току. Динамика такой сети описывается следующей системой

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} + \Omega_j^2 x_j = \mu \frac{dx_j}{dt} (1 - x_j^2) + \varepsilon \sum_{k=1}^N c_{jk} \left(\frac{dx_k}{dt} - \frac{dx_j}{dt} \right), \quad (1)$$

где $j = \overline{1, N}$, x_j - напряжение на выходе j -го генератора; $0 < \mu \ll 1$ - малый параметр; ε - положительный параметр, характеризующий силу связи между элементами; $C = \{c_{ij}\}$ - симметричная ($c_{jk} = c_{kj}$) матрица связи, формирующая архитектуру сети; Ω_j - частота колебаний в j -м элементе сети при $\varepsilon = 0$. Будем рассматривать динамику системы (1) в случае достаточно слабого взаимодействия ($\varepsilon = \mu d$) и малых частотных расстройках ξ_j между элементами ($\Omega_j = 1 + \mu \xi_j$). Как известно [8], в этом случае систему (1) можно усреднить по периоду быстрых осцилляций и перейти к

укороченным уравнениям для фаз и амплитуд

$$\begin{aligned} \frac{dr_j}{d\tau} &= \frac{r_j}{2}(1 - r_j^2) + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk} (r_k \cos(\phi_k - \phi_j) - r_j), \\ \frac{d\phi_j}{d\tau} &= \xi_j + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{r_j} c_{jk} \sin(\phi_k - \phi_j). \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tau = \mu t$, а r_j и ϕ_j - амплитуда и фаза j -го элемента, соответственно.

2. Фазовые кластеры и запоминание образов

Покажем, что в сети (2) могут быть сформированы так называемые фазовые кластеры (группы элементов с близкими значениями фаз), отвечающие наперед заданному шаблону. Рассмотрим сначала случай достаточно «слабых» связей между элементами. Пусть начальное распределение фаз колебаний генераторов ϕ_j будет произвольным, а амплитуды колебаний r_j в начальный момент удовлетворяют условию $r_j \geq r^-$ (см. Приложение 1, П.1.4). Поскольку эти начальные условия принадлежат бассейну притяжения области I (рис. 1), все траектории системы (2), «стартующие» с них, попадают за некоторое конечное время в область I и из нее не выходят. Нетрудно видеть, что при $\delta \rightarrow 0$ «размеры» инвариантной области I удовлетворяют условию

$$r^0 \rightarrow 1, \quad r^+ \rightarrow 1,$$

и, следовательно, можно считать, что $r_j \approx 1, j = \overline{1, N}$. В этом случае динамика системы (2) фактически определяется системой уравнений для фаз

$$\frac{d\phi_j}{d\tau} = \xi_j + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk} \sin(\phi_k - \phi_j). \quad (3)$$

Система (3) является градиентной, поскольку может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{d\phi_j}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \phi_j}, \quad (4)$$

где

$$U(\phi_1, \dots, \phi_N) = -\frac{d}{4} \sum_{j,k=1}^N c_{jk} \cos(\phi_k - \phi_j) - \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j. \quad (5)$$

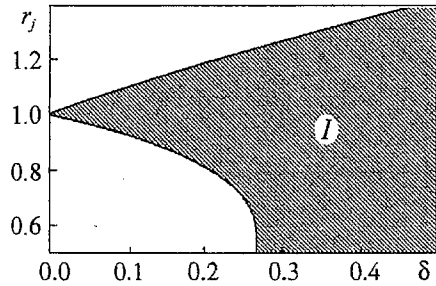


Рис. 1. Границы инвариантной области в зависимости от величины δ

В силу градиентности системы (3) при любых начальных условиях траектории системы (3) асимптотически стремятся к одному из устойчивых состояний равновесия, соответствующих локальным минимумам функции $U(\phi_1, \dots, \phi_N)$. Координаты каждого из состояний равновесия системы (3) определяют некоторое распределение фаз колебаний $\{\phi_j\}$.

Рассмотрим задачу о формировании в сети генераторов фазовых кластеров в соответствии с некоторым наперед заданным шаблоном. Пусть $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ - вектор-строка, элементы которой равны $\Psi_j = \pm 1$; данная строка может содержать некоторую информацию в двоичной кодировке. Например, это может быть черно-белый зрительный образ. Определим на множестве из N элементов, входящих в систему, два подмножества

$$\begin{aligned} S_p &= \{j = \overline{1, N} | \Psi_j = +1\}, \\ S_m &= \{j = \overline{1, N} | \Psi_j = -1\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Зададим матрицу связи c_{jk} так, чтобы при любых начальных условиях в сети (1) формировались два фазовых кластера, в один из которых входят только элементы с номерами $j \in S_p$, а в другой - только с $j \in S_m$, причем эти два кластера должны колебаться в противофазе. Для этого матрицу связи необходимо определить в соответствии с так называемым правилом Хебба [9]

$$c_{jk} = \frac{1}{N-1} \Psi_j \Psi_k. \quad (7)$$

2.1. Сеть тождественных генераторов. Рассмотрим сначала процесс формирования фазовых кластеров в случае отсутствия частотных расстроек между элементами ($\xi_j \equiv 0$). В Приложении 2 показано, что в этом случае потенциальная функция U (5) вида

$$U(\phi_1, \dots, \phi_N) = -\frac{d}{4(N-1)} \sum_{j,k=1}^N \Psi_j \Psi_k \cos(\phi_k - \phi_j)$$

