



## НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПОДХОДЫ К АНАЛИЗУ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ\*

*А.А. Короновский, О.И. Москаленко, П.В. Попов, А.Е. Храмов*

Исследуется синхронизация связанных хаотических осцилляторов. Предложенные новые подходы для выявления синхронного поведения осцилляторов применяются для изучения хаотической синхронизации как в системах с конечным числом степеней свободы, так и в распределенных автоколебательных системах.

### Введение

Синхронизация хаотических колебаний является одним из фундаментальных явлений нелинейной теории колебаний и волн. Она проявляется в системах различной природы, например, в физических [1–8] и биологических [9–14] системах. В настоящее время выделяют несколько основных типов синхронизации связанных хаотических осцилляторов, которые изучались (и изучаются) как теоретически, так и экспериментально [15–18].

Режим *lag-синхронизации* хаотических осцилляторов со слегка различающимися значениями управляющих параметров реализуется, когда колебания в одной системе отстают от колебаний в другой на некоторый временной сдвиг  $\tau$ :  $x_1(t + \tau) \cong x_2(t)$ . С увеличением параметра связи между хаотическими системами временной сдвиг  $\tau$  уменьшается и стремится к нулю, а синхронный режим стремится к режиму *полной синхронизации* [19–21], означающему совпадение векторов  $x_1(t) \cong x_2(t)$ , характеризующих поведение рассматриваемых хаотических динамических систем [22–25].

*Обобщенная синхронизация* [26–28], введенная в рассмотрение для односторонне связанных динамических систем, означает, что существует некоторая функциональная зависимость между состояниями хаотических осцилляторов, то есть  $x_2(t) = F[x_1(t)]$ .

\*Статья написана по материалам доклада на VII Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур», 1–6 октября 2004, Саратов, Россия.

Наконец, необходимо назвать *фазовую синхронизацию*. Для определения режима фазовой синхронизации вводится в рассмотрение мгновенная фаза  $\phi(t)$  хаотического сигнала [15–18, 29, 30]. Фазовая синхронизация означает, что в рассматриваемой системе связанных осцилляторов имеет место совпадение фаз хаотических сигналов, в то время как их амплитуды остаются независимыми.

Также на границах различных типов хаотической синхронизации наблюдаются особые типы перемежающегося синхронного поведения, в частности, перемежающиеся lag– [31] и обобщенная [32] синхронизации.

Все вышеназванные типы синхронизации хаотических осцилляторов взаимосвязаны друг с другом [2, 20, 26, 33], однако полной ясности в этом вопросе до сих пор нет. Для каждого типа хаотической синхронизации существуют свои способы определения факта установления синхронного режима колебаний. Так, режим lag–синхронизации может быть выявлен с помощью функции подобия [19]

$$S^2(\tau) = \frac{\langle |\mathbf{x}_2(t + \tau) - \mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle \langle |\mathbf{x}_1(t)|^2 \rangle}}. \quad (1)$$

Если в рассматриваемой системе связанных осцилляторов реализуется режим lag–синхронизации, то функция подобия  $S(\tau)$  принимает минимальное значение  $\sigma = \min_{\tau} S(\tau) = 0$  для величины  $\tau$ , соответствующей временному сдвигу между векторами состояния. Понятно, что функция подобия может быть использована и для диагностирования режима полной синхронизации. В этом случае  $S(\tau)$  обращается в ноль при  $\tau = 0$ . Режим полной синхронизации также можно определить непосредственным сравнением векторов состояний взаимодействующих систем  $\mathbf{x}_1(t)$  and  $\mathbf{x}_2(t)$ . Случай режима обобщенной синхронизации более сложный, поскольку функциональная зависимость  $F[\cdot]$ , связывающая между собой вектора состояния ведущей и ведомой подсистем, может быть весьма сложной. Однако и здесь существуют методы, позволяющие определить явление синхронизации однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, например, метод вспомогательной системы [34] или метод ближайших соседей [26, 35]. Режим обобщенной синхронизации может быть также диагностирован с помощью расчета старшей условной ляпуновской экспоненты связанной системы [36].

Наконец, фазовая синхронизация двух связанных хаотических осцилляторов имеет место в том случае, если разность мгновенных фаз  $\phi(t)$ , введенных для хаотических сигналов  $\mathbf{x}_{1,2}(t)$  тем или иным способом, остается ограниченной во времени

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \text{const}. \quad (2)$$

Возможно определить среднюю частоту

$$\bar{\Omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t} = \langle \dot{\phi}(t) \rangle, \quad (3)$$

которая должна быть одинаковой для обеих хаотических систем. Таким образом, захват фаз влечет за собой совпадение частот. При этом средняя частота  $\bar{\Omega}$ , определенная из динамики мгновенной фазы  $\phi(t)$  хаотического сигнала, должна совпадать с основной частотой  $\Omega_0 = 2\pi f_0$  фурье–спектра. При невыполнении этого условия полученные результаты не могут считаться корректными (более подробно см. [37]).

К сожалению, не существует универсального способа введения мгновенной фазы хаотического сигнала. Для «хороших» динамических систем с относительно простой топологией хаотического аттрактора, фурье-спектр которых содержит одну основную частотную компоненту<sup>1</sup>  $f_0$ , существует несколько методов, позволяющих определить мгновенную фазу  $\phi(t)$  хаотического сигнала. Прежде всего, фаза  $\phi$  хаотического сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости  $(x, y)$  [19, 38]

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} \text{ или } \phi = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad (4)$$

но при этом все траектории проекции хаотического аттрактора на плоскости  $(x, y)$  (или плоскости  $(\dot{x}, \dot{y})$ ) должны вращаться вокруг начала координат. Иногда возможно использовать преобразование координат, чтобы получить подходящую для введения фазы проекцию [15, 38]. Другим способом определения фазы для хаотической динамической системы является введение в рассмотрение аналитического сигнала [17, 29]

$$\zeta(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) = A(t)e^{j\phi(t)}, \quad (5)$$

где функция  $\tilde{x}(t)$  является преобразованием Гильберта временной реализации  $x(t)$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (6)$$

(P.V. в соотношении (6) означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения). Соответственно фаза  $\phi(t)$  хаотического сигнала  $x(t)$  определяется из соотношений (5) и (6). Наконец, для определения фазы хаотического сигнала может быть использована поверхность сечения Пуанкаре [17, 29], так что фаза определяется как

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (7)$$

где  $t_n$  – момент времени, соответствующий  $n$ -му пересечению поверхности сечения Пуанкаре фазовой траекторией. Кроме этого, мгновенная фаза хаотического сигнала может быть введена с помощью вейвлетного преобразования [39], однако при этом должны быть соответствующим образом подобраны вид и параметры вейвлетной функции [40].

Все вышеописанные «классические» подходы дают сходные корректные результаты для «хороших» систем [38]. В то же самое время, эти методы часто приводят к некорректным результатам для систем с плохо определенной фазой (см., например, [15, 37]). Вследствие этого, диагностика режима фазовой синхронизации подобных систем, как правило, затруднена. Иногда наличие фазовой синхронизации может быть выявлено с помощью косвенных наблюдений [38, 41] и измерений [42].

В работах [43–48] были предложены новые подходы детектирования режимов хаотической синхронизации связанных хаотических осцилляторов. Для описания сложных хаотических динамических систем, в фурье-спектре которых отсутствует одна ярко выраженная компонента, предлагается анализировать поведение системы на различных временных масштабах (анализировать синхронизацию отдельных

<sup>1</sup>Пример хаотического аттрактора и спектра такой «хорошей» системы рассмотрен ниже.

компонент в спектре). Это позволяет рассматривать различные виды хаотической синхронизации с единых позиций.

В представленной работе проводится систематическое рассмотрение предложенных подходов применительно к изучению совместной динамики, включая явление хаотической синхронизации в связанных динамических системах с малым числом степеней свободы и распределенных автоколебательных системах. Также в работе обсуждаются некоторые общие закономерности установления режимов хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы.

Структура настоящей работы следующая: раздел 1 посвящен диагностированию синхронизации временных масштабов [44] и рассмотрению эффективности этого метода на примере систем с малым числом степеней свободы. Раздел 2 посвящен другому способу диагностирования режима хаотической синхронизации – через исследование синхронизации отдельных спектральных компонент связанных хаотических систем. В разделе 3 изучается синхронизация временных масштабов в распределенных автоколебательных средах. В Заключении представлены выводы и замечания.

## 1. Синхронизация временных масштабов

Одним из новых и, на наш взгляд, перспективных подходов к диагностированию хаотической синхронизации является подход, основанный на концепции синхронизации временных масштабов [43, 44, 48], которая заключается в следующем. Для некоторого исследуемого сигнала  $g(t)$ , который, как предполагается, порождается некоторой колебательной системой (это может быть некоторая модельная динамическая система, экспериментальный временной ряд физической, биологической и т.п. системы), вводятся временные масштабы  $s$ , соответствующие частотам  $f$  фурье-спектра, и ассоциированные с ними фазы  $\phi_s(t)$ .

Последнее означает, что для хаотического сигнала рассматривается некоторое непрерывное семейство фаз  $\phi_s(t)$ , которые характеризуют его поведение на различных временных масштабах. Как будет показано далее, любой тип синхронного поведения хаотических осцилляторов будет приводить к тому, что во временных реализациях  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  взаимодействующих систем обязательно будут присутствовать временные масштабы, на которых будет выполняться условие захвата фаз, аналогичное (2).

Для введения подобного непрерывного множества фаз возможно использовать непрерывное вейвлетное преобразование с комплексным базисом [49–52]. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

**1.1. Определение семейства фаз хаотической системы с помощью непрерывного вейвлетного преобразования.** Непрерывное вейвлетное преобразование [49–55] временного ряда  $x(t)$  осуществляется при помощи свертки

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (8)$$

где  $\Psi_{s,t_0}(t)$  – вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета  $\Psi_0(t)$ :

$$\Psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (9)$$

Временной масштаб  $s$  определяет ширину вейвлета  $\Psi_{s,t_0}(t)$ ,  $t_0$  – временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени, символ «\*» в соотношении (8) означает комплексное сопряжение. Следует отметить, что при проведении вейвлетного анализа понятие «временной масштаб», как правило, используется вместо понятия «частота», традиционного для фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета был использован вейвлет Морле [56]

$$\Psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right) \quad (10)$$

Выбор значения параметра вейвлета  $\Omega_0 = 2\pi$  обеспечивает соотношение  $s = 1/f$  между временным масштабом  $s$  вейвлетного преобразования и частотой  $f$  преобразования Фурье [49, 54].

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| \exp(j\phi(s, t_0)) \quad (11)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t_0$ . Величина  $|W(s, t_0)|$  характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба  $s$  в момент времени  $t_0$ . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (12)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (13)$$

распределения энергии по временным масштабам.

В то же самое время, естественным образом оказывается определенной фаза

$$\phi_s(t) = \phi(s, t_0) = \arg W(s, t) \quad (14)$$

для каждого временного масштаба  $s$ . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба  $s$  с помощью ассоциированной с ним фазы  $\phi_s(t)$ .

Если существует некоторый диапазон временных масштабов  $[s_1; s_2]$ , такой, что для любого временного масштаба  $s \in [s_1; s_2]$  выполняется условие захвата фаз

$$|\phi_{s_1}(t) - \phi_{s_2}(t)| < \text{const} \quad (15)$$

и доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля

$$E_{\text{синх}} = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s) \rangle ds > 0, \quad (16)$$

то временные масштабы  $s \in [s_1; s_2]$  являются синхронизованными, а хаотические осцилляторы находятся в режиме *синхронизации временных масштабов* [44, 48]. В соотношении (15)  $\phi_{s_{1,2}}(t)$  – непрерывные фазы первого и второго осцилляторов, соответствующие синхронизованным временным масштабам  $s$ .

В том случае, если взаимодействующие осцилляторы находятся в режиме хаотической синхронизации, временные реализации  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  обязательно содержат некоторый диапазон временных масштабов  $\Delta s$ , в которых фазы синхронизованы друг с другом. Для того, чтобы обнаружить синхронизацию временных масштабов, необходимо проверить выполнение условий (15) и (16).

Рассмотрим некоторые примеры использования вышеизложенного подхода к анализу различных синхронных режимов связанных хаотических осцилляторов с малым числом степеней свободы.

**Пример 1. Фазовая синхронизация двух связанных систем Ресслера.** Анализ фазовой синхронизации и ее связь с синхронизацией временных масштабов обобщается подробно в работах [44, 48, 57].