имеет линию локальных минимумов

$$L = \left\{ \phi_j = \phi_0 + \frac{\pi}{2} \Psi_j, j = \overline{1, N}, \phi_0 \in R \right\}.$$

Состояния равновесия системы (3), соответствующие линии L , имеют $N-1$ отрицательных ляпуновских показателей и один нулевой, отвечающий этой линии. В этих состояниях равновесия фазы $\{\phi_j\}$ образуют требуемое распределение. При этом фазы $\{\phi_j\}$ образуют две группы с разностью фаз между ними π . Другими словами, сеть (1) распадается на две группы элементов, в одну из которых входят элементы с $j \in S_p$, $\phi_j = \phi_0 + \frac{\pi}{2}$, а в другую - с $j \in S_m$, $\phi_j = \phi_0 - \frac{\pi}{2}$. Следовательно, система (1) осуществляет запоминание образа (шаблона) Ψ в виде фазовых кластеров ¹.

¹Описанную динамику ансамбля качественно можно пояснить с точки зрения взаимодействия пар осцилляторов: пары с одинаковым значением Ψ_j имеют положительную связь c_{jk} и стремятся синхронизоваться в фазе, а с противоположными, соответственно, в противофазе. Важно, что «стремления» различных пар не противоречат друг другу, и существует только одно состояние, в котором все они удовлетворяются.

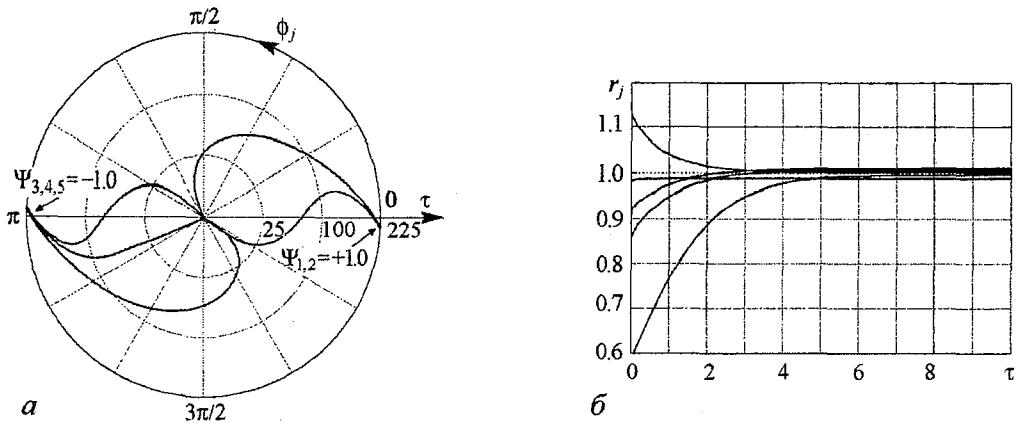


Рис. 2. Зависимость от времени фаз (а) и амплитуд (б) ансамбля идентичных генераторов. На графике 2, а в полярных координатах вдоль радиуса отложено время, а угловая координата соответствует фазам генераторов. $N = 5$, $\Psi = (+1, +1, -1, -1, -1)$, $d = 0.05$



Рис. 3. Формирование фазовых кластеров в ансамбле $N = 6536$ генераторов. Цветом обозначены фазы генераторов, для наглядности элементы выстроены в решетку 66×66 . Начальный (а), промежуточный (б) и конечный моменты времени (в)

Процесс образования фазовых кластеров иллюстрирует рис. 2, на котором представлены результаты численного моделирования системы (1) при случайных начальных условиях. В системе образуются два фазовых кластера (рис. 2, а), а амплитуды быстро достигают значений, близких к единице (рис. 2, б).

Совершенно аналогично происходит процесс фазового кластерообразования в сети из большого числа элементов. На рис. 3 представлены «мгновенные снимки» распределения фаз колебаний в последовательные моменты времени в сети из $N = 4356$ элементов. В качестве шаблона была выбрана картина Леонардо да Винчи «Мона Лиза», которая была закодирована бинарным способом. Для наглядности генераторы локализованы в узлах пространственной решетки.