В качестве модели в работе [48] рассматривалась система двух взаимно связанных систем Ресслера со слегка отличающимися параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $a = 0.165$ ,  $p = 0.2$  и  $c = 10$ . Управляющие параметры  $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta$  определяют расстройку параметров, а  $\varepsilon$  является параметром связи. В работе [19] было показано, что при выбранных значениях управляющих параметров и значении параметра связи  $\varepsilon = 0.05$  в рассматриваемой системе наблюдается фазовая синхронизация.

Для рассматриваемого случая мгновенная фаза хаотического сигнала может быть весьма просто введена с помощью одного из вышеупомянутых традиционных способов (4)–(7). Хаотический аттрактор обладает весьма простыми топологическими свойствами: проекция аттрактора на плоскость  $(x, y)$  похожа на сильно «размазанный» предельный цикл, изображающая точка при этом всегда вращается вокруг начала координат (рис. 1, а). Фурье-спектр содержит один основной пик на частоте  $f_0 \simeq 0.163$ , которая совпадает со средней частотой  $\bar{f} = \bar{\Omega}/2\pi$ , определяемой из поведения мгновенной фазы  $\phi(t)$  с помощью соотношения (3). При этом выполняется критерий эффективности введения фазы, рассмотренный в [37]. Понятно, что в данном случае не возникает никаких сложностей с установлением факта фазовой синхронизации взаимно связанных систем Ресслера (17) с помощью традиционных методов анализа фазовой синхронизации.

Метод, основанный на введении семейства фаз хаотического сигнала, показывает, что временные масштабы  $s_1 = s_2 = s_0 = 1/f_0 \simeq 6$  обеих хаотических систем, соответствующие частотам  $\bar{\Omega}_{1,2}$ , синхронизованы друг с другом, а фазы  $\phi_{s_{1,2}}(t)$ , ассоциированные с этими временными масштабами, оказываются захваченными, что приводит к выполнению условия (15). Временные масштабы, близкие к временному масштабу  $s_0$ , также синхронизованы, однако диапазон временных масштабов, демонстрирующих синхронную динамику, зависит от величины связи между системами.

В то же самое время существуют такие временные масштабы, которые остаются несинхронизованными. Именно эти временные масштабы определяют различие в поведении связанных хаотических систем.

Поведение различных временных масштабов двух связанных систем Ресслера (17) при  $\epsilon = 0.05$  иллюстрирует рис. 1, б. Отчетливо видно, что разность фаз  $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$  на временном масштабе  $s_0 = 6$  ограничена для всех значений времени, а временные масштабы  $s_0 = 6$  обеих систем, соответствующие основной частоте Фурье-спектра  $f_0$ , синхронизованы друг с другом. Важно также отметить, что спектры мощности  $\langle E_{1,2}(s) \rangle$  вейвлетного преобразования близки друг к другу и временные масштабы  $s$ , близкие к основному временному масштабу  $s_0$ , которые характеризуются наибольшим значением энергии (например, временной масштаб  $s = 5$ ), также синхронизованы друг с другом. Одновременно существуют временные масштабы, такие как  $s = 3.0$ ,  $s = 4.0$ , и т.п., динамика которых остается несинхронизованной.

Таким образом, если для взаимно связанных хаотических осцилляторов удастся ввести единственную мгновенную фазу  $\phi(t)$  и в системе с ростом параметра связи возникает режим фазовой синхронизации, то одновременно в системе будет наблюдаться и синхронизация временных масштабов.

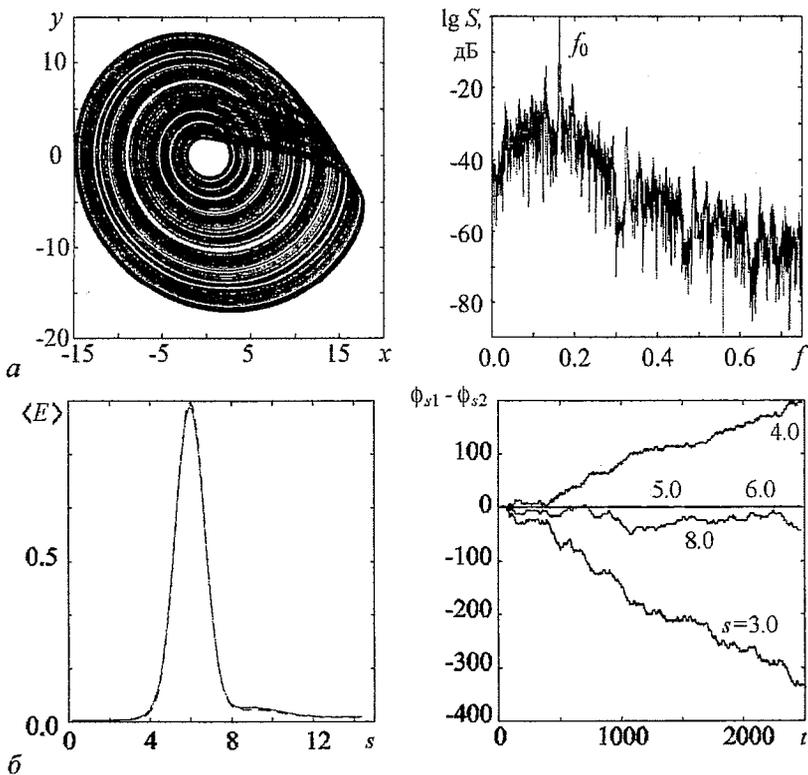


Рис. 1. а – хаотический аттрактор и спектр системы Ресслера (17) при  $\epsilon = 0$ ; б – нормированный вейвлетный спектр мощности  $\langle E(s) \rangle$  первой (сплошная линия) и второй (штриховая линия) систем Ресслера (17), зависимость разности фаз от времени  $t$  для различных временных масштабов  $s$  при  $\epsilon = 0.05$

**Пример 2. Синхронизация двух связанных систем Ресслера с плохо определенной фазой.** Рассмотрим теперь более сложную задачу, когда корректно ввести мгновенную фазу  $\phi(t)$  хаотического сигнала  $x(t)$  с помощью традиционных методов (4)–(7) невозможно. Понятно, что в этом случае определить наличие фазовой синхронизации с помощью (2) невозможно, а следовательно, необходимо для диагностики хаотической синхронизации использовать другие, более сложные методы (например, с помощью косвенных измерений [42]). В то же самое время подход, основанный на анализе фазовой динамики временных масштабов, позволяет также просто и эффективно установить факт наличия хаотической синхронизации между системами, как и для ранее рассмотренного в п. 1.1. случая системы с хорошо определенной фазой хаотического сигнала.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим две неидентичных взаимно связанных системы Ресслера с плохо определенной фазой (рис. 2, а):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\varepsilon$  – параметр связи,  $\omega_1 = 0.98$ ,  $\omega_2 = 1.03$ . Значения управляющих параметров по аналогии с работой [42] выбраны следующими:  $a = 0.22$ ,  $p = 0.1$ ,  $c = 8.5$ . Там же с

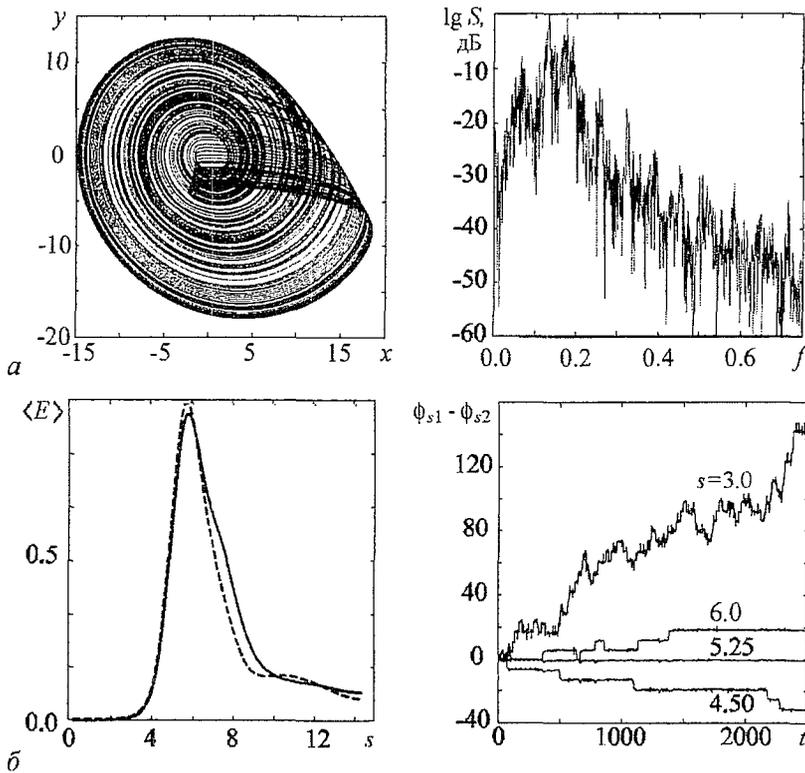


Рис. 2. а – хаотический аттрактор и спектр системы Ресслера (18) при  $\varepsilon = 0$ ; б – нормированный вейвлетный спектр мощности  $\langle E(s) \rangle$  для первой (сплошная линия) и второй (штриховая линия) систем Ресслера (18), зависимость разности фаз на различных временных масштабах  $s$  от времени  $t$  при  $\varepsilon = 0.05$

помощью метода косвенных измерений было показано, что при значении параметра связи  $\varepsilon = 0.05$  в системе двух связанных систем Ресслера (18) с плохо определенной фазой имеет место хаотическая синхронизация. Анализ поведения временных масштабов дает аналогичный результат (см. подробнее работы [44, 48]): для временных масштабов  $s = 5.25$ , характеризующихся наибольшим значением энергии в вейвлетном спектре  $\langle E(s) \rangle$  наблюдается захват фаз (рис. 2, б), а следовательно, эти временные масштабы синхронизованы друг с другом. Одновременно, ряд других масштабов (например,  $s = 4.5, 6.0$  и др.) остаются несинхронизованными, и, соответственно, разность фаз на этих масштабах с течением времени возрастает неограниченно.

Таким образом, анализ поведения различных временных масштабов однозначно свидетельствует о синхронизации связанных хаотических осцилляторов с плохо определенной фазой (18). Очевидно, что механизм возникновения явления синхронизации остается тем же самым, что и в ранее рассмотренном случае (см. п. 1.1.). Синхронизация хаотических осцилляторов обусловлена существованием временных масштабов  $s$ , на которых динамика обеих систем синхронна. Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемой системе невозможно корректно определить мгновенную фазу  $\phi(t)$  хаотического сигнала, с помощью введенного семейства фаз  $\phi_s(t)$  в данном случае можно говорить о существовании режима синхронизации временных масштабов.

**Пример 3. Обобщенная синхронизация системы Ресслера и системы Лоренца.** Перейдем теперь к рассмотрению другого типа синхронного поведения хаотических осцилляторов – обобщенной синхронизации. В качестве примера ведущего хаотического осциллятора выбрана система Ресслера, а в качестве ведомого – система Лоренца. Уравнения, описывающие поведение ведущей системы, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega y_1 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= \omega x_1 + a y_1, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c). \end{aligned} \quad (19)$$

Ведомая система задана уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\sigma(x_2 - y_2), \\ \dot{y}_2 &= r u(t) - y_2 - u(t) z_2, \\ \dot{z}_2 &= u(t) y_2 - b z_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь управляющий сигнал  $u(t)$  и значения управляющих параметров по аналогии с работой [27] выбраны в виде:  $u(t) = x_1 + y_1 + z_1$ ,  $p = 2$ ,  $c = 4$ ,  $\omega = 1$ ,  $a = 1$ ,  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 2.666$ . Там же аналитически было показано, что ведомая система (20) является асимптотически стабильной для любого управляющего сигнала  $u(t)$  и произвольных начальных условий, и, соответственно, несмотря на то, что ведущая и ведомая системы совершенно различны, в данном случае всегда будет реализовываться режим обобщенной синхронизации. Очевидно, что наличие обобщенной синхронизации может быть также установлено с помощью других методов, например, метода вспомогательной системы [34] или расчета спектра условных ляпуновских экспонент [36].