2.2. Сеть генераторов в случае частотных расстройек. Пусть теперь в системе (3) присутствуют частотные расстройки. Для определенности предположим, что частоты собственных колебаний генераторов распределены в некотором интервале и $\zeta = \sup_j |\xi_j|$. Наличие расстройек может существенно повлиять на динамику системы и, в частности, на процесс кластерообразования. Значительная разница частот может привести к неправильным фазовым соотношениям в установившемся режиме

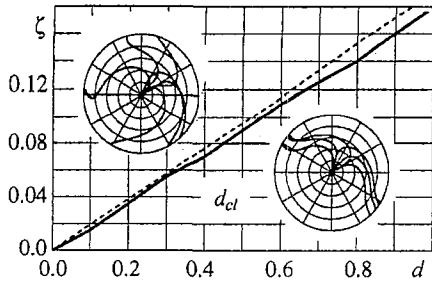


Рис. 4. Максимальная расстройка, при которой достигается формирование фазовых кластеров с разбросом не более $\delta\phi = \pi/8$, в зависимости от силы связи d . Сплошная линия - результаты численного счета, пунктирная - численная оценка. На полярных графиках приведены типичные зависимости $\phi(\tau)$ для случаев $\zeta < \zeta_{\max}$ и $\zeta > \zeta_{\max}$. $N = 6$

или к отсутствию синхронизации вообще. Отметим также, что в этом случае точное совпадение фаз ϕ_j внутри кластера невозможно и можно ожидать образования кластеров с некоторым внутренним разбросом фаз $\delta\phi$. Найдем условия на параметр ζ , при которых невозможно образование фазовых кластеров с внутренней разностью фаз не более $\delta\phi$ ($0 < \delta\phi < \pi/2$), таких что

$$\begin{aligned} |\phi_j - \phi^+| &\leq \frac{\delta\phi}{2}, & \Psi_j &= +1, \\ |\phi_j - \phi^-| &\leq \frac{\delta\phi}{2}, & \Psi_j &= -1, \\ |\phi^+ - \phi^-| &= \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку фазовые кластеры (8) соответствуют устойчивому состоянию равновесия системы (3), элементы должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{2(N-1)} \sum_{k=1}^N \Psi_j \Psi_k \sin(\phi_k - \phi_j) = \xi_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Оценим левые части системы (9) при условии (8)

$$\left| \frac{d}{2(N-1)} \sum_{k=1}^N \Psi_j \Psi_k \sin(\phi_k - \phi_j) \right| \leq \frac{d}{2(N-1)} \sum_{k=1}^N |\sin(\phi_k - \phi_j)| \leq \frac{d}{2} \sin \delta\phi.$$

Отсюда нетрудно видеть, что система (9) будет несовместной, если

$$\zeta > \frac{d}{2} \sin \delta\phi. \quad (10)$$

Таким образом, в области параметров, выделяемой неравенством (10), требуемые фазовые кластеры не существуют². Вне этой области параметров фазовые кластеры, в принципе, могут существовать даже при наличии в системе (3) расстройек ξ_j . На рис. 4 в плоскости параметров (d, ζ) численно построена область d_{cl} , для которой в сети из шести элементов происходит образование двух фазовых кластеров с внутренней разностью фаз не более $\delta\phi = \pi/8$ для случайно распределенных в интервале $|\xi_j| \leq \zeta$ расстройек и случайно заданного образа Ψ .

²Отсюда следует, в частности, что для $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$ фазовые кластеры вообще не существуют при $\zeta > \frac{d}{2}$, и элементы ансамбля колеблются с разными частотами

3. Фазово-амплитудные кластеры

Рассмотрим теперь динамику системы (2) при произвольных значениях коэффициента связи d . Предположим, что частотные расстройки отсутствуют, то есть $\xi_j = 0$. В этом случае ограничиться лишь фазовым описанием динамики нельзя, поскольку размеры инвариантной области I становятся существенными (см. рис. 1), и амплитуды колебаний элементов могут значительно отличаться от единицы, оказывая влияние на динамику фаз. Покажем, что для этих d в системе (2) возможно образование более сложных кластеров - фазово-амплитудных.

Пусть элементы сети по-прежнему взаимодействуют в соответствии с правилом Хебба (7). Будем искать решение системы (2) в виде двух фазово-амплитудных кластеров, то есть

$$r_j = \begin{cases} r_p, & \text{если } j \in S_p, \\ r_m, & \text{если } j \in S_m, \end{cases}$$

$$\phi_j = \begin{cases} \phi_p, & \text{если } j \in S_p, \\ \phi_m, & \text{если } j \in S_m. \end{cases}$$

Из (2) получаем систему для переменных $r_p, r_m, \Delta\phi$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dr_p}{d\tau} &= \frac{r_p}{2}(1 - r_p^2) + \frac{d}{2(N-1)}N_p(r_p + r_m), \\ \frac{dr_m}{d\tau} &= \frac{r_m}{2}(1 - r_m^2) + \frac{d}{2(N-1)}N_m(r_p + r_m), \\ \frac{d\Delta\phi}{d\tau} &= \frac{d}{2} \left(\frac{r_p}{r_m} + \frac{r_m}{r_p} \right) \sin \Delta\phi, \end{aligned} \quad (11)$$

где N_m и N_p - соответственно «размеры» множеств S_m и S_p , $\Delta\phi = \phi_p - \phi_m$. Можно показать, что для фиксированных N_m и N_p система (11) имеет единственное устойчивое состояние равновесия $O(r_p = r_p^*, r_m = r_m^*, \Delta\phi = \pi)$, принадлежащее инвариантной области I , где r_p^* и r_m^* - решения нелинейной системы следующего вида

$$\begin{aligned} (N-1)r_p(1 - r_p^2) + dN_p(r_p + r_m) &= 0, \\ (N-1)r_m(1 - r_m^2) + dN_m(r_p + r_m) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что в системе (12) r_p^* и r_m^* зависят не только от коэффициента связи d , но и от параметров N_p и N_m . На рис. 5 для сети из $N = 8$ элементов представлены значения r_p^* и r_m^* для двух значений параметра d , полученные путем численного решения системы (12).

На рис. 6 представлен процесс образования фазово-амплитудных кластеров в сети из восьми элементов для $d = 0.5$, $\Psi = (+1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Элементы сети делятся на две группы, имеющие различные амплитуды и фазы, соответствующие множествам S_p и S_m .

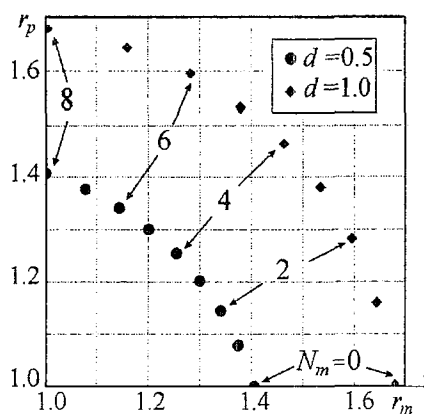


Рис. 5. Амплитуды фазово-амплитудных кластеров при $N = 8$. Каждая точка соответствует одному значению параметров N_m и d

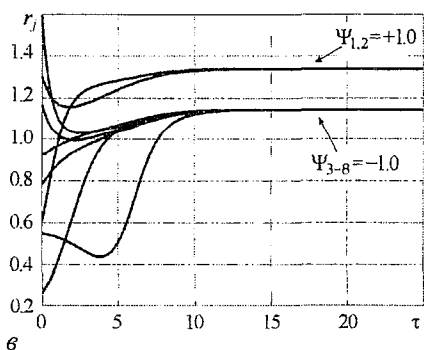
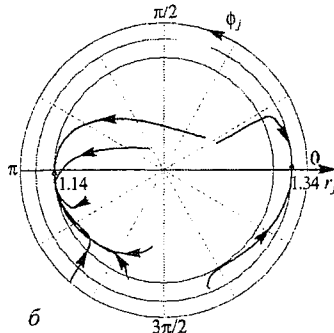
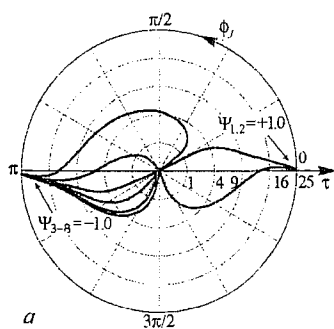


Рис. 6. Формирование фазово-амплитудных кластеров. *a* – зависимость фаз от времени, *б* – проекция фазового портрета системы на плоскость амплитуд и фаз, *в* – зависимость амплитуд от времени. $N = 8$, $\Psi = (+1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$, $d = 0.5$

4. Время ответа ансамбля

Процесс записи образа-шаблона с помощью системы (1) занимает определенное время. Для характеристики длительности этого процесса введем понятие времени ответа $\tau_{\delta\phi}$ ансамбля: назовем так время, за которое фазовые соотношения в ансамбле становятся соответствующими предъявленному образу Ψ с точностью до $\delta\phi$, то есть для любой пары j, k выполняются условия

$$\begin{aligned} |\phi_j - \phi_k| &< \delta\phi, & \text{если } \Psi_j = \Psi_k, \\ |\phi_j - \phi_k - \pi| &< \delta\phi, & \text{если } \Psi_j = -\Psi_k. \end{aligned}$$

Время ответа зависит от параметров системы и, очевидно, от начальных условий. На рис. 7 приведена зависимость среднего времени ответа системы $\tau_{\delta\phi}$ ($\delta\phi = \pi/8$) от коэффициента связи d для двух значений N . Усреднение проводилось по 8 реализациям со случайными начальными условиями. Видно, что зависимость среднего времени ответа от силы связи имеет вид, близкий к $\tau_{\delta\phi} \sim d^{-1}$. Поэтому для достаточно быстрой записи образа в сеть (1) необходимо обеспечить не слишком малый коэффициент связи между элементами. Заметим также, что при увеличении числа генераторов N время ответа возрастает. Однако, как показали результаты численного моделирования, размер системы N влияет на время ответа гораздо слабее, чем сила связи d .