Вид хаотических аттракторов и спектров мощности однонаправленно связанных систем Ресслера и Лоренца представлены на рис. 3, а и б. Отчетливо видно, что в спектре ведомой системы Лоренца присутствуют компоненты, соответствующие частотам спектра системы Ресслера. Если динамика хаотических осцилляторов синхронизована на некоторых временных масштабах  $s$ , то на этих масштабах будет иметь место явление захвата фаз  $\phi_{s1,2}(t)$ , соответствующих этим масштабам.

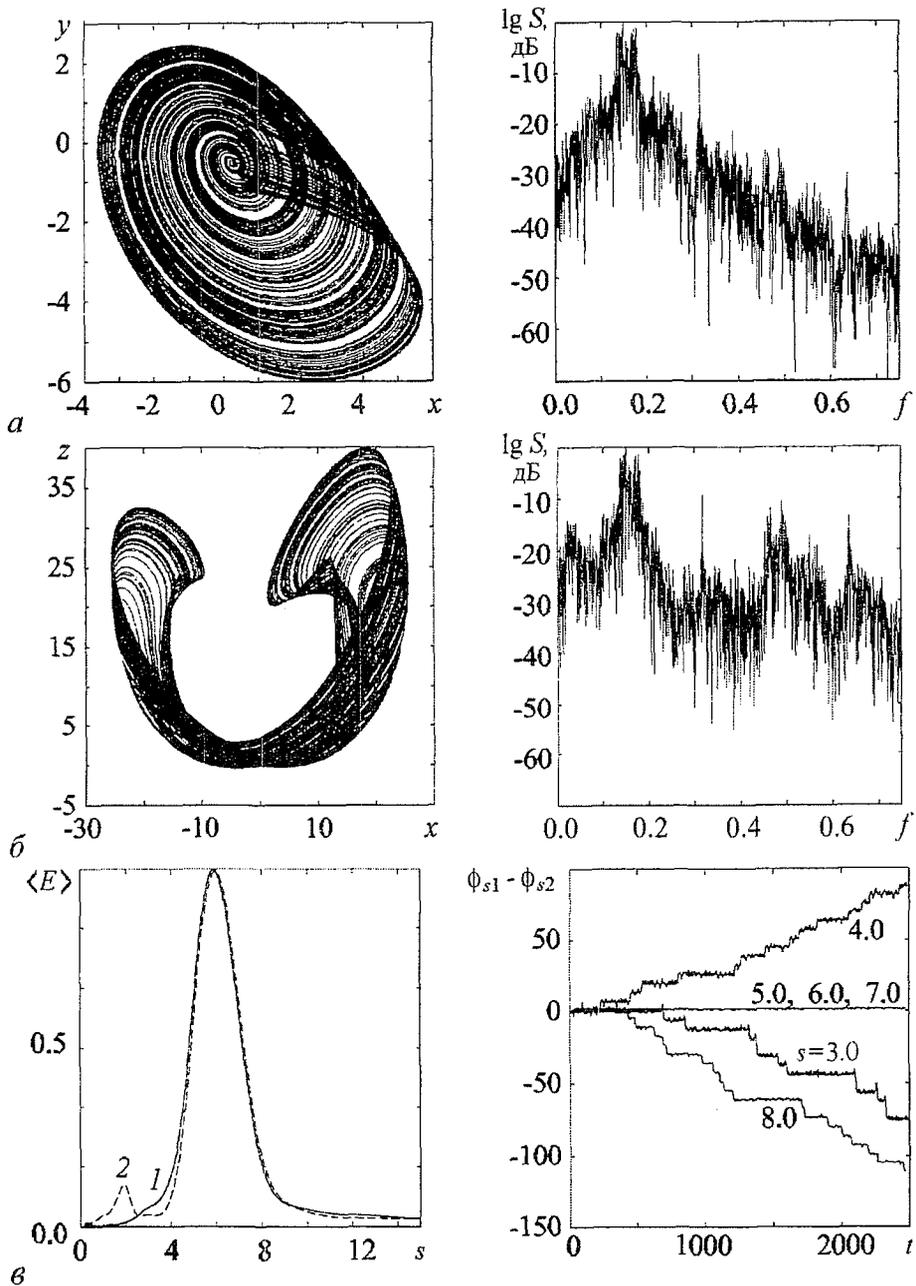


Рис. 3. Хаотический аттрактор и спектр систем Ресслера (19) (а) и Лоренца (20) (б); нормированные вейвлетные спектры мощности  $\langle E(s) \rangle$  систем Ресслера (19) (линия 1) и Лоренца (20) (линия 2), разность фаз  $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$  между связанными системами (20) и (19) (в)

Зависимость разности фаз  $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$  от времени для различных временных масштабов  $s$  показана на рис. 3, в. Отчетливо видно, что существует диапазон временных масштабов ( $s \approx 5 \div 7$ ), динамика систем на которых синхронизована. В то же самое время, как и ранее в случае фазовой синхронизации (ср., например, с рис. 1, б), часть временных масштабов остается несинхронизованной.

Итак, обобщенная синхронизация двух однонаправленно связанных совершенно различных хаотических систем проявляется как синхронное поведение некоторых временных масштабов  $s$ , на которых наблюдается явление захвата фаз  $\phi_s(t)$ . Таким образом, из проведенного рассмотрения следует, что различные типы хаотической синхронизации (такие как фазовая и обобщенная синхронизации) оказываются весьма похожими, если анализировать динамику временных масштабов взаимодействующих хаотических систем. Так, временные масштабы однонаправленно связанных систем Ресслера и Лоренца, демонстрирующих режим обобщенной синхронизации, ведут себя так же, как и временные масштабы двух связанных систем Ресслера (17) в случае фазовой синхронизации, хотя в данном случае невозможно корректно ввести мгновенную фазу  $\phi(t)$  хаотического сигнала ни для системы Ресслера, ни для системы Лоренца (см. рис. 3, а и б). Очевидно, что возникает необходимость рассмотреть вопрос о том, как соотносятся друг с другом различные типы хаотической синхронизации и как осуществляются переходы от одного типа синхронного поведения к другому. Использование анализа поведения систем на различных временных масштабах в этом смысле оказывается очень удобным, так как позволяет взглянуть с единых позиций на различные типы хаотической синхронизации. Это проблема детально рассматривается в следующем пункте.

**1.2. От несинхронных колебаний к режиму полной синхронизации.** В работе [19] было показано, что существуют определенные соотношения между фазовой, lag- и полной синхронизацией в связанных хаотических осцилляторах со слегка различающимися параметрами. При увеличении параметра связи в такой системе сначала осуществляется переход от несинхронных колебаний к режиму фазовой синхронизации<sup>2</sup>. С последующим ростом параметра связи в системе возникает режим lag-синхронизации, а затем, по мере дальнейшего увеличения связи, хаотические осцилляторы стремятся к режиму полной синхронизации, что находит свое отражение в уменьшении практически до нуля временного сдвига  $\tau$ .

Рассмотрим поведение различных временных масштабов  $s$  двух неидентичных взаимно связанных систем Ресслера (18). Если рассматриваемые осцилляторы не находятся в режиме фазовой синхронизации, то их поведение является несинхронизованным на всех временных масштабах  $s$ . Рис. 4, а иллюстрирует поведение фаз временных масштабов двух связанных систем Ресслера для достаточно малого параметра связи. Спектры мощности вейвлетного преобразования  $\langle E(s) \rangle$  довольно сильно отличаются друг от друга для первой и второй систем (см. подробнее работу [48]), однако максимальное значение энергии в обоих случаях приходится примерно на один и тот же временной масштаб  $s$ . Очевидно, что в этом случае разность фаз  $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$  растет неограниченно на всех временных масштабах. Это озна-

<sup>2</sup>Последнее имеет место только в том случае, если существует возможность корректно ввести фазы хаотических сигналов, генерируемых каждым из связанных хаотических осцилляторов.

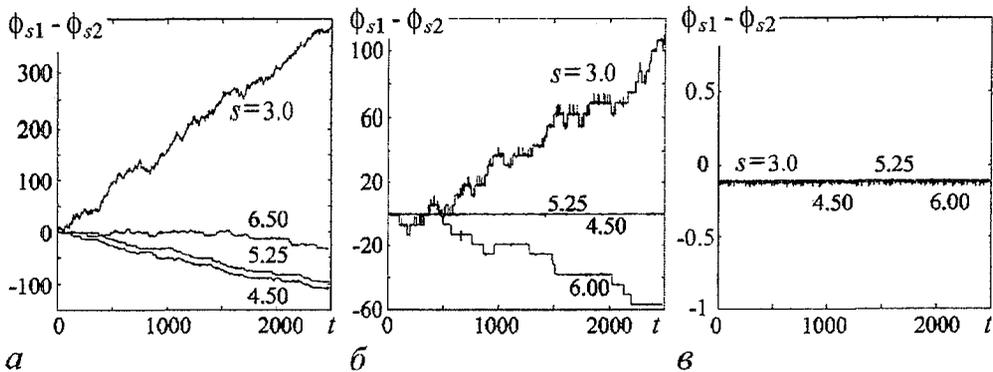


Рис. 4. Зависимость от времени разности фаз для систем Ресслера (18) на различных временных масштабах при увеличении параметра связи  $\epsilon$ : а – 0.025; б – 0.07; в – 0.25

чает, что в рассматриваемых системах не существует таких временных масштабов, которые были бы синхронизованы друг с другом, следовательно и сами системы являются несинхронизованными.

Как только какие-либо из временных масштабов рассматриваемых динамических систем синхронизируются (например, при увеличении параметра связи между системами), возникает режим фазовой синхронизации. Очевидно, что при этом в первую очередь оказываются синхронизованными те временные масштабы, на которые приходится наибольшая доля энергии вейвлетного спектра  $\langle E(s) \rangle$ . Остальные временные масштабы по-прежнему остаются рассинхронизованными (см. рис. 2, б).

С дальнейшим увеличением параметра связи между связанными динамическими системами, все большее количество временных масштабов оказываются синхронизованными и можно сказать, что степень синхронизации<sup>3</sup> увеличивается. Так, в рассмотренной системе, с дальнейшим увеличением параметра связи (например, при  $\epsilon = 0.07$ ) временные масштабы, бывшие ранее несинхронизованными, синхронизируются (рис. 4, б). Видно, что, например, временные масштабы  $s = 4.5$  в обеих системах синхронизованы друг с другом, в отличие от предыдущего случая  $\epsilon = 0.05$  (см. рис. 2, б), когда они были несинхронизованы. Количество временных масштабов, на которых наблюдается захват фаз, увеличивается, но в то же самое время некоторые временные масштабы (например,  $s = 3.0$  и  $s = 6.0$ ) остаются несинхронизованными, как и ранее.

Возникновение режима lag-синхронизации [19] между осцилляторами означает, что все временные масштабы  $s$  двух рассматриваемых систем стали синхронизованными. Действительно, из условия lag-синхронизации  $x_1(t - \tau) \simeq x_2(t)$  следует, что  $W_1(s, t - \tau) \simeq W_2(t, s)$  и, соответственно,  $\Phi_{s1}(t - \tau) \simeq \Phi_{s2}(t)$ . Очевидно, что в этом случае для всех временных масштабов  $s$  должно выполняться условие захвата фаз (15). При этом вейвлетные спектры обеих систем совпадают друг с другом и захват фаз наблюдается на всех временных масштабах  $s$  (рис. 4, в, построенный для  $\epsilon = 0.25$ ). При этом важно отметить, что разность фаз для случая lag-синхронизации не равна нулю и обуславливается величиной временного запаздывания  $\tau$ .

<sup>3</sup>В данном случае под «степенью синхронизации» понимается диапазон временных масштабов, на которых связанные системы демонстрируют синхронное поведение, приводящее к захвату фаз (15).

По мере увеличения параметра связи  $\epsilon$  разность фаз  $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$  (также как и время запаздывания  $\tau$ ) уменьшается и стремится к нулю [19] и в системе устанавливается режим полной синхронизации.

Итак, режимы фазовой, lag- и полной синхронизации естественным образом связаны друг с другом и тип синхронного поведения, реализующийся в системе, определяется числом синхронизованных временных масштабов. В то же самое время соотношение между фазовой и обобщенной синхронизацией к настоящему времени до конца не выяснено. Существуют работы (см., например, [2, 20]), в которых рассматривается вопрос о том, как соотносятся между собой эти типы синхронизации. Например, в [20] показано, что две однонаправленно связанные системы Ресслера могут демонстрировать режим обобщенной синхронизации, в то время как фазовая синхронизация не наблюдается. Подобный эффект может быть легко пояснен с помощью анализа поведения временных масштабов. Уравнения, описывающие динамику однонаправленно связанных систем Ресслера, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\
 \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \\
 \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), \\
 \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\
 \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c),
 \end{aligned} \tag{21}$$

где  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$  и  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$  – вектора состояний первой (ведущей) и второй (ведомой) систем, соответственно. Значения управляющих параметров выбраны следующими:  $\omega_1 = 0.8$ ,  $\omega_2 = 1.0$ ,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$  и  $\epsilon = 0.2$ . При данных значениях управляющих параметров в системе реализуется режим обобщенной синхронизации (см. подробнее [20]). Почему в данном случае невозможно выявить режим фазовой синхронизации, хотя имеет место обобщенная синхронизация, становится ясно из анализа поведения временных масштабов.