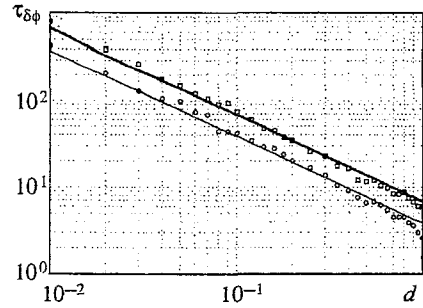


Рис. 7. Зависимость времени ответа системы от коэффициента связи, $\delta\phi = \pi/8$. Точками обозначены результаты усреднения трех реализаций со случайными начальными условиями, прямыми - аппроксимация вида $\tau_{\delta\phi} \approx d^{-1}$. $N = 4, 8$

5. Динамика сети с «поврежденными» связями

Рассмотрим динамику сети (1), в которой связи между некоторыми элементами отсутствуют ($c_{j'k'} = 0$). Несмотря на отсутствие части связей, за счет взаимодействия с оставшимися элементами элементы с поврежденными связями могут синхронизоваться, не нарушая структуры кластеров, соответствующих данному образу Ψ (см. сноску 2 на стр. 134). Можно утверждать, что синхронизация какого-либо элемента нарушится только в случае его полной изоляции от сети ($c_{j'k} = 0$ для всех k). Тогда, очевидно, j' -й элемент не попадет ни в один из формирующихся кластеров и, следовательно, требуемые фазовые соотношения не могут быть достигнуты.

Введем понятия степени повреждения ансамбля и качества его работы. Степенью повреждения s назовем отношение

$$s = \frac{L_{sp}}{L_{tot}},$$

где L_{sp} - число «поврежденных» связей, а $L_{tot} = N(N - 1)$ - полное число связей. Качеством работы q ансамбля назовем величину

$$q = \frac{N_{ph}}{N},$$

где N_{ph} - число генераторов, достигающее нужных фазовых соотношений. Как сказано выше, $N_{ph} = N - N_{is}$, где N_{is} - количество полностью изолированных элементов.

Пусть связи разрываются случайным образом. Можно показать, что при больших N зависимость $q(s)$ имеет вид (см. Приложение 3)

$$q = 1 - s^N. \tag{13}$$

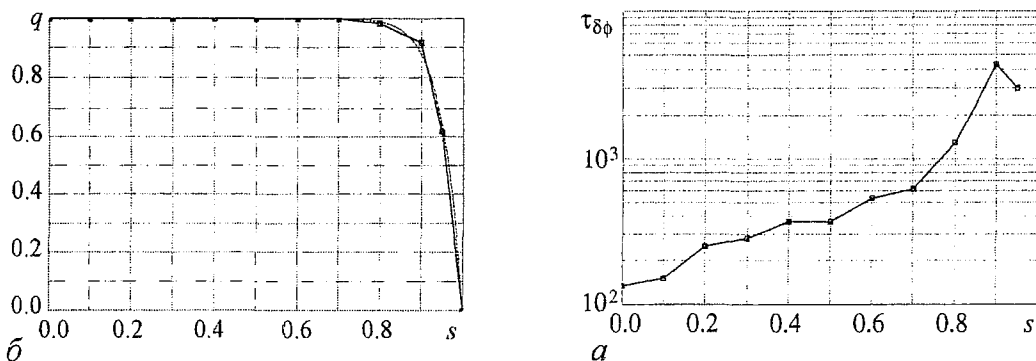


Рис. 8. *a* – качество работы $q(s)$. Сплошная линия - результаты численного моделирования, усредненные по 3 реализациям, пунктирная - аналитическая оценка; *б* – время ответа ансамбля $\tau_{\delta\phi}$ в зависимости от степени повреждения связей s . $N = 20, d = 0.1$

Отсюда следует, что чем больше значение N , тем выше надежность системы. Например, для снижения качества работы ансамбля из 20 генераторов на 10% в нем необходимо разорвать около 90% связей. Такой результат достигается из-за избыточности связей в сети, так как каждый элемент в ней связан с каждым другим.