Рассмотрим фурье-спектры связанных хаотических осцилляторов (рис. 5). Видно, что в спектре присутствуют основные спектральные компоненты с частотами  $f_1 = 0.125$  и  $f_2 = 0.154$  (отмечены на рисунке стрелками). Анализ поведения временных масштабов показывает, что временные масштабы  $s_1 = 1/f_1 = 8$  связанных осцилляторов, соответствующие частоте  $f_1$  (и масштабы, близкие к  $s_1$ ), оказываются синхронизованными, в то время как временные масштабы  $s_2 = 1/f_2 \simeq 6.5$  и близкие к ним демонстрируют несинхронное поведение.

Причина такого поведения временных масштабов становится понятной из анализа вейвлетных спектров  $\langle E(s) \rangle$  обеих систем. Временной масштаб  $s_1$  ведущей системы Ресслера характеризуется большим значением энергии, в то время как доля энергии, приходящейся на этот масштаб в ведомой системе, достаточно мала. Вследствие этого, ведущая система навязывает свою динамику ведомой системе на временном масштабе  $s_1$ . Напротив, доля энергии, приходящейся на временной масштаб  $s_2$  ведущей системы, мала, а ведомой – велика. Ведущая система не может навязывать свою динамику ведомой системе, и временные масштабы  $s_2$  остаются несинхронизованными.

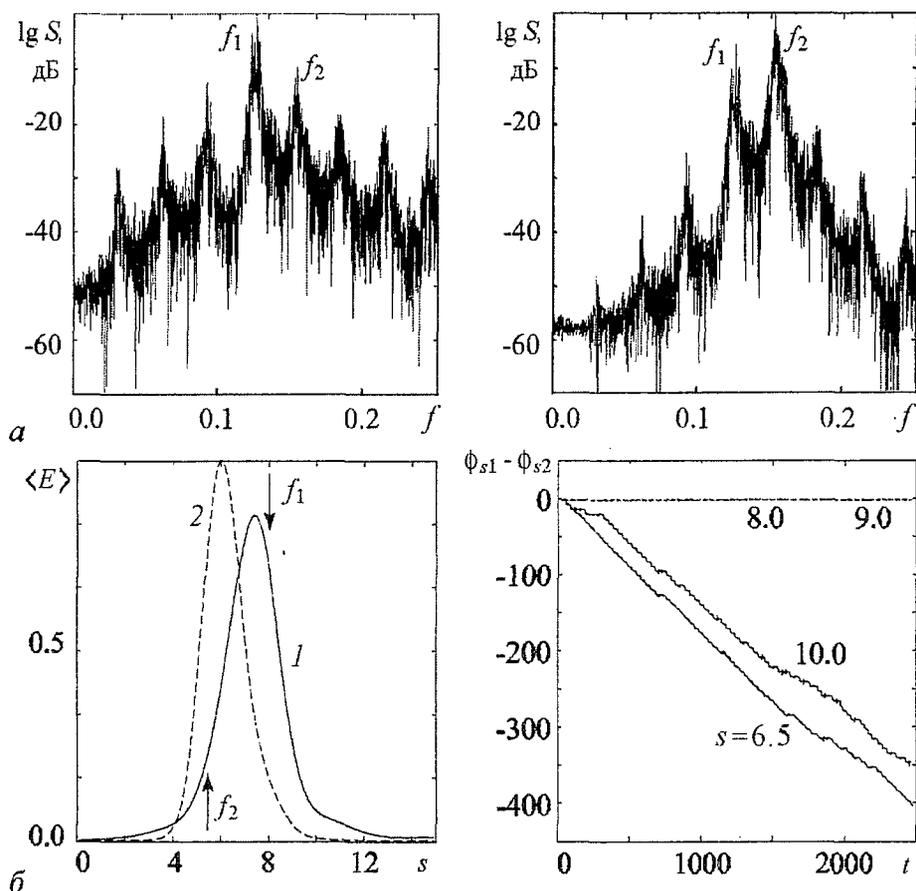


Рис. 5. Фурье-спектры для ведущей и ведомой систем Ресслера (21) при  $\epsilon = 0.2$  (а); нормированное распределение энергии в вейвлетном спектре  $\langle E(s) \rangle$  для первой (линия 1) и второй (линия 2) систем Ресслера (18), разность фаз  $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$  для различных временных масштабов (б)

Итак, обобщенная синхронизация однонаправленно связанных систем Ресслера проявляется как синхронное поведение временных масштабов, точно так же, как до этого было с фазовой синхронизацией. Совершенно понятно, почему в данном случае не наблюдается явление фазовой синхронизации. Из рис. 5 видно, что мгновенная фаза  $\phi_{1,2}(t)$  хаотических сигналов  $x_{1,2}(t)$ , определенная при помощи традиционных методов (4)–(7), обуславливается частотами  $f_1$  и  $f_2$ , из которых только частоты  $f_1$  оказываются синхронизованными. Соответственно, наблюдение за мгновенной фазой  $\phi_{1,2}(t)$  не даст возможности определить наличие фазовой синхронизации в данном случае.

**1.3. Мера синхронизации хаотических осцилляторов.** Введение в рассмотрение непрерывного множества временных масштабов  $s$  с ассоциированными с ними фазами хаотического сигнала и выделение диапазона синхронных масштабов  $\Delta s = s_2 - s_1$  позволяет ввести количественную характеристику меры хаотической синхронизации связанных систем. Она определяется как относительная доля энергии

вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы [43, 44],

$$\gamma = \int_{s_1}^{s_2} \langle E(s) \rangle ds / \int_0^{\infty} \langle E(s) \rangle ds, \quad (22)$$

где  $\langle E(s) \rangle$  – интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по масштабам, определяемое формулой (13). При  $\gamma = 0$  режим хаотической синхронизации связанных подсистем отсутствует. При  $\gamma \neq 0$  в системе реализуется режим синхронизации временных масштабов. При  $\gamma = 1$  колебания в каждой из подсистем идентичны или сдвинуты друг относительно друга на некоторый интервал времени  $\tau$ , а системы находятся в режиме lag-синхронизации [15]. Рост  $\gamma$  от 0 до 1 свидетельствует об увеличении доли энергии, приходящейся на синхронные временные масштабы  $s$ . Фактически, величина  $\gamma$  характеризует насколько близки друг другу хаотические колебания в каждой из связанных активных сред. Важно отметить, что с точки зрения синхронизации временных масштабов и введенной меры синхронизации, режимы полной синхронизации и lag-синхронизация оказываются идентичными. По сути дела, они являются одним и тем же синхронным режимом.

Если синхронное поведение наблюдается отдельно на нескольких диапазонах временных масштабов  $\Delta s_i$ , то можно ввести меры синхронизации  $\gamma_i$  соответственно для каждого из диапазонов временных масштабов  $\Delta s_i$ , а также интегральную характеристику меры синхронизации по всем диапазонам синхронных временных масштабов

$$\gamma = \sum_i \gamma_i. \quad (23)$$

На рис. 6 приведена зависимость меры хаотической синхронизации  $\gamma$  от параметра связи  $\epsilon$  для изучавшихся ранее взаимно связанных систем Ресслера (18) (для определенности приведена зависимость для первой из связанных систем). С ростом параметра связи доля энергии колебательного процесса, приходящаяся на синхронизованные масштабы, увеличивается. Для значения параметра связи  $\epsilon = 0.039$ , соответствующего возникновению режима фазовой синхронизации, относительная доля энергии, приходящаяся на синхронизованные временные масштабы, равна  $\gamma = 0.21$ . При больших значениях параметра связи ( $\epsilon > 0.2$ ) величина  $\gamma$  стремится к единице. Последнее означает, что вся энергия хаотических автоколебаний приходится на синхронизованные временные масштабы, и в системе, как уже отмечалось выше, устанавливается режим lag-синхронизации.

Аналогичное поведение меры хаотической синхронизации наблюдалось и для других связанных хаотических систем, рассмотренных в статье выше, и мы не приводим их для экономии места (подробнее см. работу [44]).

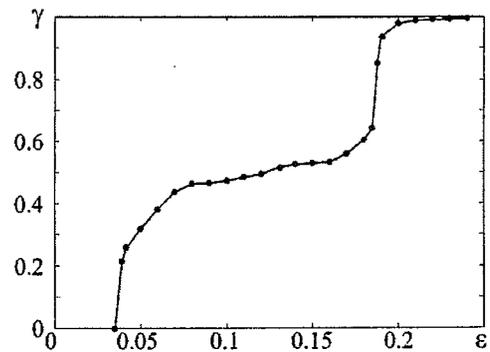


Рис. 6. Зависимость меры синхронизации  $\gamma$  для первой системы Ресслера (18) от параметра связи  $\epsilon$

## 2. Синхронизация спектральных компонент связанных хаотических систем

**2.1. Взаимосвязь между фурье- и вейвлетным преобразованиями.** Введение множества фаз хаотического сигнала возможно не только при помощи непрерывного вейвлетного преобразования, но с использованием преобразования Фурье.

Так как временной масштаб  $s$ , введенный в рассмотрение при помощи непрерывного вейвлетного преобразования, связан с частотой, определяемой при помощи преобразования Фурье (это соотношение  $s = 1/f$  выглядит достаточно просто для морлет-вейвлета с параметром  $\Omega_0 = 2\pi$ ), синхронизация хаотических колебаний должна быть также связана с появлением фазового соотношения между частотными компонентами  $f$  соответствующих фурье-спектров  $S(f)$ .

Следует также отметить, что непрерывное вейвлетное преобразование обладает более слабым разрешением в частотном диапазоне, чем преобразование Фурье. Вейвлетное преобразование как бы сглаживает фурье-спектр, при этом динамику временного масштаба  $s$  определяет не только спектральная составляющая фурье-спектра  $f = 1/s$ , но и соседние частотные компоненты, при этом степень их влияния определяется как расположением этих компонент в фурье-спектре, так и их интенсивностью. Таким образом, из того факта, что связанные хаотические осцилляторы синхронизованы на временном масштабе  $s$  вейвлетного спектра, еще не следует, что соответствующие частотные компоненты  $f = 1/s$  фурье-спектра рассматриваемых систем также синхронизованы.

С целью выявления взаимосвязи между непрерывным вейвлетным преобразованием и преобразованием Фурье рассмотрим несколько модельных примеров.

В качестве первого примера рассмотрим периодический синусоидальный сигнал  $f(t) = \sin(\omega t)$ . Фурье-спектр такого сигнала характеризуется наличием одного четко выраженного максимума на частоте  $f = \omega/2\pi$ , равной собственной частоте периодического сигнала. Вейвлетный спектр в данном случае представляет собой колокообразную кривую, имеющую один максимум на временном масштабе  $s = 1/f$  (если в качестве материнского вейвлета используется морлет-вейвлет с параметром  $\Omega_0 = 2\pi$ ). В то же самое время ширина вейвлетного спектра намного больше чем у фурье-спектра, что связано с меньшим разрешением вейвлетного преобразования по масштабам. При этом фаза вейвлетного спектра на всех временных масштабах будет меняться периодически с периодом  $T = 1/f$ . Фурье- и вейвлетный спектры, а также зависимость амплитуды и фазы вейвлетного спектра от времени (для временного масштаба  $s = 1$ ) показаны на рис. 7 для периодического сигнала при  $\omega = 2\pi$ .

В качестве второго примера рассмотрим периодический сигнал  $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$ , представляющий собой сумму двух синусов с кратными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Для определенности выберем  $\omega_1 = 2\pi$  и  $\omega_2 = 4\pi$ . Теперь в фурье-спектре присутствуют два четко выраженных максимума приблизительно одинаковой амплитуды на частотах  $f_1 = \omega_1/2\pi$  и  $f_2 = \omega_2/2\pi$  (рис. 8, а), а вейвлетный спектр по-прежнему представляет собой колокообразную кривую, но уже с двумя максимумами на временных масштабах  $s_1 = 1/f_1$  и  $s_2 = 1/f_2$ ; причем чем больше частота, тем меньше амплитуда вейвлетного спектра на временном масштабе, соответствующем этой частоте (рис. 8, б). Теперь весь диапазон временных масштабов можно разделить на две части, между которыми наблюдается четкая граница: вбли-

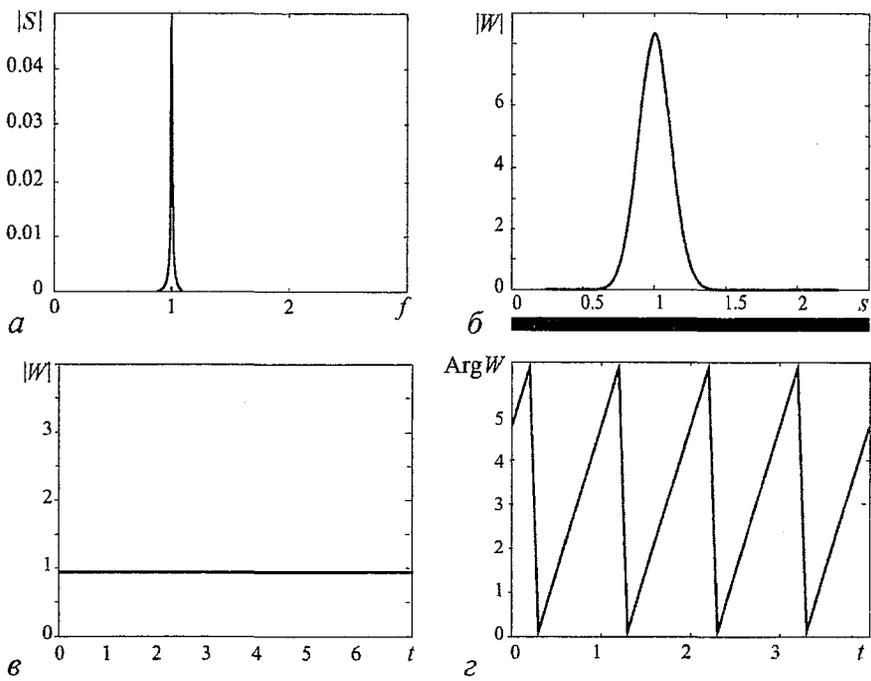


Рис. 7. Фурье- (а) и вейвлетный (б) спектры, а также вейвлетные поверхность (в) и фаза (г) периодического сигнала

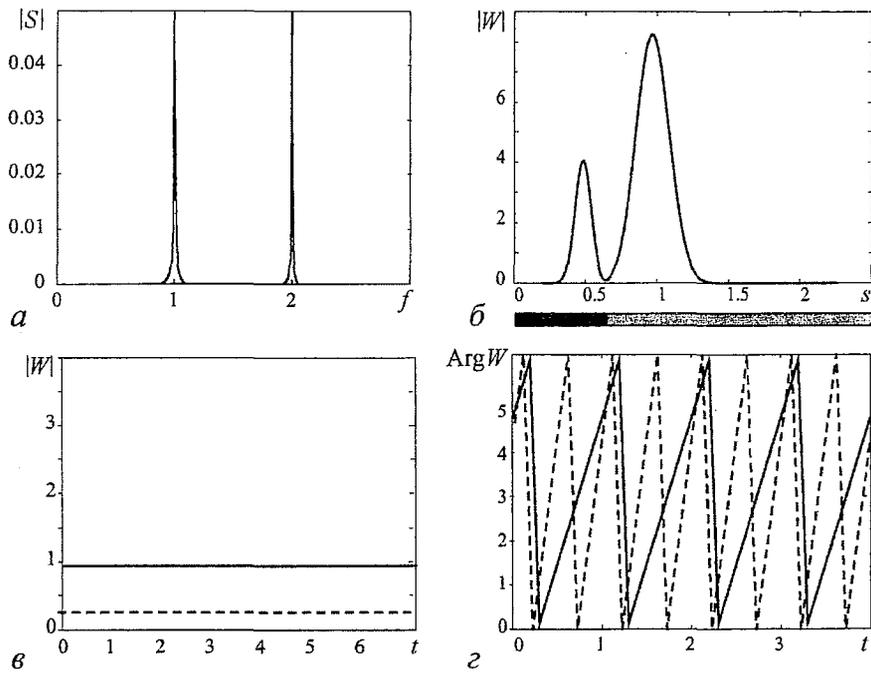


Рис. 8. Фурье- (а) и вейвлетный (б) спектры, а также вейвлетные поверхность (в) и фаза (г) суммы двух периодических сигналов с кратными частотами

зи временного масштаба  $s_1$  (показано серым цветом) фаза меняется периодически с периодом  $T_1 = 1/f_1$ , вблизи  $s_2$  (показано черным цветом) – с периодом  $T_2 = 1/f_2$ . Зависимости амплитуды и фазы вейвлетного спектра от времени, приведенные на рис. 8, в, з, соответствуют временным масштабам  $s = 1$  (сплошная линия) и  $s = 0.4$  (штриховая линия).

Если частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  находятся в иррациональном соотношении, причем они расположены друг к другу достаточно близко, то есть в системе наблюдается квазипериодическая динамика, ситуация будет аналогичной. Однако, если сильно уменьшить амплитуду синуса на частоте  $\omega_2$ , то фаза будет совершать колебания с периодом  $T_2 = 2\pi/\omega_1$  на всех временных масштабах (рис. 9, а). Такая ситуация связана с тем, что амплитуда вейвлетного спектра на временном масштабе  $s_2$ , обусловленная спектральной компонентой с частотой  $\omega_2$ , становится столь малой, что не оказывает почти никакого влияния на поведение системы (рис. 9, б). В вейвлетном спектре имеется только один максимум на временном масштабе  $s_1$ . Чтобы проявилась вторая компонента фурье-спектра с частотой  $\omega_2$ , нужно увеличивать параметр вейвлета; например, в роли материнского вейвлета использовать морлет-вейвлет с параметром  $\Omega_0 = 16$  (вейвлетный спектр для такого случая приведен на рис. 9, в). Конечно, в таком случае не будет наблюдаться такое простое соотношение между частотой и временным масштабом, но, тем не менее, этот метод позволяет достаточно хорошо уловить вторую частоту и наблюдать фазовую динамику с периодами  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  (показано черным) и  $T_2 = 2\pi/\omega_2$  (показано серым) на различных временных масштабах.

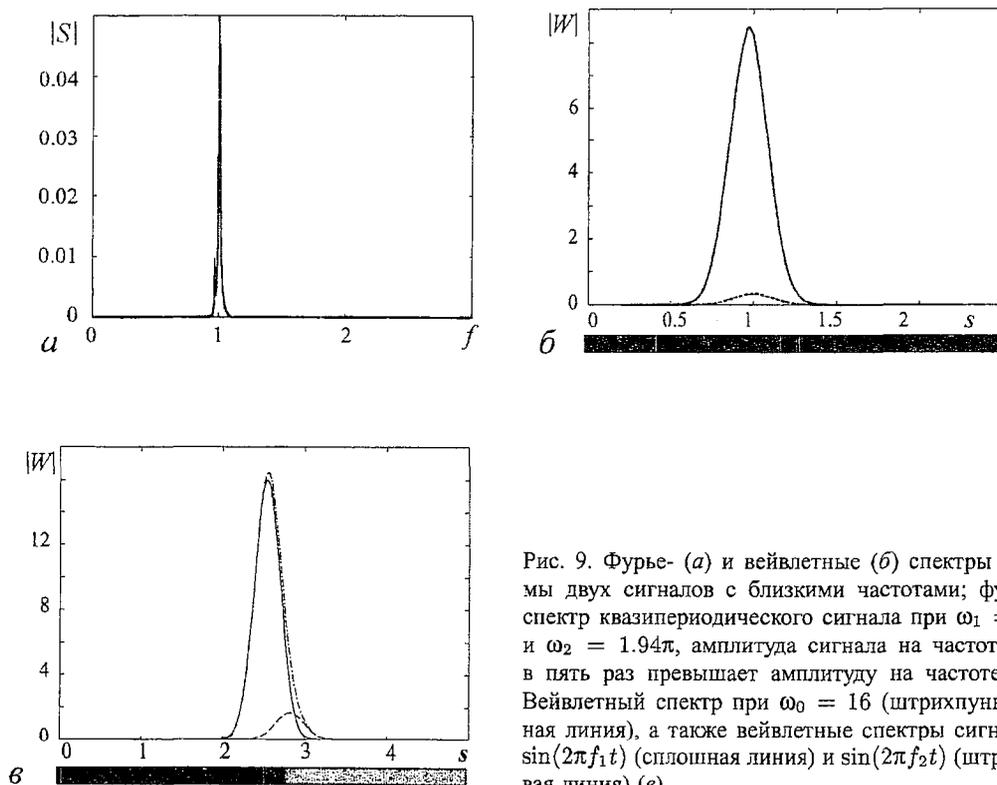


Рис. 9. Фурье- (а) и вейвлетные (б) спектры суммы двух сигналов с близкими частотами; фурье-спектр квазипериодического сигнала при  $\omega_1 = 2\pi$  и  $\omega_2 = 1.94\pi$ , амплитуда сигнала на частоте  $\omega_1$  в пять раз превышает амплитуду на частоте  $\omega_2$ . Вейвлетный спектр при  $\omega_0 = 16$  (штрихпунктирная линия), а также вейвлетные спектры сигналов  $\sin(2\pi f_1 t)$  (сплошная линия) и  $\sin(2\pi f_2 t)$  (штриховая линия) (в)

**2.2. Критерий синхронизации спектральных компонент фурье-спектров связанных динамических систем.** Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  – временные реализации, порождаемые связанными хаотическими осцилляторами. Фурье-спектры соответствующих колебаний будут определяться соотношением

$$S_{1,2}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{1,2}(t)e^{-i2\pi ft} dt. \quad (24)$$

Для каждой спектральной компоненты  $f$  фурье-спектра  $S(f)$  может быть введена в рассмотрение мгновенная фаза  $\phi_f(t) = \phi_{f0} + 2\pi ft$ . Однако, в силу того, что фаза  $\phi_f(t)$  линейно растет с течением времени, разность фаз взаимодействующих осцилляторов для этой частоты  $\phi_{f1}(t) - \phi_{f2}(t) = \phi_{f01} - \phi_{f02}$  оказывается всегда ограниченной, и условие захвата фаз (2), традиционно используемое для определения режима фазовой синхронизации, в данном случае оказывается бесполезным. Очевидно, критерий синхронизации связанных осцилляторов на частотной составляющей  $f$  должен быть иным.

В работе [47] в качестве установления критерия возникновения хаотической синхронизации предложен следующий подход. Поскольку в режиме lag-синхронизации поведение взаимодействующих хаотических осцилляторов, как было показано выше, оказывается синхронизованным на всех временных масштабах  $s$  вейвлетного преобразования, то следует ожидать, что и все частотные компоненты фурье-спектров рассматриваемых систем тоже должны быть синхронизованными. В этом случае  $x_1(t - \tau) \simeq x_2(t)$ , и следовательно, в силу (24), должно выполняться соотношение  $S_2(f) \simeq S_1(f)e^{i2\pi\tau f}$ . Поэтому, в том случае, когда два связанных хаотических осциллятора находятся в режиме lag-синхронизации, их мгновенные фазы, соответствующие спектральной компоненте  $f$  фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$ , будут связаны между собой как  $\phi_{f2}(t) \simeq \phi_{f1}(t) + 2\pi\tau f$ , а разность фаз  $\phi_{f2}(t) - \phi_{f1}(t)$  должна подчиняться соотношению

$$\Delta\phi_f = \phi_{f1}(t) - \phi_{f2}(t) = 2\pi\tau f. \quad (25)$$

Таким образом, на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  точки, отвечающие разности фаз спектральных компонент хаотических осцилляторов, находящихся в режиме lag-синхронизации, должны располагаться вдоль прямой, имеющей угловой коэффициент  $k = 2\pi\tau$ . Разность фаз  $\Delta\phi_f$  может быть подсчитана способом, изложенным в работе [58], либо с помощью вычисления взаимной спектральной плотности [59].