На рис. 8, *a* приведены результаты численного моделирования системы (1),(7) при случайном разрывании связей. Эти результаты хорошо согласуются с оценкой (13). Отметим также, что «испорченная» система характеризуется большим временем ответа, чем исходная³ (рис. 8, *б*).

6. Ансамбль в режиме распознавания образов

В разделе 2 мы рассмотрели систему (1) в режиме запоминания заданного бинарного образа, когда матрица связи задавалась по правилу Хебба (7). В этом случае динамика ансамбля характеризуется наличием единственного аттрактора, а именно: предельного цикла, отвечающего синхронным колебаниям генераторов с определенными фазовыми соотношениями. Однако, если определить связи между элементами по-другому, система может выполнять и иную функцию, а именно: распознавать зашумленные образы из некоторого набора. Так, пусть имеется M различных бинарных образов $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(M)}$, а нас интересует, какому из них соответствует какой-либо искаженный образ Ψ^* . Пусть матрица связи задана следующим образом:

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^M \frac{1}{N-1} \Psi_j^{(l)} \Psi_k^{(l)}. \quad (14)$$

Тогда при небольшом числе M в системе (3) существует уже не одно, а M устойчивых состояний равновесия, каждое из которых отвечает формированию кластеров, определяемых одним из образов $\Psi^{(l)}$. В этом случае в зависимости от начальных условий система придет в одно из этих состояний равновесия. Следовательно, неизвестный образ Ψ^* может быть распознан, если отвечающие ему начальные усло-

³Для «испорченной» системы время ответа определялось по достижению нужных фазовых соотношений между неизолированными генераторами.

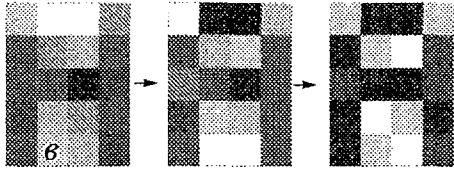
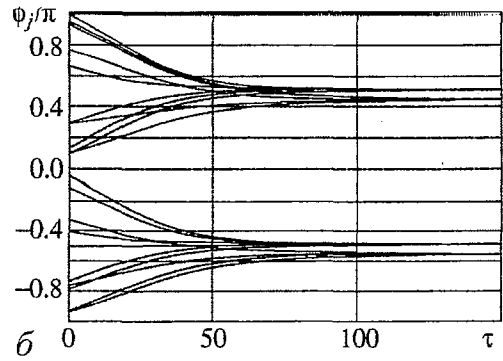
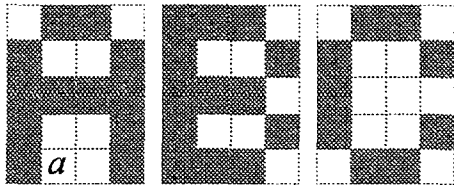


Рис. 9. Динамика ансамбля $N = 20$ генераторов с $M = 3$ записанными образами. a – записанные образы; b – зависимость фаз генераторов от времени; c – оттенками серого обозначены фазы генераторов в начальный, промежуточный и конечный моменты времени

вия принадлежат области притяжения соответствующего образа из «библиотеки» системы.

На рис. 9 представлена динамика системы (1),(14) при $N = 20, M = 3$. В матрицу связи записаны бинарные образы, соответствующие первым трем буквам латинского алфавита (рис. 9 a). Ансамбль формирует фазовые кластеры, соответствующие образу буквы «А» (рис. 9 c), к которому были наиболее близки начальные условия, то есть в зашумленном образе распознает один из наперед заданного набора.

Заключение

В работе исследована динамика ансамбля генераторов Ван дер Поля с глобальной резистивной связью. Показано, что основным эффектом фазовой динамики системы является формирование фазовых кластеров, определяемых матрицей связи. Учет амплитудной динамики позволил получить более сложные фазово-амплитудные кластеры, которые проявляются при достаточно большом коэффициенте связи d . Интерпретируя распределение генераторов по двум кластерам как некую информацию в двоичном коде, можно осуществлять с помощью предложенной системы запись, хранение и распознавание бинарных информационных образов. Указан вид матрицы связи, при которой можно добиться выполнения ансамблем этих функций.

Исследованы характеристики динамики ансамбля и показано, что она является достаточно устойчивой как к расстройке параметров отдельных элементов, так и к частичному повреждению связей между ними. Если эти нарушения не превышают некоторого порога, функционирование системы существенно не меняется.

К недостаткам изученной системы следует отнести достаточно малую емкость «библиотеки» в режиме распознавания. Емкостью назовем максимальное число образов $M_{\max}(N)$, при котором сеть функционирует правильно. При увеличении M

проявляется несколько нежелательных эффектов. Во-первых, это появление так называемых «паразитных» аттракторов, не соответствующих ни одному образу из набора $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(M)}$. Во-вторых, при увеличении M происходит потеря устойчивости некоторых состояний равновесия, отвечающих образам из «библиотеки», что приводит к невозможности эти образы распознать [6].