Так как при разрушении режима lag-синхронизации (например, с уменьшением параметра связи между осцилляторами) часть временных масштабов  $s$  вейвлетных спектров, как мы видели ранее, выходит из синхронизма, то можно ожидать, что и часть спектральных компонент фурье-спектров в режиме синхронизации временных масштабов (но не в режиме lag- или полной синхронизации) также будет рас-синхронизована, что будет проявляться в отклонении точек на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  от прямой линии. При этом разумно полагать, что в первую очередь будут выходить из синхронизма те спектральные компоненты, на долю которых приходится малая доля энергии, тогда как спектральные компоненты в фурье-спектрах, характеризующиеся большей долей энергии, будут оставаться синхронизованными, и соответствующие им точки на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  будут по-прежнему располагаться вдоль прямой

линии. По мере дальнейшего уменьшения параметра связи, все большая часть спектральных компонент будет выходить из состояния синхронизма, но до тех пор, пока наиболее «энергетические» компоненты будут синхронизованы, связанные системы будут демонстрировать режим хаотической синхронизации.

Проиллюстрируем данный подход на примере взаимосвязанных слабонеидентичных систем Ресслера (18).

Рис. 10, *а* иллюстрирует возрастание числа синхронизованных спектральных компонент фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$  при увеличении параметра связи:  $\epsilon = 0.05$  соответствует возникновению режима фазовой синхронизации,  $\epsilon = 0.1$  – режиму фазовой синхронизации,  $\epsilon = 0.15$  – режиму lag-синхронизации, когда все спектральные компоненты оказываются синхронизованными.

На рис. 10, *б* для значения управляющего параметра  $\epsilon = 0.05$  (режим фазовой синхронизации) приведены распределения разности фаз  $\Delta\phi_f$  спектральных компонент  $f$ , мощность которых превышает заданный уровень  $L$  ( $L$  – пороговый уровень мощности, начиная с которого учитывались спектральные компоненты  $f_j$  фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$ ). Видно, что по мере «отсечения» частотных компонент, обладающих малой долей энергии, доля синхронизованных спектральных компонент будет возрастать. Таким образом, при возникновении режима фазовой синхронизации наиболее «энергетичные» спектральные компоненты синхронизируются в первую очередь, и наоборот, при разрушении режима lag-синхронизации первыми выходят из синхронизма спектральные компоненты, на которые приходится малая доля энергии колебаний.

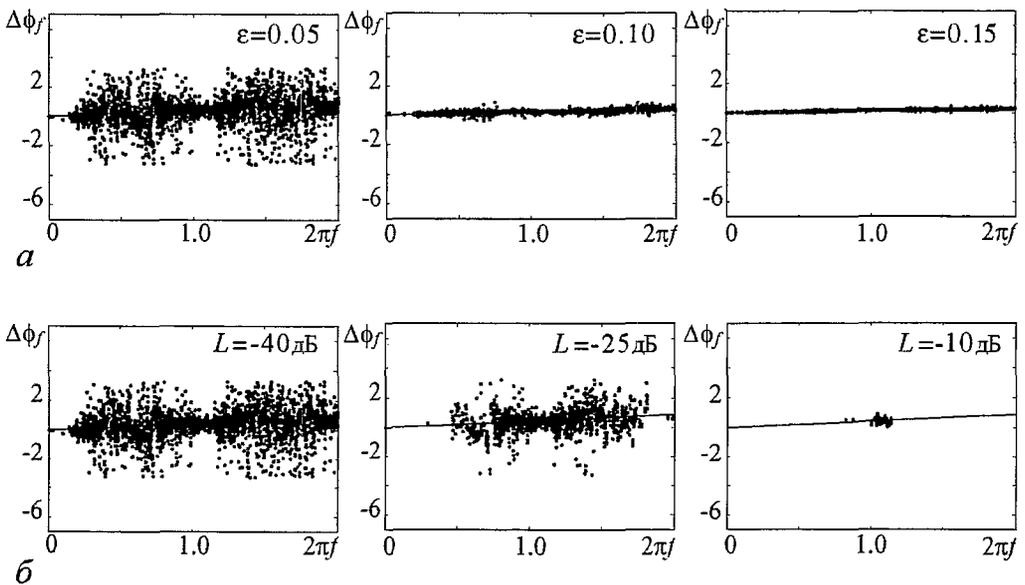


Рис. 10. Разность фаз  $\Delta\phi_f$  для различных частотных компонент фурье-спектров систем Ресслера (18): *а* – при увеличении параметра связи  $\epsilon$ ,  $L = -40$  дБ; *б* – при увеличении уровня мощности  $L$ ,  $\epsilon = 0.05$

**2.3. Количественная характеристика степени хаотической синхронизации.** Аналогичная характеристика степени хаотической синхронизации (22) может быть введена и для спектральных компонент. В данном случае меру синхронизации можно определить как долю энергии, приходящуюся на синхронизованные  $f_s$  спектральные компоненты,

$$\rho = \frac{\sum_{j_s} S(f_{j_s}) \Delta f}{\sum_j S(f_j) \Delta f}, \quad (26)$$

где суммирование в числителе ведется по синхронизованным  $f_{j_s}$  спектральным компонентам фурье-спектров  $S(f)$ , а в знаменателе – по всем частотным компонентам  $f_j$ ;  $\Delta f$  – шаг дискретизации по частоте.

При отсутствии синхронизации все спектральные компоненты рассинхронизованы, и доля энергии  $\rho$ , приходящаяся на синхронизованные спектральные компоненты, естественно, равна нулю. Затем, при установлении режима фазовой синхронизации, по мере увеличения параметра связи, увеличивается число спектральных компонент, и соответственно, растет доля энергии, приходящаяся на синхронизованные спектральные компоненты. В тот момент, когда все спектральные компоненты синхронизируются (устанавливается режим lag-синхронизации), доля энергии синхронизованных компонент  $\rho$  будет равна единице.

На рис. 11 показана зависимость меры синхронизации  $\rho$  от величины параметра связи  $\epsilon$ , полученная для рассматриваемой системы (18). Длина временных реализаций  $x_{1,2}(t)$ , по которым определялись фурье-спектры связанных хаотических осцилляторов, составляла 2000 единиц безразмерного времени (что соответствует примерно 12500 характерным периодам колебаний в системах), шаг дискретизации по времени был выбран  $h = 0.2$ . Спектральные компоненты фурье-спектров считались синхронизованными, если для разности фаз  $\Delta\phi_f$  выполнялось соотношение

$$|\Delta\phi_f - 2\pi\tau f| < \delta, \quad (27)$$

где величина  $\delta = 0.04$  характеризует точность, с которой определялось, являются ли рассматриваемые спектральные компоненты  $f$  синхронизованными.

Как видно из рис. 11, доля энергии, приходящаяся на синхронизованные частотные компоненты, действительно увеличивается от значений, близких к нулю в случае отсутствия режима хаотической синхронизации, до значений, близких к единице при значениях параметра связи  $\epsilon$ , соответствующих режиму lag-синхронизации.

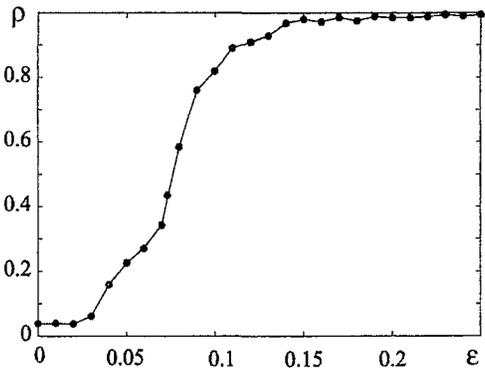


Рис. 11. Зависимость доли энергии  $\rho$ , приходящейся на синхронизованные спектральные компоненты фурье-спектров системы (18), от параметра связи  $\epsilon$

**2.4. Поведение спектральных компонент в режиме хаотической синхронизации.** Теперь рассмотрим, каким образом ведут себя близкие частотные компоненты двух связанных осцилляторов при увеличении связи между ними. В качестве модели осцилляторов, демонстрирующих поведение, близкое к одночастотному, рассмотрим два взаимно связанных генератора Ван дер Поля со слегка различающимися параметрами

$$\ddot{x}_{1,2} - (\lambda - x_{1,2}^2) \dot{x}_{1,2} + \Omega_{1,2}^2 x_{1,2} = \pm \varepsilon (x_{2,1} - x_{1,2}), \quad (28)$$

где  $\Omega_{1,2} = \Omega \pm \Delta$  – слегка различающиеся парциальные частоты;  $x_{1,2}$  – переменные, описывающие поведение первого и второго автогенераторов, соответственно;  $\varepsilon$  – параметр связи. Параметр нелинейности  $\lambda = 0.1$  был выбран малым для того, чтобы колебания автогенераторов были близки к одночастотным, асимметричный вид связи обеспечивает установление в системе (28) синхронного режима, аналогичного режиму lag-синхронизации в хаотических системах, когда колебания в генераторах происходят на одной частоте, при этом имеет место небольшая разность фаз колебаний, уменьшающаяся с ростом параметра связи.

Используя метод медленно меняющихся амплитуд, будем искать решение (28) в виде  $x_{1,2} = A_{1,2} e^{i\omega t} + A_{1,2}^* e^{-i\omega t}$ ,  $\dot{A}_{1,2} e^{i\omega t} + \dot{A}_{1,2}^* e^{-i\omega t} = 0$ , где символ «\*» означает комплексное сопряжение,  $\omega$  – частота, на которой происходят колебания в системе (28). Проводя усреднение по быстро изменяющимся переменным, получаем уравнения для комплексных амплитуд

$$\dot{A}_{1,2} = \frac{1}{2} (\lambda - |A|^2) A + i \frac{1}{2\omega} [(\Omega_{1,2}^2 - \omega^2) A_{1,2} \mp \varepsilon (A_{2,1} - A_{1,2})]. \quad (29)$$

Выбирая комплексную амплитуду в виде

$$A_{1,2} = r_{1,2} e^{i\varphi_{1,2}}, \quad (30)$$

получаем уравнения для амплитуд  $r_{1,2}$  и фаз  $\varphi_{1,2}$  связанных осцилляторов

$$\begin{aligned} \dot{r}_{1,2} &= \frac{1}{2} (\lambda - |r_{1,2}|^2) r_{1,2} \pm \frac{\varepsilon r_{2,1}}{2\omega} \sin(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}), \\ \dot{\varphi}_{1,2} &= \frac{\Omega_{1,2}^2 - \omega^2 \pm \varepsilon}{2\omega} \mp \frac{\lambda r_{2,1}}{2\omega r_{1,2}} \cos(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1}). \end{aligned} \quad (31)$$

Условием синхронных колебаний генераторов (28) на частоте  $\omega$  является равенство нулю производных  $\dot{r}_{1,2}$  и  $\dot{\varphi}_{1,2}$ . Полагая, что разность фаз колебаний  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  достаточно мала, удерживая члены первого порядка малости по  $\Delta\varphi$  в соотношении (31), получаем следующие зависимости для разности фаз

$$\Delta\varphi_{1,2} = \frac{\lambda \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{\Omega\Delta}(\varepsilon + \Omega\Delta)}}{2\varepsilon + 4\Omega\Delta} \quad (32)$$

и частоты

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{\Omega\Delta}(\varepsilon + \Omega\Delta)}, \quad (33)$$

которые соответствуют устойчивому и неустойчивому решениям системы (31). Из соотношений (32), (33) видно, что при малых значениях параметра расстройки  $\Delta$

разность фаз  $\Delta\phi$  колебаний связанных осцилляторов на частоте  $\omega$  прямо пропорциональна частоте колебаний  $\omega$  и обратно пропорциональна параметру связи  $\varepsilon$

$$\Delta\phi = \frac{\lambda\omega}{2\varepsilon}. \quad (34)$$

Таким образом, у взаимно связанных осцилляторов со слегка различающимися параметрами происходит захват близких частотных компонент фурье-спектров, при этом разность фаз между ними определяется соотношением (34). Важно подчеркнуть, что временное запаздывание между спектральными компонентами

$$\tau = \frac{\Delta\phi}{\omega} \sim \varepsilon^{-1} \quad (35)$$

не зависит от частоты, а следовательно, оказывается одинаковым для всех спектральных компонент. Именно благодаря этому факту становится возможным установление режима lag-синхронизации хаотических осцилляторов, когда динамика связанных систем на всех частотах отличается на один и тот же сдвиг по времени. Закономерность (35) имеет место для целого ряда динамических систем, и по всей видимости, носит универсальный характер.