Работа поддержана грантом РФФИ №03-02-17135, грантом Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и их руководителей МК-4586.2004.2, грантом CRDF (программа BRHE, REC-006), Фондом содействия отечественной науке.

Приложение 1

Существование инвариантной области

Покажем существование в фазовом пространстве системы (2) инвариантной области. Пусть $R = \sup_j r_j$. В силу (2) имеем

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{R}{2}(1 - R^2) + \frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk}(r_k \cos(\phi_k - \phi_j) - R) \leq \frac{R}{2}(1 - R^2) + Rd(N - 1) \sup_{j,k} c_{jk}. \quad (\text{П.1.1})$$

Из (П.1.1) нетрудно получить, что

$$\frac{dR}{d\tau} \leq 0, \quad \text{если } R \geq r^0, \quad (\text{П.1.2})$$

где $r^0 = \sqrt{1 + 2\delta}$, $\delta = d(N - 1) \sup_{j,k} c_{jk}$. Отсюда вытекает, что при τ , превышающем некоторое конечное значение τ_0 , амплитуды колебаний генераторов удовлетворяют неравенствам

$$r_j(t) \leq r^0, \quad j = \overline{1, N} \quad (\text{П.1.3})$$

Будем рассматривать область параметров, выделяемую условием $\gamma < 1$, где $\gamma = 3\delta r^0$ (данное условие имеет место при $\delta < \delta_0 \approx 0.2688$). Покажем теперь, что

$$\frac{dr_j}{d\tau} \geq 0, \quad \text{если } r_j \in [r^-, r^+], \quad (\text{П.1.4})$$

где

$$r^- = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right), \quad r^+ = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \theta = \arccos \gamma.$$

Действительно, принимая во внимание (П.1.3), получаем, что

$$\frac{d}{2} \sum_{k=1}^N c_{jk}(r_k \cos(\phi_k - \phi_j) - r_j) \geq -d(N - 1) \sqrt{1 + 2\delta} \sup_{j,k} c_{jk} = -\delta r^0. \quad (\text{П.1.5})$$

Тогда, используя (П.1.5), из (2) получаем

$$\frac{dr_j}{d\tau} \geq \frac{r_j}{2}(1 - r_j^2) - \delta r^0. \quad (\text{П.1.6})$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в правой части (П.1.6), является неотрицательной при $r_j \in [r^-, r^+]$ и, следовательно, условие (П.1.4) действительно выполняется.

Таким образом, при $\gamma < 1$ одновременно выполняются условия (П.1.3) и (П.1.4). Поскольку $r^+ < R^0$, выполнение этих условий означает, что на границе области

$$I = \{\phi_j, r_j | \phi_j \in S^1, r^+ < r_j < r^0\}$$

векторное поле системы (2) ориентировано внутрь этой области. Следовательно, I - инвариантная область системы (2).

Приложение 2

Докажем, что функция

$$U(\phi_1, \dots, \phi_N) = - \sum_{j,k=1}^N \Psi_j \Psi_k \cos(\phi_k - \phi_j) \quad (\text{П.2.1})$$

имеет минимум только в точках $\phi_j = \phi_0 + \frac{\pi}{2} \Psi_j$, где ϕ_0 - произвольное число. Сделаем замену переменных

$$\varphi_j = \phi_j - \phi_1 + \frac{\pi}{2}(\Psi_j - \Psi_1), \quad j = \overline{1, n},$$

тогда (П.2.1) переписывается в виде

$$U = - \sum_{j,k=1}^N \cos(\varphi_k - \varphi_j) = -S_s^2 - S_c^2, \quad (\text{П.2.2})$$

где

$$S_c = \sum_{j=1}^N \cos \varphi_j, \quad S_s = \sum_{j=1}^N \sin \varphi_j$$

Запишем необходимые условия минимума функции $U(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_j} = 2(S_c \sin \varphi_j - S_s \cos \varphi_j) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (\text{П.2.3})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_j^2} = 2(S_c \cos \varphi_j + S_s \sin \varphi_j) > 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (\text{П.2.4})$$

Отметим, что обе суммы S_c и S_s не могут одновременно быть нулевыми, иначе не выполняется (П.2.4), следовательно, из (П.2.3) все тангенсы $\tan \varphi_j$ равны между собой. Но $\varphi_1 = 0$, значит $\tan \varphi_j = 0$, и $\varphi_j = 0$ или $\varphi_j = \pi$. Тогда (П.2.4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_j^2} = 2S_c \cos \varphi_j > 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (\text{П.2.5})$$

Неравенства (П.2.5) выполняются для любого j , следовательно, $S_c > 0$, $\cos \varphi_j > 0$ и точка $O(\varphi_j = 0)$ является единственным минимумом функции U (П.2.2). В исходных переменных это соответствует утверждению, которое необходимо доказать.

Найдем вероятность P_{is} полной изоляции какого-либо элемента сети (1) при разрывании в нем L_{sp} связей. Для изоляции надо разорвать $(N - 1)$ определенных связей, а всего их $L_{tot} = N(N - 1)$, следовательно

$$P_{is} = \frac{C_{L_{tot}-N+1}^{L_{sp}-N+1}}{C_{L_{tot}}^{L_{sp}}} = \frac{(L_{tot} - N + 1)! L_{sp}!}{(L_{sp} - N + 1)! L_{tot}!}. \quad (\text{П.3.1})$$

Очевидно, что при малом числе изолированных генераторов среднее их количество $\langle N_{is} \rangle = NP_{is}$, следовательно,

$$q = 1 - P_{is}. \quad (\text{П.3.2})$$

Упростим выражение (П.3.1) в случае больших N . Нетрудно видеть, что

$$P_{is} = \frac{L_{sp}(L_{sp} - 1)\dots(L_{sp} - N + 2)}{L_{tot}(L_{tot} - 1)\dots(L_{tot} - N + 2)} = \prod_{k=0}^{N-2} \frac{L_{sp} - K}{L_{tot} - K}. \quad (\text{П.3.3})$$

Каждый сомножитель в (П.3.3) равен

$$\frac{L_{sp} - K}{L_{tot} - K} = s - \frac{(1 - s)K}{L_{tot} - K}. \quad (\text{П.3.4})$$

Прологарифмируем (П.3.3) с учетом (П.3.4), заменяя приближенно суммы интегралами,

$$\begin{aligned} \ln P_{is} &= \sum_{k=0}^{N-2} \ln(L_{sp} - K) - \sum_{k=0}^{N-2} \ln(L_{tot} - K) \approx \int_{L_{sp}-N+2}^{L_{sp}} \ln NdN - \int_{L_{tot}-N+2}^{L_{tot}} \ln NdN \approx \\ &\approx L_{sp} \ln L_{sp} - (L_{sp} - N) \ln(L_{sp} - N) - L_{tot} \ln L_{tot} + (L_{tot} - N) \ln(L_{tot} - N) \approx \\ &\approx N(\ln L_{sp} - \ln L_{tot}) = N \ln s. \end{aligned} \quad (\text{П.3.5})$$

Подставляя (П.3.5) в (П.3.2), получим

$$q = 1 - s^N.$$

Библиографический список

1. *Hopfield I.I.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1982. № 79. P. 2554-2558.
2. *Hopfield I.I.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1984. № 81. P. 3088-3092.
3. *Hopfield I.I., Tank D.V.* Neural computation of decisions in optimization problems //Biol. Cibern. 1985. Vol. 52, № 3. P. 141-153.
4. *Hoppensteadt Frank C. and Izhikevich Eugene M.*// Physical Review Letters, 5 April 1999. Vol. 82, № 14. P. 2983-2986.
5. *Baird B., Eeckman F.* A normal form projection algorithm for associative memory // in: Associative Neural Memories / Ed. Hasson M.H. NY, Oxford: OVP, 1933, 350 p.

6. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
7. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002.
8. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 408 с.
9. *Hebb D.O.* The Organization of Behavior. New York, 1949.

*Институт прикладной физики РАН
Нижний Новгород
Нижегородский государственный
университет*

Поступила в редакцию 29.12.2004

PHASE-AMPLITUDE CLUSTERS IN ENSEMBLE OF VAN DER POL GENERATORS

V.V. Klinshov, V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin

Collective dynamics of an ensemble of globally coupled Van der Pol generators is investigated. The formation of phase-amplitude clusters according to a given stimulus is studied. The clusters appear as two groups of generators oscillating in opposite phase. The effect can be used for various information processing functions, including input, storage and recognition of binary images.



Клиньшов Владимир Викторович - родился в 1984 году в Нижнем Новгороде, учится в магистратуре Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Область научных интересов - теория нелинейных колебаний и волн, нейродинамика.



Некоркин Владимир Исаакович - родился на Украине в 1948 году, окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета (1971). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1981, ННГУ) и доктора физико-математических наук (1992, СГУ). С 1971 года работал в Нижегородском институте прикладной математики, с 1983 по 1986 год в Нижегородском политехническом институте, с 1986 года и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ, профессор. Область научных интересов - теория колебаний и волн, структурообразование и нелинейные волны в непрерывных и дискретных средах, синхронизация и пространственно-временной хаос. Имеет более 100 научных публикаций в указанных направлениях, соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора читал лекции в Мадридском и Стэнфордском университетах. Работал в Калифорнийском университете.