На рис. 12 приведена зависимость временного сдвига  $\tau$  между основными частотными компонентами фурье-спектров взаимодействующих хаотических систем Рёсслера от параметра связи  $\varepsilon$ . Основная частота в спектре близка к  $\omega = 1$  и слегка изменяется с увеличением параметра связи. Отчетливо видно, что после того, как основные спектральные компоненты фурье-спектров взаимодействующих осцилляторов оказываются синхронизованными (что соответствует установлению режима синхронизации временных масштабов), временной сдвиг между ними подчиняется универсальному степенному закону (35). В работах [45, 47] численно было показано, что полученная зависимость временного сдвига между основными частотными компонентами выполняется и для других связанных хаотических систем, которые с ростом параметра связи имеют тенденцию переходить к режимам lag- и полной синхронизации.

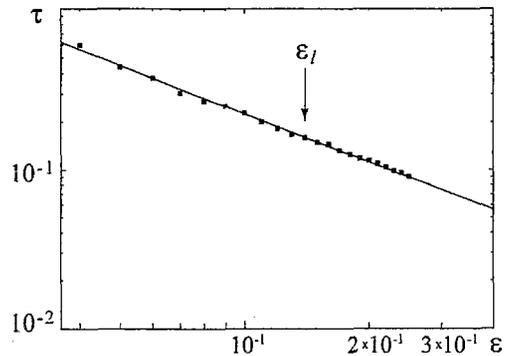


Рис. 12. Зависимость временного сдвига  $\tau$  между основными компонентами фурье-спектров от параметра связи  $\varepsilon$ ; стрелкой на рисунке показано значение параметра связи  $\varepsilon_l = 0.15$ , при котором наступает режим lag-синхронизации

### 3. Синхронизация временных масштабов в однонаправленно связанных электронных системах с обратной волной и кубичной фазовой нелинейностью

Рассмотрим пример приложения данного метода к анализу хаотической синхронизации распределенной автоколебательной системы. В качестве исследуемой модели рассмотрим систему двух электронно-волновых сред со взаимодействующими встречными электронной и электромагнитной волнами и кубичной фазовой

нелинейностью (модель лампы обратной волны с поперечным полем). Подробно результаты исследования подобной связанной системы представлены в работах [60,61].

Процессы в системе связанных ЛОВ с поперечным полем описываются следующей системой уравнений (см. подробнее работы [62–64], в которых были получены уравнения модели ЛОВ с поперечным полем):

$$\frac{\partial F_{1,2}}{\partial \tau} - \frac{\partial F_{1,2}}{\partial \xi} = -A_{1,2}I_{1,2}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial I_{1,2}}{\partial \xi} + j|I_{1,2}|^2 I_{1,2} = -A_{1,2}F_{1,2}, \quad (37)$$

где индекс «1» соответствует ведущей, а индекс «2» – ведомой активным средам.

Здесь  $F = |F| \exp[j\phi_F]$  и  $I = |I| \exp[j\phi_I]$  – соответственно безразмерные медленно меняющиеся во времени и пространстве по сравнению с  $\exp(j(\hat{\omega}t - \hat{k}\xi))$  амплитуды электромагнитной и электронной волн;  $\tau$  и  $\xi$  – безразмерные время и координата;  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}$  – частота и волновое число, соответствующие точке пересечения дисперсионных кривых невзаимодействующих электронной и электромагнитной волн;  $A$  – безразмерный управляющий параметр, который можно рассматривать как безразмерные длину системы или ток электронного пучка.

Однонаправленная связь между автоколебательными системами записывается в виде нестационарного граничного условия для медленно меняющейся амплитуды поля  $F_2$  ведомой активной среды, при этом граничное условие для первой ведущей активной среды остается неизменным

$$I_1(\xi = 0, \tau) = 0, \quad F_1(\xi = 1.0, \tau) = 0, \quad (38)$$

$$I_2(\xi = 0, \tau) = 0, \quad F_2(\xi = 1.0, \tau) = \rho F_1(\xi = 0.0, \tau), \quad (39)$$

где  $\rho = R \exp[j\theta]$  – комплексный коэффициент связи ( $R$  – амплитуда и  $\theta$  – фаза коэффициента связи). Подобное введение связи, когда управляющий сигнал воздействует только на границе распределенной активной системы является естественным и физически просто реализуемым.

Для ведущей и ведомой систем значения управляющих параметров были зафиксированы равными  $A_1 = 4.2$  и  $A_2 = 4.9$ , что соответствует режимам хаотической автомодуляции поля в активных средах. Величина фазы коэффициента связи  $\theta$  не влияла на процессы в связанной системе и была выбрана постоянной  $\theta = \pi$ .

Колебания электрического поля ведущей системы характеризуются сплошным спектром, в котором присутствуют два основных временных масштаба  $s_b$  (близок к величине  $2\pi/\hat{\omega}$ , где  $\hat{\omega}$  – частота синхронизма линейных невзаимодействующих электронной и электромагнитной волн в распределенной системе взаимодействующих встречных волн) и  $s_m$  (определяет характерную частоту низкочастотной модуляции амплитуды поля ведомой системы). С ростом бифуркационного параметра  $A$  колебания в системе усложняются и для ведомой системы ( $A_2 = 4.9$ ) в спектре невозможно выделить какие-либо характерные частоты колебаний в активной среде.

С ростом параметра связи  $R$  (рост параметра  $R$  означает, что мощность внешнего сигнала увеличивается как  $R^2$ ) спектр генерации неавтономной ведомой системы изменяется. При  $R < 0.3$  в спектре ведомой системы на фоне развитого шумового пьедестала появляется слабо выраженная частота, соответствующая основной

частоте  $f_b$  в спектре ведущей системы. При больших значениях  $R > 0.3$  в спектре ведомой системы возрастает энергия спектральных компонент, соответствующих базовым частотам в спектре мощности ведущей системы. На рис. 13 показаны границы  $s_1$  и  $s_2$  диапазонов синхронизированных временных масштабов на плоскости  $(R, s)$ .

Особенностью динамики системы двух связанных электронно-волновых сред является то, что синхронизация временных масштабов хаотических сигналов каждой из подсистем при сравнительно большой амплитуде коэффициента связи  $R$  наблюдается для двух диапазонов вблизи базовых временных масштабов  $s_b = 1/f_b$  и  $s_m = 1/f_m$ , соответственно. На рис. 13 соответствующие диапазоны синхронных масштабов показаны для области вблизи базового масштаба  $s_b$  внизу, и масштаба  $s_m$  – сверху. При величинах амплитуды коэффициента связи  $R \in (0, 0.29)$  в системе не наблюдается режим хаотической синхронизации. Последнее означает, что не существует ни одного временного масштаба  $s$ , для динамики фазы которого выполнялось бы условие синхронизма (15). С ростом параметра связи  $R$  возникает диапазон синхронных временных масштабов  $\Delta s = s_2 - s_1$ . В связанных активных средах устанавливается режим синхронизации временных масштабов.

Отметим, что с ростом связи  $R$  вначале происходит синхронизация временных масштабов вблизи базового масштаба  $s_b$  (на которые приходится большая часть энергии вейвлетного спектра) при  $R = R_b$  (отмечен на рис. 13), и только с дальнейшим увеличением коэффициента связи при  $R = R_m > R_b$  имеет место захват фаз временных масштабов в области базового масштаба  $s_m$ , соответствующего частоте модуляции амплитуды выходного поля ЛОВ.

Таким образом, синхронизация временных масштабов хаотических колебаний поля в связанных активных средах наблюдается в первую очередь для тех масштабов  $s$ , энергия которых в спектре мощности колебаний значительна. С увеличением связи диапазон временных масштабов, для которых выполняются условия (15) и (16), начинает расширяться. В синхронную динамику начинают вовлекаться масштабы, которые находятся вблизи наиболее интенсивных масштабов и энергия которых тоже значительна. Последнее иллюстрирует рис. 14, на котором показана

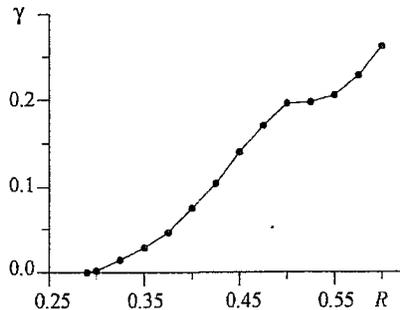
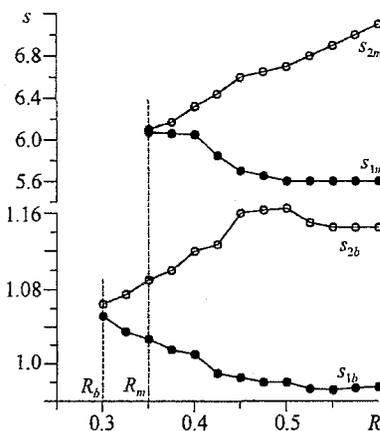


Рис. 13. Диапазоны синхронных временных масштабов  $(s_{1b}; s_{2b})$  и  $(s_{1m}; s_{2m})$  в зависимости от параметра связи  $R$  системы (36), (37)

Рис. 14. Относительная доля энергии  $\gamma$ , приходящаяся на синхронные временные масштабы для системы (36), (37)

интегральная доля энергии  $\gamma$ , приходящаяся на синхронные временные масштабы. Из рисунка видно, что мера синхронизации монотонно растет с ростом амплитуды коэффициента связи. Однако даже при больших величинах  $R$ , когда на ведомую активную среду воздействует сигнал ведущей системы весьма значительной мощности ( $R^2 \sim 0.3 \div 0.4$ ), доля энергии, приходящаяся на синхронные масштабы, не превышает величины  $\gamma \sim 0.3$ .

Таким образом, при хаотической синхронизации двух однонаправленно связанных ЛОВ с поперечным полем при увеличении коэффициента связи  $R$  вначале наблюдается синхронизация временных масштабов колебаний вблизи наиболее интенсивного в вейвлетном спектре мощности временного масштаба  $s_b$ , близкого к частоте синхронизма электронной и электромагнитной волн. С ростом  $R$  происходит увеличение энергии синхронизованных масштабов в области базового масштаба  $s_b$  и, одновременно, возникает синхронизация временных масштабов  $\Delta s_m$ , описывающих низкочастотные модуляционные колебания амплитуды поля  $F$  в ЛОВ. С дальнейшим увеличением связи рост энергии колебательных процессов, приходящейся на синхронные временные масштабы, происходит только за счет увеличения диапазона синхронных масштабов  $\Delta s_m$ . Данное поведение двух связанных ЛОВ количественно описывает мера взаимной хаотической синхронизации  $\gamma = \gamma(R)$ .

#### 4. Выводы

Из проведенного рассмотрения видно, что существует очень тесная взаимосвязь между всеми типами хаотической синхронизации. К сожалению, до конца не ясно, каким образом можно различить фазовую<sup>4</sup> и обобщенную синхронизации, исходя из анализа только динамики временных масштабов, не прибегая к другим методам, а также каково именно соотношение между этими двумя типами хаотической синхронизации. По всей видимости, в ряде случаев оба этих типа эквивалентны, однако данный вопрос требует дальнейшего всестороннего изучения. Обсудим несколько важных аспектов синхронизации временных масштабов.

Во-первых, традиционный подход по выявлению режима фазовой синхронизации, основанный на введении мгновенной фазы  $\phi(t)$  хаотического сигнала, является корректным для таких временных рядов, которые характеризуются фурье-спектром с ярко выраженной основной частотой  $f_0$ . В этом случае фаза  $\phi_{s_0}$ , введенная для временного масштаба  $s_0$ , приближенно совпадает с фазой  $\phi(t)$  хаотического сигнала, введенной традиционным способом (см. также [40]). Действительно, поскольку остальные частоты (или, можно сказать, остальные временные масштабы) не играют значительной роли в фурье-спектре, фаза  $\phi(t)$  хаотического сигнала близка к фазе  $\phi_{s_0}(t)$  основной частотной компоненты  $f_0$  (и, соответственно, основного временного масштаба  $s_0$ ). Очевидно, что в этом случае средние частоты  $\bar{f} = \langle \dot{\phi}(t) \rangle / 2\pi$  и  $\bar{f}_{s_0} = \langle \dot{\phi}_{s_0}(t) \rangle / 2\pi$  должны совпадать друг с другом и с основной частотой  $f_0$  фурье-

<sup>4</sup>В данном случае под фазовой синхронизацией понимается ситуация, когда с помощью традиционных методов (4)–(7) могут быть корректно введены мгновенные фазы  $\phi_{1,2}(t)$  хаотического сигнала, для которых будет выполняться условие захвата фаз (15).

спектра (см. также [37])

$$\bar{f} = \bar{f}_{s0} = f_0. \quad (40)$$

Если же хаотическая временная реализация характеризуется фурье-спектром, в котором отсутствует ярко выраженная основная спектральная компонента (как, например, спектр для системы Ресслера, приведенный на рис. 2), то традиционный подход (4)–(7) уже не работает и может давать некорректные результаты. Очевидно, что в этом случае необходимо рассматривать поведение системы на различных временных масштабах, что в принципе невозможно сделать, используя понятие мгновенной фазы  $\phi(t)$  хаотического сигнала, определяемой соотношениями (4)–(7). Предложенный в [44] подход, основанный на введении в рассмотрение непрерывного множества фаз исследуемого сигнала, напротив, может быть использован для любого типа хаотического сигнала.

Во-вторых, предложенный подход может быть использован для анализа экспериментальных данных, поскольку он не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, в ряде случаев применение вейвлетного преобразования может уменьшить влияние шума (см. [49, 65, 66]). Представляется вполне вероятным, что описанная методика может быть полезной и эффективной для анализа временных рядов, порождаемых физическими, биологическими, геологическими и другими системами, такими как описанные в [11, 39, 40].

В-третьих, важно отметить, что анализ поведения системы на всех временных масштабах, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании, позволяет рассматривать различные типы поведения связанных осцилляторов (полная синхронизация, lag-синхронизация, фазовая синхронизация, асинхронные колебания и т.д.) с единой точки зрения. Очевидно, что количество синхронизованных временных масштабов однозначно определяют тип поведения. Вышеизложенный подход с незначительными изменениями может быть применен для описания поведения динамических систем под внешним (например, гармоническим) воздействием.

В-четвертых, показано, что аналогичные подходы возможны при использовании не вейвлетного, а фурье-анализа при правильном выборе критерия наличия хаотической синхронизации спектральных компонент. Подобный подход позволил установить некоторые общие закономерности поведения связанных динамических систем, в частности, степенной закон изменения временного запаздывания между спектральными компонентами при изменении параметра связи между системами.

Итак, в настоящей работе предложен новый подход для описания явления синхронизации, основанный на рассмотрении динамики систем на различных временных масштабах. По всей видимости, можно говорить о некотором новом типе хаотической синхронизации – синхронизации временных масштабов динамических систем, который тесным образом связан с другими типами синхронизации. Введение в рассмотрение такого типа синхронизации хаотических систем позволяет взглянуть на явление синхронизации с единых позиций. Стоит отметить, что данный подход может быть применен к любым динамическим системам (в том числе и к динамическим системам с плохо определенной фазой) и экспериментальным временным рядам.

Новый подход был проиллюстрирован на примере связанных систем Рёсслера, Рёсслера и Лоренца, а также связанных распределенных сред электронно-волновой природы с обратной волной.

Авторы благодарны чл.-корр. РАН Трубецкову Д.И., профессору Безручко Б.П. и его научной группе за проявленный интерес к работе и плодотворные обсуждения.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05 - 02 - 16273 и 05 - 02 - 16286), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ - 1250.2003.02), а также Научно-образовательного центра «Нелинейная динамика и биофизика» при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). Авторы благодарят также фонд некоммерческих программ «Династия» и Международный центр фундаментальной физики (Москва) за финансовую поддержку.*

### Библиографический список

1. Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д. Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
2. Parlitz U., Junge L., Lauterborn W. Experimental observation of phase synchronization // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54, № 2. P. 2115–2117.
3. Tang D.Y., Dykstra R., Hamilton M.W., Heckenberg N.R. // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 57, № 3. P. 3649–3651.
4. Allaria E., Arecchi F.T., Garbo A.D., Meucci R. Synchronization of homoclinic chaos // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 86, № 5. P. 791–794.
5. Ticos C.M., Rosa E., Pardo W.B., Walkenstein J.A., Monti M. Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, № 14. P. 2929.
6. Rosa E., Pardo W.B., Ticos C.M., Wakenstein J.A., Monti M. Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 11. P. 2551–2563.
7. Трубецков Д.И., Храмов А.Е. О синхронизации хаотических автоколебаний в распределённой системе «винтовой электронный поток – встречная электромагнитная волна» // *Радиотехника и электроника*. 2003. Vol. 48, № 1. P. 116–124.
8. Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е. Синхронизация распределенных автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной // *Изв. вузов. Радиофизика*. 2004. Vol. XLVII, № 5–6. P. 343–372.
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A. Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D*. 2005. Vol. 207 (in press).
10. Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B., Igoshcheva N.B., Bordyugov G.V. Entrainment between heart rate and weak nonlinear forcing // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2339–2348.
11. Elson R.C. et al. Synchronous Behavior of Two Coupled Biological Neurons // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 25. P. 5692–5695.

12. *Rulkov N.F.* Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65. P. 041922.
13. *Tass P.A. et al.* Synchronization Tomography: A Method for Three-Dimensional Localization of Phase Synchronized Neuronal Populations in the Human Brain using Magnetoencephalography // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, № 8. P. 088101.
14. *Prokhorov M. et al.* Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system // *Phys. Rev. E.* 2003. Vol. 68. P. 041913.
15. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
16. *Anshchenko V.S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* Non-linear Dynamics of chaotic and stochastic systems. Tutorial and Modern Developments. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
17. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Phase synchronisation in regular and chaotic systems // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. Vol. 10, № 10. P. 2291–2305.
18. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* Synchronization of self-oscillations and noise-induced oscillations // *Journal of Communications Technology and Electronics.* 2002. Vol. 47, № 2. P. 117–148.
19. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78, № 22. P. 4193–4196.
20. *Zheng Z., Hu G.* Generalized synchronization versus phase synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 6. P. 7882–7885.
21. *Taherion S., Lai Y.C.* Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 59, № 6. P. R6247–R6250.
22. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronisation in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64, № 8. P. 821–824.
23. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Driving systems with chaotic signals // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 44, № 4. P. 2374–2383.
24. *Murali K., Lakshmanan M.* Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 6. P. 4882–4885.
25. *Murali K., Lakshmanan M.* Transmission of signals by synchronization in a chaotic Van der Pol-Duffing oscillator // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 48, № 3. P. R1624–R1626.
26. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51, № 2. P. 980–994.
27. *Kocarev L., Parlitz U.* Generalized Synchronization, Predictability, and Equivalence of Unidirectionally Coupled Dynamical Systems // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 11. P. 1816–1819.
28. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 5. P. R4508–R4511.
29. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, № 11. P. 1804–1807.
30. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurth J.* Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, № 3. P. 2353–2361.
31. *Boccaletti S., Valladares D.L.* Characterization of intermittent lag synchronization // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497–7500.

32. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 70, № 2. P. 169–175.
33. *Ланда П.С.* К вопросу о частичной синхронизации // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2004. Vol. 12, № 4. P. 48–59.
34. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 53, № 5. P. 4528–4535.
35. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 52, № 4. P. 3420–3439.
36. *Pyragas K.* Conditional Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 56, № 5. P. 5183–5188.
37. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // *Радиотехника и электроника*. 2004. Vol. 49, № 1. P. 76–82.
38. *Pikovsky A., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // *Physica D*. 1997. Vol. 104, № 4. P. 219–238.
39. *Lachaux J.P. et al.* Studying single-trials of the phase synchronization activity in the brain // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. Vol. 10, № 10. P. 2429–2439.
40. *Quiroga R.Q., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* Performance of different synchronization measures in real data: a case study on electroencephalographic signals // *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. P. 041903.
41. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Letters*. 1996. Vol. 34, № 3. P. 165–170.
42. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* Locking-based frequency measurement and synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 26. P. 264102.
43. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Vol. 79, № 7. P. 391–395.
44. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos*. 2004. Vol. 14, № 3. P. 603–610.
45. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Новый тип универсальности при хаотической синхронизации динамических систем // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Vol. 80, № 1. P. 25–28.
46. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Синхронизация спектральных компонент связанных хаотических осцилляторов // *Письма в ЖЭТФ*. 2004. Vol. 30, № 18. P. 56–64.
47. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71, № 5. P. 056204.
48. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Levin Yu.I.* Synchronization of chaotic oscillator time scales // *ЖЭТФ*. 2005. Vol. 127, № 4. P. 886–897.
49. *Koronovskii A.A., Hramov A.E.* Continuous wavelet analysis and its applications (In Russian). Moscow, Fizmatlit. 2003.

50. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. SIAM, 1992.
51. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Springer Verlag. 1994.
52. *Torresani B.* Continuous wavelet transform. Paris: Savoire. 1995.
53. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Vol. 166, № 11. P. 1145.
54. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Известия РАН, Сер. физическая. 2000. Vol. 64, № 12. P. 2383–2390.
55. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Введение в непрерывный вейвлетный анализ для специалистов в области нелинейной динамики. Часть 1. Основные положения, численная реализация и модельные сигналы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Vol. 9, № 4,5. P. 3–43.
56. *Grossman A. and Morlet J.* Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15, № 4. P. 273.
57. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Анализ фазовой хаотической синхронизации с помощью непрерывного вейвлетного анализа // Письма в ЖТФ. 2004. Vol. 30, № 14. P. 29–36.
58. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633–644.
59. *Sosnovtseva O. V., Balanov A. G., Vadivasova T. E., Astakhov V. V., Mosekilde E.* Loss of lag synchronization in coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1999 Vol. 60, № 6. P. 6560–6565.
60. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* Хаотическая синхронизация однонаправленно связанных электронных сред со встречной волной // ЖТФ. 2005. Vol. 75, № 4. P. 1–9.
61. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Rempen I.S.* Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves // Chaos. 2005. Vol. 15, № 1. P. 013705.
62. *Кузнецов С.П., Четвериков А.П.* К теории лампы обратной волны с поперечным полем // Радиотехника и электроника. 1978. Vol. 23, № 2. P. 385.
63. *Трубецков Д.И., Четвериков А.П.* Автоколебания в распределённых системах «электронный поток — встречная (обратная) электромагнитная волна» // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994 Vol. 2, № 5. P. 3.
64. *Четвериков А.П.* Нелинейная динамика системы взаимодействующих встречных электромагнитной волны и электронной волны с кубичной фазовой нелинейностью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Vol. 2, № 5. P. 46.
65. *Torrence C., Compo G.P.* A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79, № 1. P. 61–78.
66. *Гусев В.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Применение адаптивных вейвлетных базисов к анализу нелинейных систем с хаотической динамикой // Письма в ЖТФ. 2003. Vol. 29, № 18. P. 61–69.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.12.2004

## SOME APPROACHES FOR CHAOTIC SYNCHRONIZATION ANALYSIS IN COUPLED DYNAMICAL SYSTEMS

*A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, P.V. Popov, A.E. Hramov*

In this paper synchronization in coupled chaotic oscillators is investigated. New approaches proposed to the detection of synchronous behavior of oscillators are applied for the research of chaotic synchronization both in systems with a small number of freedom degrees as in spatially extended self-oscillated systems.



*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), кандидат физико-математических наук (1997). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой деятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Соавтор монографий «Нелинейная динамика в действии» и «Непрерывный вейвлетный анализ», вышедших в Издательстве ГосУНЦ «Колледж». Автор ряда статей в центральной печати.



*Москаленко Ольга Игоревна* – родилась в 1984 году. Студентка 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы – взаимосвязь различных типов хаотической синхронизации в сосредоточенных автоколебательных системах. Лауреат фонда некоммерческих программ «Династия» и Международного центра фундаментальной физики. Автор трех статей в отечественных и зарубежных журналах.



*Попов Павел Вячеславович* – родился в 1984 году. Студент 4 курса факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета. Научные интересы – синхронизация в распределенных автоколебательных системах электронно-волновой природы. Лауреат Фонда некоммерческих программ «Династия» и Международного центра фундаментальной физики. Автор 3 статей в отечественных и зарубежных журналах.



*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов - радиофизика в той ее части, которая связана со взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями, нелинейная динамика распределенных активных сред, методы анализа и моделирования динамических систем. Опубликовал в соавторстве с чл.-корр. РАН, профессором Д.И. Трубецковым книгу «Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков» (Т. 1, М.: Физматлит, 2003; Т. 2, М.: Физматлит, 2004) и в соавторстве с доцентом А.А. Короновским монографии «Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения» (Москва: Наука, Физматлит, 2003) и «Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2002). E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru