



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья  
УДК 519.63; 621.822.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003097  
EDN: REYSBQ

## Решение нелинейной задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения\*

П. Е. Федотов<sup>1</sup>✉, Н. В. Соколов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, Россия

<sup>2</sup>Казанский национальный исследовательский технологический университет, Россия

E-mail: ✉paulfedotov@mail.ru, sokol-88@list.ru

Поступила в редакцию 10.10.2023, принята к публикации 7.02.2024,  
опубликована онлайн 1.03.2024, опубликована 29.03.2024

**Аннотация.** Цель настоящего исследования состоит в предложении эффективного численного метода решения обратной нелинейной задачи о движении диска ротора компрессора в упорном подшипнике скольжения. *Методы.* Построена периодическая термоупругогидродинимическая математическая модель гидродинамических и тепловых процессов в подшипнике при условии осевого движения диска ротора. В рамках модели сформулирована обратная нелинейная задача определения положения ротора при заданном изменении внешней нагрузки. Предложен итерационный метод решения, использующий решение прямой задачи. Для снижения вычислительных затрат применен модифицированный метод Деккера–Брента совместно с модифицированным методом Ньютона. *Результаты.* Проведены численные эксперименты, показавшие эффективность предложенных подходов. Предложенные методы позволяют существенно сократить требуемое количество ресурсов для расчёта за счёт снижения числа обращений к целевой функции в задаче оптимизации. Построен комплекс программ, позволяющий рассчитывать нелинейную систему движения ротора при различных физических и геометрических параметрах. *Заключение.* Предложен эффективный комплекс численных методов решения обратной нелинейной задачи о движении диска ротора компрессора в упорном подшипнике скольжения. Эффективность метода заключается в существенной экономии вычислительных ресурсов. Показана эффективность метода при проведении численных экспериментов.

**Ключевые слова:** упорный подшипник скольжения, дифференциальные уравнения, обратная нелинейная задача, zeroIn, метод Деккера–Брента, метод Ньютона.

**Благодарности.** Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ–2030»).

**Для цитирования:** Федотов П. Е., Соколов Н. В. Решение нелинейной задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 180–196. DOI: 10.18500/0869-6632-003097. EDN: REYSBQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

\*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023».

## Solving a nonlinear problem for a one-sided dynamically loaded sliding thrust bearing\*

P. E. Fedotov<sup>1</sup>✉, N. V. Sokolov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Kazan (Volga Region) Federal University, Russia

<sup>2</sup>Kazan National Research Technological University, Russia

E-mail: ✉paulfedotov@mail.ru, sokol-88@list.ru

Received 10.10.2023, accepted 7.02.2024, available online 1.03.2024, published 29.03.2024

**Abstract.** The purpose of this study is to propose an efficient numerical method for solving the inverse nonlinear problem of the movement of the compressor rotor collar in a fluid film thrust bearing. *Methods.* A periodic thermoelastohydrodynamic (PTEHD) mathematical model of hydrodynamic and thermal processes in a bearing is constructed under the condition of the rotor collar motion. Within the framework of the model, an inverse nonlinear problem of determining the position of the collar under a given external load is formulated. An iterative solution method is proposed, which utilizes the solution of the direct problem. To reduce computational costs, a modified Dekker–Brent method is employed in conjunction with a modified Newton’s method. *Results.* Numerical experiments have been conducted, demonstrating the effectiveness of the proposed approaches. The suggested methods significantly reduce the required computational resources by minimizing the number of calls to the target function in the optimization problem. A software suite has been developed that allows for the calculation of the nonlinear system of rotor motion under various physical and geometric parameters. *Conclusion.* An efficient set of numerical methods for solving the inverse nonlinear problem of the motion of the rotor collar in the compressor fluid film thrust bearing is proposed. The method’s effectiveness lies in substantial savings of computational resources. The method’s efficiency has been demonstrated in numerical experiments.

**Keywords:** fluid film thrust bearing, differential equations, inverse nonlinear problem, zeroin, Dekker–Brent method, Newton’s method.

**Acknowledgements.** This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY–2030”).

**For citation:** Fedotov PE, Sokolov NV. Solving a nonlinear problem for a one-sided dynamically loaded sliding thrust bearing. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(2):180–196. DOI: 10.18500/0869-6632-003097.

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Традиционно в качестве опоры ротора компрессорной машины с вращающимся ротором и действующими на него силовыми нагрузками применяются подшипники жидкостного трения [1, 2]. Их распространенность обусловлена отличными быстроходностью и долговечностью при соблюдении определенных условий: регулярная проверка физико-химических показателей масла, чистота фильтрации масла, температурные режимы и пр. Одним из основных аспектов при расчете и проектировании внутренней компоновки корпуса компрессора является обеспечение устойчивого пространственного движения ротора на опорах скольжения, которое проверяется на этапе механических испытаний корпуса. При этом отличительной особенностью возникновения недопустимых вибраций в роторных системах компрессоров являются частые осевые (продольные) колебания. Стоит отметить, для полного анализа и прогнозирования вибрационного состояния роторной системы многие авторы указывают на необходимость изучения ее вибродинамического состояния с учетом гидродинамических процессов в подшипниках скольжения [3, 4].

\*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear days in Saratov for young scientists–2023”.

Исследуемый упорный подшипник скольжения служит для уменьшения износа и трения между вращающимися и неподвижными частями конструкции, восприятия возмущающих сил вдоль оси ротора компрессора и фиксации ротора относительно корпуса в осевом направлении, в том числе при переходных режимах компрессора. Осевые силы могут возникнуть от суммарного перепада давления на рабочих ступенях 2 (рис. 1), от внутренних нестационарных газодинамических процессов сжимаемого газа в проточной части центробежного компрессора (ЦК), от перепада давления сжимаемого газа между сторонами нагнетания и всасывания винтового компрессора (ВК) высокого давления (с конечным давлением более 10 МПа) и/или от осевой составляющей нагрузки косозубого зубчатого зацепления, например, мультипликаторного центробежного компрессора [1, 2, 5, 6].

Исследование нелинейных динамических режимов работы подшипников скольжения не имеет общего распространения, что связано со сложным совместным решением уравнений гидродинамики подшипника и динамики ротора, несмотря на свою более высокую точность расчета динамики ротора турбомшины. Как правило, решается линейная (линеаризованная) постановка с выводом коэффициентов жесткости и демпфирования смазочного слоя подшипника [7, 8]. При расчете упорного подшипника воспринимаемую осевую силу для упрощения процедуры расчета принимают, как правило, постоянной. Однако осевая нагрузка в значительной степени зависит от переменных внутренних физических параметров сжимаемой газовой среды в процессе работы центробежного или винтового компрессора. Особый интерес представляют переходные (неустановившиеся) режимы работы компрессора. Они могут наблюдаться при включении компрессора во внешнюю сеть, содержащую инерционность и емкость; при отключении компрессора от сети; при изменении характеристик самого компрессора, например, при изменении частоты вращения ротора ЦК [5, 6, 9]. Отдельно необходимо рассматривать опасные для прочности конструкции ЦК режимы, связанные с нестационарными газодинамическими процессами непосредственно в проточной части: срыв, вращающийся срыв и помпаж [6, 9, 10]. При переходных режимах на упорный подшипник действует дополнительная нерасчетная динамическая составляющая осевой силы, что приводит к изменению нагрузки по абсолютной величине и в некоторых случаях направлению. Результатом этого может быть выход из строя упорного подшипника вследствие возможного касания диска ротора и рабочей поверхности подушек подшипника.

Теоретический анализ возможных осевых перемещений ротора компрессора под действием внешней нагрузки позволяет в процессе проектирования корпуса оценить правильность выбора геометрических и рабочих параметров роторной системы и выбрать, как следствие, оптимальный

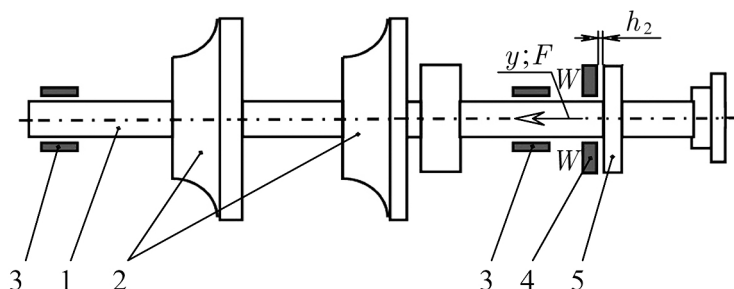


Рис. 1. Схема роторной части центробежного компрессора: 1 – вал; 2 – рабочая ступень; 3, 4 – опорный и упорный подшипники скольжения; 5 – упорный диск;  $h_2$  – рабочий зазор упорного подшипника

Fig. 1. Scheme of the rotary part of a centrifugal compressor: 1 – shaft; 2 – working stage; 3, 4 – fluid film journal and thrust bearings; 5 – collar;  $h_2$  – working clearance of the thrust bearing

вариант ее компоновки с учетом осевого воздействия упорного подшипника. При этом основой этого анализа являются определение осевого перемещения диска ротора при заданной компоновке и условия работы упорного подшипника с сохранением требования к надежности и долговечности его работы. Таким образом, динамические условия работы упорных подшипников скольжения ЦК и ВК и обеспечение устойчивости осевого перемещения диска ротора определяют актуальность исследований настоящего направления. Для описания динамического поведения ротора использована нелинейная задача, описанию решения которой посвящена данная статья.

## 1. Постановка задачи

Рассматриваемый упорный подшипник скольжения состоит из неподвижных (фиксированных) подушек 1, 2 цельного кольцевого подпятника и вращающегося упорного диска 3, которые разделены между собой смазочными слоями 4 над поверхностью подушек (рис. 2). Такое разделение обеспечивается посредством возникновения гидродинамического давления в смазочных слоях за счет вращения диска 3, сужающего конфузорного зазора по направлению вращения и подачи смазки необходимого объема и требуемой вязкости. При вращении диска 3 смазка поверхностью увлекается в сужающийся клиновидный зазор, в результате чего давление в смазочных слоях 4 подшипника возрастает и уравнивает приложенную извне нагрузку. Пространство между подушками заполнено межподушечными каналами 5 (МПК), через которые подается свежая смазка с постоянным давлением 0.24...0.26 МПа (абс.) от внешней системы смазки компрессорной установки. В МПК на поверхности диска и при условии его вращения формируется тонкий пограничный слой смазки 6, участвующий в сложном теплообменном процессе смешивания смазки [11]. С одной стороны, пограничный слой переносит при вращении диска нагретую за счет диссипации смазку с температурой  $t|_{\varphi=0_p}$  с предыдущей подушки на последующую. С другой стороны, воспринимает поступающую из МПК свежую смазку с пониженной температурой  $t_0$ , формируя таким образом важную начальную температуру  $t|_{\varphi=0}$  на входе в последующую подушку. Все подушки подшипника имеют единую и уникальную геометрию рабочей поверхности, называемую профилем. В работе рассматриваются два наиболее часто применяемые в компрессорной технике профиля неподвижной поверхности подушки: параллельный межподушечному каналу (МПК) скос (см. рис. 2, а) и винтовая поверхность клинового колоса (см. рис. 2, б). Профиль, в свою очередь, позволяет возникать гидродинамическому давлению с определенной эпюрой, интеграл которой по рабочей поверхности подушки образует несущую способность  $P$ , уравнивающую внешнюю осевую силу  $F$  и обеспечивающую гарантированный зазор  $h_2$  для исключения касания подушек о диск, в том числе во время переходных режимов ЦК и ВК.

Описанием принципа действия, условий функционирования и математических основ работы подшипников скольжения занимается гидродинамическая теория смазки. Результатом ее последовательного развития является *периодическая термоупругогидродинамическая (ПТУГД) теория* [12]. Такая постановка наиболее полно описывает совместно протекающие гидродинамические и тепловые процессы в смазочном и пограничном слоях, тепловые процессы в несущей подушке и вращающемся элементе с учетом термоупругих деформаций подушки от перепада температур по толщине и направлению вращения элемента. Особенностью этой постановки является то, что для уравнения внутренней энергии, описывающего аккумуляцию и распространение теплоты, задаются периодические тепловые граничные условия возле входной кромки подушки при  $\varphi = 0$  [13–15]. Это позволяет напрямую рассчитывать заранее неизвестную температуру на входе в подушку  $t|_{\varphi=0}$  в процессе вычислений и не проводить предварительные расчеты температуры путем последовательных приближений [12]. Такая постановка также позволяет учитывать температурные поля подушки и особенно упорного диска с учетом теплообмена с внешней средой.

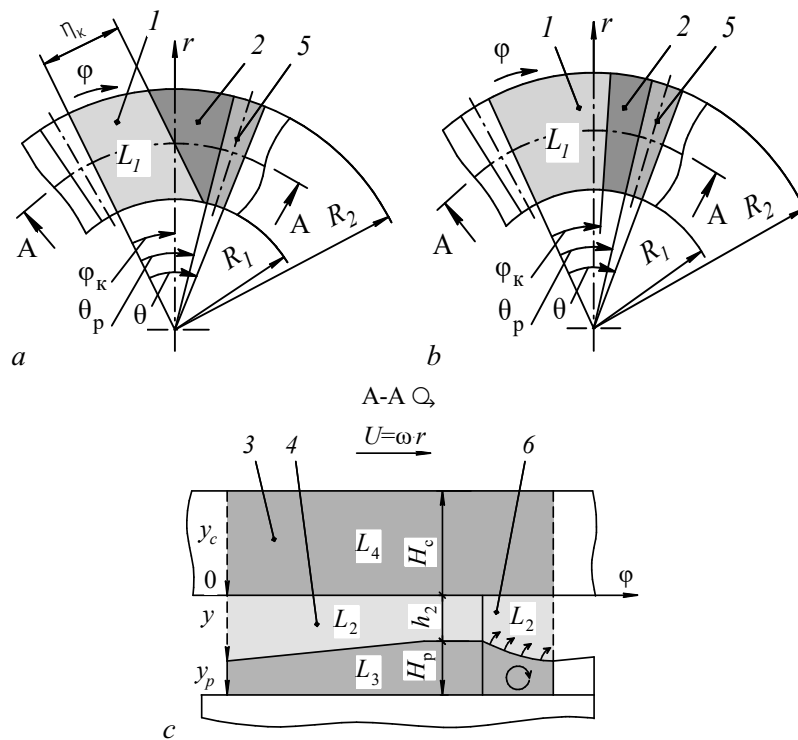


Рис. 2. Расчетная схема упорного подшипника скольжения: *a* – профиль подушки с параллельным МПК скосом; *b* – профиль подушки с винтовой поверхностью; *c* – разрез по А-А вдоль среднего радиуса: 1, 2 – клиновидная и плоские части подушки; 3 – упорный диск; 4 – смазочный слой; 5 – междуподушечный канал; 6 – пограничный слой

Fig. 2. Calculation scheme of the fluid film thrust bearing: *a* – pad profile with a parallel taper land; *b* – pad profile with a helical surface; *c* – section along A-A along the middle radius: 1, 2 – wedge and flat parts of the pad; 3 – collar; 4 – lubricating film; 5 – interpad groove; 6 – boundary layer

Как следствие, из-за совокупности учитываемых факторов течения смазки и распространения теплоты в элементах упорного подшипника ПТУГД теория имеет наибольшую сходимость при верификации результатов численного расчета с физическими экспериментами [16].

При выводе уравнений ПТУГД математической модели работы упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками компрессора приняты следующие упрощения, позволившие существенно упростить исходные уравнения Навье–Стокса.

1. Толщина смазочного слоя мала по сравнению с радиальным  $r$  и окружным  $\varphi$  направлениями. Для упорного подшипника это направление  $y$ , ограниченное поверхностью диска при  $y = 0$  и подушки при  $y = h$  (см. рис. 2).
2. Градиент давления по толщине смазочного слоя принимается равным нулю  $\partial p / \partial y = 0$  по сравнению с радиальным и окружным градиентами давления и при анализе не учитывается.
3. Силы инерции незначительны исходя из анализа порядка величин уравнений Навье–Стокса, то есть субстанциональные производные скоростей  $DV_{r(\varphi,y)} / dt = 0$ . Это означает также, что силы вязкости смазки преобладают над силами инерции.
4. Течение в смазочном слое предполагается ламинарным при отсутствии вихревого течения и турбулентности внутри слоя, что согласуется с пренебрежимо малыми силами инерции.
5. На смазочный слой не действуют массовые силы (центробежные, гравитационные и пр.).
6. На границе с поверхностью твердых элементов подшипника, то есть диска при  $y = 0$  и подушки при  $y = h$ , смазка находится в неподвижном состоянии либо движется со скоростью этой поверхности (условие прилипания смазки).

7. Анализ порядка величин скоростей в уравнении Навье–Стокса показал доминирующее влияние градиентов скоростей по толщине смазочного слоя  $\partial V_r / \partial y$  и  $\partial V_\varphi / \partial y$  над остальными.
8. Смазка является ньютоновской и изотропной, то есть физические свойства в каждой ее точке одинаковы во всех направлениях.

Далее ПТУГД математическая модель представлена в безразмерном виде через относительные (безразмерные) величины, отнесенные к характерным размерам (знак « $\bar{\cdot}$ » над величиной). Основными определяющими уравнениями с соответствующими граничными условиями являются:

1. Обобщенное уравнение Рейнольдса, описывающее двумерное распределение давления в смазочном слое области  $\bar{L}_1$  ( $-1 \leq \bar{r} \leq 1$ ,  $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$ ,  $0 \leq \bar{y} \leq 1$ ) и представляющее собой основное уравнение гидродинамики подшипника. Уравнение выведено с минимумом ограничительных допущений, в котором плотность и вязкость смазки являются функциями всех трех координат. В безразмерном нестационарном виде уравнение принимает следующую форму:

$$-\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[ (\sigma \bar{r} + 1) \bar{h}^3 \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right] - \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \frac{\bar{h}^3}{\sigma \bar{r} + 1} \bar{f}_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\varphi}} \right] =$$

$$= -\text{Re} \psi \sigma \lambda^2 \frac{\partial (\bar{h}^3 \bar{f}_1)}{\partial \bar{r}} + \bar{\omega} (\sigma \bar{r} + 1) \frac{\partial (\bar{h} \bar{f}_2)}{\partial \bar{\varphi}} + Sh (\sigma \bar{r} + 1) \bar{A}, \quad (1)$$

где  $\bar{r}$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{y}$  – безразмерные координаты;  $\bar{p} = p h_{20}^2 / (\mu_0 \omega_* R_{cp}^2 \theta)$  – местное безразмерное давление;  $\bar{A} = \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left( \bar{h} \int_0^1 \bar{\rho} d\bar{y} \right) - \bar{\rho}_{\bar{y}=1} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{\tau}}$  – нестационарный множитель;  $\bar{f}_0$ ,  $\bar{f}_1$ ,  $\bar{f}_2$  – функции, учитывающие переменность вязкости смазки по толщине слоя;  $\lambda$ ,  $\sigma$  – относительные длина и ширина подушки;  $\psi = h_{20} / (R_{cp} \theta)$  – относительная толщина;  $\theta$  – угловая протяженность подушки с МПК;  $\bar{\omega}$ ,  $\omega_*$  – текущая безразмерная и характерная (как правило, максимальная) угловые скорости диска;  $R_{cp}$  – средний радиус подушки;  $h_{20}$  – характерная толщина смазочного слоя подшипника;  $\mu_0$  – вязкость при температуре подачи смазки  $t_0$  в МПК;  $\bar{\tau} = \tau / \tau_*$  – безразмерное время.

2. Уравнение баланса внутренней энергии, описывающее трехмерное распределение температуры в смазочном и пограничном слоях области  $\bar{L}_2$  ( $-1 \leq \bar{r} \leq 1$ ,  $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$ ,  $\bar{\theta}_p \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}$ ,  $0 \leq \bar{y} \leq 1$ ). В дивергентном размерном нестационарном виде уравнение энергии принимает следующую форму:

$$c_p \left( \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + t \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (c_p \rho r V_r t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{c_p \rho}{r} V_\varphi t - \frac{\lambda_o}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( c_p \rho V_y t - \lambda_o \frac{\partial t}{\partial y} \right) = \mu \left[ \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где  $t$  – местная температура,  $c_p$ ,  $\lambda_o$  – изобарная теплоемкость и теплопроводность смазки,  $\rho$  – местная плотность смазки. Преобразование в безразмерный вид уравнения (2) выполнено на этапе численной реализации с использованием безразмерной температуры  $\bar{t} = c_p \rho_0 h_{20}^2 (t - t_0) / \mu_0 \omega_* R_{cp}^2 \theta$  и с сохранением дивергентной формы. Правая часть уравнения (2) описывает диссипацию механической энергии и превращение ее в тепловую.

3. Трехмерное распределение температур в областях подушки  $\bar{L}_3$  ( $-1 \leq \bar{r} \leq 1$ ,  $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$ ,  $0 \leq \bar{y}_p \leq 1$ ) и упорного диска  $\bar{L}_4$  ( $-1 \leq \bar{r} \leq 1$ ,  $0 \leq \bar{\varphi} \leq 1$ ,  $0 \leq \bar{y}_p \leq 1$ ) описывается собственными уравнениями теплопроводности с соответствующими граничными условиями:



на внешних границах теплообмен учитывается граничными условиями Ньютона–Рихмана; между смазочным слоем и подушкой, а также между смазочным и пограничным слоями и диском ставятся условия непрерывности температур и тепловых потоков (условие сопряжения).

В разработанной ПТУГД математической модели граничное условие для уравнения энергии (2) на входе в смазочный слой выражено в периодической форме, которая подразумевает равенство температур и тепловых потоков смазки (за счет конвекции и теплопроводности). В размерном виде в случае отсутствия перекоса подушек и биения диска условие принимает следующую форму:

$$t|_{\varphi=0} = t|_{\varphi=0}, \quad \left( \frac{c_p \rho}{r} V_{\varphi} t - \frac{\lambda_o}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = \left( \frac{c_p \rho}{r} V_{\varphi} t - \frac{\lambda_o}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0}.$$

Радиальная и окружная скорости смазки  $\bar{V}_r$  и  $\bar{V}_{\varphi}$  математической модели выведены из усеченных уравнений Навье–Стокса после оценки безразмерных величин по методу Н. А. Слезкина и с учетом условия равенства нулю градиента давления по высоте зазора  $\bar{h}$ . Поперечная скорость  $\bar{V}_y$  получена решением усеченного уравнения Навье–Стокса вдоль оси [17].

Форма зазора плоскоклиновой поверхности неподвижной подушки упорного подшипника скольжения при отсутствии перекосов в безразмерном виде выглядит следующим образом:

- в случае параллельного МПК скоса (см. рис. 2, а)

$$\bar{h} = \frac{h}{h_{20}} = 1 - \bar{y} + \varepsilon_0 \left[ 1 - \frac{(\sigma \bar{r} + 1)}{\bar{\eta}_k} \sin(\sigma \lambda \bar{\varphi}) \right] \delta_k + \alpha_p^* \chi \frac{\Psi_p}{\psi} \int_0^1 [\bar{T}_p(\bar{\theta}_p, \bar{y}_p) - \bar{T}_p(\bar{\varphi}, \bar{y}_p)] d\bar{y}_p, \quad (3)$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & 0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\varphi}_k, \\ 0, & \bar{\varphi}_k < \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_k, \end{cases} \quad \text{где } \bar{\varphi}_k = \frac{1}{\sigma \lambda} \arcsin \frac{\bar{\eta}_k}{\sigma \bar{r} + 1};$$

- в случае винтовой поверхности клинового скоса (см. рис. 2, б)

$$\bar{h} = \frac{h}{h_{20}} = 1 - \bar{y} + \varepsilon_0 \left[ 1 - \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\theta}_k \bar{\theta}_p} \right] \delta_k + \alpha_p^* \chi \frac{\Psi_p}{\psi} \int_0^1 [\bar{T}_p(\bar{\theta}_p, \bar{y}_p) - \bar{T}_p(\bar{\varphi}, \bar{y}_p)] d\bar{y}_p, \quad (4)$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & 0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_k \bar{\theta}_p, \\ 0, & \bar{\theta}_k \bar{\theta}_p < \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p, \end{cases}$$

где  $\bar{y} = y/h_{20}$  — безразмерная координата положения диска;  $\varepsilon_0 = \Delta h/h_{20}$  — относительная клиновидность подушки;  $\bar{\eta}_k = \eta_k/R_{cp}$  — относительная ширина клинового скоса;  $\alpha_p^* = \alpha_p/\beta$ ;  $\alpha_p$  — коэффициент линейного расширения материала подушки;  $\beta$  — температурный коэффициент вязкости смазки;  $\delta_k$  — единичная функция.

Четвертый член справа уравнений формы зазора (3), (4) учитывает тепловые деформации неподвижной подушки за счет свободного теплового расширения, описанные формулой А. И. Голубева для торцовых уплотнений [18]. Координата  $\bar{y}$  определяется или путем прямой подстановки в уравнение формы зазора (постановка прямой задачи), или вычисляется на основе уравнения динамики ротора компрессора (постановка обратной нелинейной задачи).

Безразмерная форма основных определяющих уравнений ПТУГД математической модели необходима для преобразования рассматриваемой размерной криволинейной области  $L_2$  ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $0 \leq \varphi \leq \theta_p$ ,  $\theta_p \leq \varphi \leq \theta$ ,  $0 \leq y \leq h$ ) в прямоугольный вид  $\bar{L}_2$  ( $-1 \leq \bar{r} \leq 1$ ,  $0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p$ ,  $\bar{\theta}_p \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}$ ,  $0 \leq \bar{y} \leq 1$ ) (см. рис. 2) на этапе численной реализации с обязательным условием сохранения дивергентной формы уравнений. Безразмерная форма необходима для уменьшения времени операций численных вычислений и сокращения общего количества исследуемых параметров при проведении последующего параметрического анализа характеристик упорного подшипника.

Дифференциальные уравнения математической модели в ПТУГД постановке и их граничные условия связаны через такие физические свойства рабочей смазки, как вязкость, плотность, теплоемкость и теплопроводность, а также через форму зазора, включающую геометрический профиль рабочей поверхности подушки, и некоторые режимные параметры. Разработанная авторами ПТУГД математическая модель и последующая ее численная реализация привели к написанию программы расчетов *Sm2Px3Txt* [19]. Программа, с учетом современной тенденции интенсификации тепловых процессов и учитываемого трехмерного распределения теплоты в элементах подшипника, позволяет изучать статические и динамические режимы работы одностороннего упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками центробежного или винтового компрессора. К статическим (интегральным) характеристикам относятся несущая способность, потери мощности на трение, расходы смазки, тепловые потоки и др. Особенности построения математической модели, описание основных определяющих уравнений Рейнольдса (область  $L_1$ ), внутренней энергии (область  $L_2$ ) и теплопроводности подушки (область  $L_3$ ) и упорного диска (область  $L_4$ ) и граничных к ним условий (см. рис. 2), обезразмеривание и специфику численной реализации можно найти в статьях [13–17, 20, 21].

Под действием изменяемой внешней нагрузки при переходных режимах работы центробежного или винтового компрессора упорный диск совершает перемещения вдоль оси ротора. Отклонение диска от произвольной заранее заданной точки определяется формулой

$$y = y_{st} + y_d,$$

где  $y_{st}$ ,  $y_d$  — статическая и динамическая составляющие положения диска. Начальное положение диска, характеризующееся зазором  $h_{20}$ , задается перед началом работы подшипника. Динамическая составляющая  $y_d$  определяет смещение диска относительно статического положения диска  $y_{st}$ .

Разработанная ПТУГД математическая модель предполагает две постановки в зависимости от определения динамической составляющей  $y_d$ :

- 1) *прямую*, при которой задается траектория перемещения диска и на его основе определяются характеристики подшипника. Решение прямой задачи описано в статье [22];
- 2) *обратную нелинейную*, при которой задается изменение внешней нагрузки и определяются положение диска и характеристики подшипника, соответствующие этому положению.

В данной работе рассматривается обратная нелинейная задача, которая основывается на совместном численном интегрировании уравнений динамики ротора и гидродинамики упорного подшипника. Форма перемещения упорного диска возле точки статического положения на кривой подвижного равновесия подшипника представляет собой геометрическое место точек, определяющих в конкретный момент времени положение центра диска, движущегося под действием внешней возмущающей силы и реакции упорного подшипника. Такая постановка позволяет исследовать влияние нелинейной реакции упорного подшипника и моделировать реальное динамическое поведение ротора при любых осевых эксцентриситетах  $e_p$  [23, 24]. Об устойчивости осевого движения ротора под действием внешней силы можно судить путем анализа амплитуды



и частоты перемещения диска ротора и возможности касания подвижной и неподвижной частей подшипника.

Ротор представляется в виде сосредоточенной массы, на которую действуют внешняя сила от компрессора  $F$  и реакция упорного подшипника  $P$ . Соотношение между положением диска, несущей способностью и внешней осевой силой выражается через уравнение динамики ротора

$$m_p \frac{d^2 y}{d\tau^2} = P - F, \quad (5)$$

где  $m_p = \text{const}$  – масса ротора,  $y$  – координата смещения диска вдоль оси ротора,  $\tau$  – время,  $P = P(\tau, y)$  – несущая способность одностороннего подшипника,  $F = F(\tau, y)$  – осевая сила. Внешняя осевая сила представляется в виде суммы статической и динамической составляющих  $F = F_{st} + F_d$ . Динамическая составляющая силы может быть задана по гармоническому закону, описывающему мягкий помпаж ЦК, или в виде кусочно-непрерывных функций в случае жесткого помпажа ЦК [6, 13]. Для решения уравнения (5) начальное условие положение диска определяется на основе решения стационарной задачи: при  $\tau = 0$  положение  $y = y_{st}$ .

Используя следующие зависимости – координата  $y = h_{20}\bar{y}$ , время  $\tau = \tau_0\bar{\tau}$ , несущая способность  $P(\bar{\tau}, \bar{y}) = C_{pf}\bar{P}(\bar{\tau}, \bar{y})$ , сила  $F(\bar{\tau}, \bar{y}) = C_{pf}\bar{F}(\bar{\tau}, \bar{y})$ ,  $C_{pf} = \frac{\mu_0\omega_*R_{cp}^3\theta^2(R_2-R_1)}{h_{20}^2}$  – уравнение (5) приобретает следующий безразмерный вид:

$$\Lambda \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{\tau}^2} = \bar{P} - \bar{F},$$

где  $\Lambda = \frac{m_p h_{20}^3}{\tau_0^2 \mu_0 \omega_* R_{cp}^3 \theta^2 (R_2 - R_1)} = \frac{m_p \psi^3 Sh}{\tau_0 \mu_0 (R_2 - R_1)}$  – приведённая масса, характеризующая инерционные свойства ротора;  $\tau_0 = 2\pi/\omega$  – безразмерное время (за характерное время принято время одного оборота диска);  $Sh = \theta/(\omega_*\tau_0)$  – число Струхалия;  $\psi = h_{20}/(R_{cp}\theta)$  – относительная толщина;  $h_{20}$  – характерная толщина слоя подшипника;  $\mu_0$  – вязкость при температуре подачи смазки  $t_0$  в МПК;  $R_1, R_2, R_{cp}$  – внутренний, наружный и средний радиусы;  $\theta_p, \theta$  – угловые протяженности подушки и элемента периодичности;  $\omega_*$  – характерная (как правило, максимальная) угловая скорость диска.

Гидродинамика упорного подшипника в свою очередь представлена несущей способностью  $i$ -ой подушки подшипника. При отсутствии биения упорного диска и перекоса общей поверхности подушек упорного подшипника несущая способность равна  $P = zP_i$ , где  $z$  – число подушек. Несущая способность  $i$ -ой подушки вычисляется путем интегрирования полей давления [15]:

$$P_i = \int_0^{\theta_p} \int_{R_1}^{R_2} p_i r d\varphi dr, \quad (6)$$

где  $p_i = p_i(\tau, y)$  – распределение давлений в смазочном слое  $i$ -ой подушки. Оно определяется на основе решения уравнения Рейнольдса элемента периодичности (см. уравнение (1)) на поверхности подушки при  $R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \theta_p$  (см. рис. 2) с учетом распределения температур и формируемой вязкости в объеме смазки [12, 13].

Безразмерная форма основных определяющих уравнений ПТУГД математической модели необходима для преобразования рассматриваемой размерной криволинейной области  $L_2(R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \theta_p, \theta_p \leq \varphi \leq \theta, 0 \leq y \leq h)$  в прямоугольный вид  $\bar{L}_2(-1 \leq \bar{r} \leq 1, 0 \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\theta}_p, \theta_p \leq \bar{\varphi} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1)$  (см. рис. 2) на этапе численной реализации с обязательным условием сохранения дивергентной формы уравнений. Безразмерная форма необходима для корректной оценки величин переменных и сокращения общего количества исследуемых параметров при проведении последующего параметрического анализа характеристик упорного подшипника.

## 2. Методика

Учитывая вид уравнения (5), задачу можно разделить на две части: стационарную, связанную со статической силой  $F_{st}$ , и нестационарную, учитывающую динамическое изменение  $F_d$ .

В случае стационарной задачи уравнение (5) будет иметь следующий вид:

$$0 = P - F_{st}. \quad (7)$$

Следовательно, необходимо уравновесить стационарную силу  $F_{st}$  за счёт поиска определенного положения диска  $y$  и расчета несущей способности  $P$ . Описанное можно свести к оптимизационной задаче

$$y : \min |P - F_{st}|. \quad (8)$$

Положение диска естественным образом влияет на толщину смазочного слоя, от которой зависят параметры системы. Если толщина смазочного слоя уменьшится до нуля, то это будет означать касание диска и подушек, что, как говорилось, приведёт к выходу из строя упорного подшипника. Следовательно, на параметр  $y$  должно быть наложено условие  $\max_{x \in L_2} h(x, y) > 0$ , где  $h$  — толщина смазочного слоя.

Несущая способность  $P$  является интегральной характеристикой, вычисление которой требует знания распределения температур и давления в упорном подшипнике. В свою очередь, температура и давление зависят друг от друга через такие физические свойства жидкости, как вязкость и плотность смазки, и определяются через систему трехмерных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Стоит отметить, что уравнение энергии (2) для вычисления температуры в смазке имеет доминирующие конвективные члены [12, 13]. Это накладывает особые требования на используемые методы, точность расчёта и, следовательно, требует вычислительных ресурсов. Для решения оптимизационной задачи (8) потребуется выбрать итерационный метод. Поскольку ищется оптимальное положение диска  $y$ , на каждой итерации метода будет выбираться некоторый  $y^{k+1}$ , для которого потребуется вычислить несущую способность  $P$  и, следовательно, произвести полный расчёт прямой стационарной задачи. Это является затратным процессом.

После решения стационарной задачи (7) возникает равновесие системы, и упорный подшипник воспринимает величину стационарной силы  $F_{st}$ . На основе этого решения можно производить дальнейшие вычисления, связанные с динамикой. Для решения уравнения (5) построим трехслойный по времени итерационный процесс.

$$m_p \frac{\hat{y}_h - 2y_h + \check{y}_h}{h_\tau^2} = P(\hat{y}_h) - F, \quad (9)$$

здесь  $y_h$  — сеточная аппроксимация смещения диска  $y$ ,  $\check{y}_h$  — смещение диска на предыдущем временном слое,  $\hat{y}_h$  — на следующем,  $h_\tau$  — шаг по времени. Записью  $P(\hat{y}_h)$  дополнительно подчёркивается зависимость несущей способности  $P$  от положения диска, а именно от значения смещения диска на следующем временном слое.

Уравнение (9) можно свести к аналогичной (8) оптимизационной задаче

$$\hat{y}_h : \min \left| \left( m \frac{\hat{y}_h}{h_\tau^2} - P(\hat{y}_h) \right) - \left( \frac{2y_h - \check{y}_h}{h_\tau^2} - F \right) \right|. \quad (10)$$

Как и в случае с (8), при некотором итерационном методе, на каждой итерации при фиксированном положении диска, необходимо решать прямую задачу, что также является крайне затратным процессом. В соответствии с этим неявная схема является предпочтительной.

Для сравнения в работах [23, 24] для подшипников скольжения авторы решали выведенную систему дифференциальных уравнений движения ротора явным методом Адамса–Башфорта, имеющим четвертый порядок точности. Из-за невозможности самостартования первые три-четыре точки кривой движения рассчитывались методом Эйлера.

### 3. Результаты

Для решения представленных оптимизационных задач, в силу их вычислительной сложности, необходимо выбрать такой метод минимизации, который будет требовать перерасчёта коэффициентов уравнения (8) и (10) как можно меньшее количество раз. Если рассматривать целевые функции поставленных оптимизационных задач, то выяснится, что на их поведение влияют физические и геометрические параметры подшипника. Единственное, о чём можно сказать с уверенностью, так это о монотонности целевой функции. Поэтому метод должен учитывать нелинейность и иметь возможность искать решение для функций различного вида. Ниже представлена Таблица количества вызовов целевой функции в зависимости от её вида.

В Таблице приведено сравнение нескольких методов оптимизации, в том числе из пакета MatLab поиска нуля функции. Опишем параметры экспериментов: `zeroin` реализует алгоритм Деккера–Брента [25] (выбрана точность  $10^{-15}$ ); `fzero` — алгоритм Деккера (точность  $10^{-15}$ ); `fminsearch` — алгоритм Нелдера–Мида (точность  $10^{-4}$ ); `fminbnd` — алгоритм золотого сечения с параболическое интерполяцией (точность  $10^{-4}$ ); `newton` — алгоритм Ньютона с производными вычисленными разностным методом (точность  $10^{-4}$ ). Метод `zeroin` представлен изменённым, были добавлены дополнительные проверки, которые в некоторых случаях позволяют уменьшить количество вызовов целевой функции. Основным методом, который рекомендует MatLab, является метод `fzero`. Поскольку некоторые методы требовали большого количества вызовов целевой функции, точность для них была понижена.

По результатам экспериментов определено, что модифицированный алгоритм `zeroin` значительно превосходит предлагаемые MatLab методы. Однако для `zeroin` необходимо знать область локализации нуля функции. Для поиска области локализации был создан метод на основе метода Ньютона. Формулируется он следующим образом. Пусть  $[a, b]$  — некоторый отрезок в области определения функции  $f$ . Если  $f(a) * f(b) < 0$ , значит,  $[a, b]$  есть область локализации и не требует уточнения. Иначе необходимо произвести сдвиг, областью локализации, в таком случае, будет  $[\alpha, \beta]$ , где

$$\alpha = (a + \Delta c)\sigma + \left(\frac{b+a}{2} + \Delta c\right)(1 - \sigma),$$

$$\beta = (b + \Delta c)\sigma + \left(\frac{b+a}{2} + \Delta c\right)(1 - \sigma).$$

Здесь  $\Delta c = \frac{\Delta b - \Delta a}{2}$ ,  $\Delta a = -f(a)/f'$ ,  $\Delta b = -f(b)/f'$ ,  $f' = (f(b) - f(a))/(b - a)$ ,  $\sigma$  — параметр сжатия, который определяет соответствие размеров начальной области и конечной.

Таблица. Количество вызовов целевой функции в зависимости от её вида.  $\rightarrow$  — решение находится на правой границе области локализации,  $\gg$  — решение сдвинуто влево от границы

Table. Number of target function calls depending on its form.  $\rightarrow$  — the solution is located at the right boundary of the localization region,  $\gg$  — the solution is shifted to the left from the boundary

Целевая функция	zeroin	fzero	fminsearch	fminbnd	newton
const $\neq 0$	1	1	29	22	200
$x - \text{const}$	3	27	36	16	4
$x^2 - \text{const} \rightarrow$	2	32	52	20	18
$x^2 - \text{const} \leftarrow$	1	1	22	20	2
$x^2 - \text{const} \ll \rightarrow$	10	32	52	15	138
$x^2 - \text{const} \gg \leftarrow$	10	24	30	15	18
$\cos(x), [0, \pi]$	4	33	52	12	8
$\cos(x), [-\pi, 0]$	4	27	34	12	8

Ниже представлены графики результатов вычислений с использованием данной методики.

Для расчёта температуры и давления используются построенная авторами статьи ПТУГД модель подшипника и комплекс программ *Sm2Px3Tht*. В качестве исходных данных для программы при численных экспериментах приняты геометрические размеры упорного подшипника скольжения центробежного компрессора, расположенного в лаборатории кафедры «Компрессорные машины и установки» ФГБОУ ВО «КНИТУ» [13–15, 17, 20, 21].

На рис. 3 представлены графики распределения температуры вдоль оси  $y$  в центре расчётной области и давления  $p$  вдоль угловой координаты  $\varphi$  при оптимальном положении диска. Как видно, температура достигает максимального значения вблизи поверхности подушки за счет торможения неподвижной поверхностью, но не превышает предельного значения  $110^\circ\text{C}$  [1, 2]. Некоторое возрастание температуры  $t$  наблюдается вблизи поверхности диска за счет переноса нагретой по причине вязкого сдвига слоев смазки с предыдущей подушки. В теле диска и подушки за счет теплообмена с окружающей средой температура несколько понижается. Ранее выбранный плоскоклиновой профиль рабочей поверхности подушки (см. рис. 2, *a, b*) определяет форму кривой распределения давления  $p$  и ее значения. При этом максимум распределения смещен в сторону вращения диска. Интеграл по рабочей поверхности позволяет вычислить несущую способность упорного подшипника  $P$ , уравнивающую внешнюю осевую силу  $F$  (см. уравнение (6)).

На рис. 4 представлены два графика, демонстрирующие работу предложенных выше алгоритмов. График на рис. 4, *a* отображает синим поведением несущей способности в зависимости от положения диска  $y$ . Дополнительно на графике отображена действующая на ротор сила  $F$  в фиксированный момент времени. Вертикальными чертами отображена область локализации равновесного состояния между несущей способностью  $P$  и силой  $F$ . График на рис. 4, *b* показывает связь между температурой в центре расчётной области (синий цвет) и траекторией движения диска во времени (красный цвет, на графике в безразмерном виде). Для демонстрации был выбран мягкий помпаж как наиболее простой. Как видно из графика, кривые практически совпадают с единой циклической частотой без временной инерции.

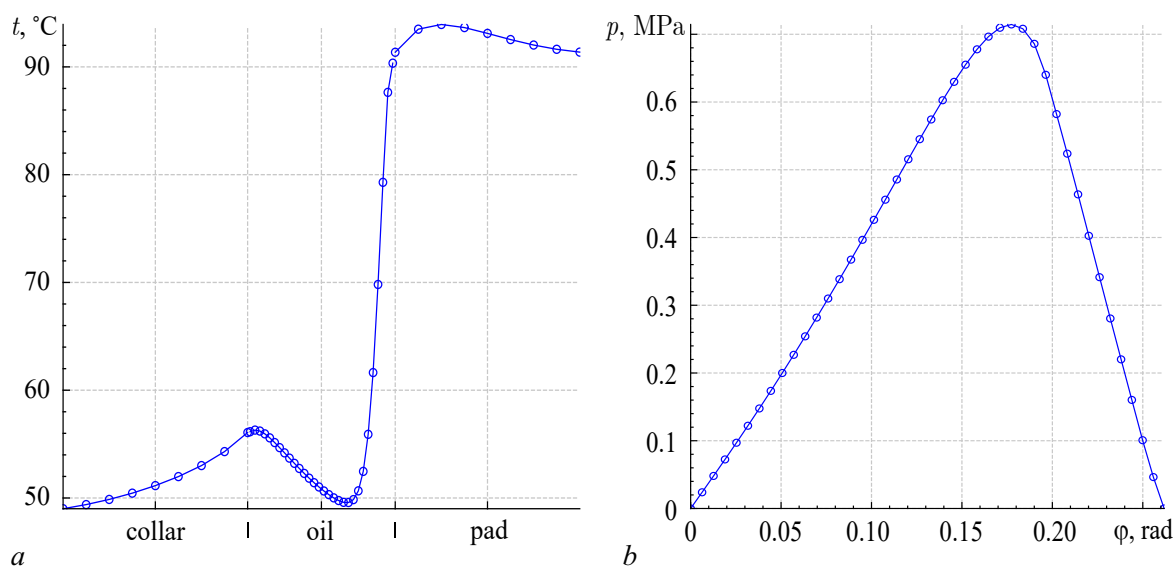


Рис. 3. Распределение при оптимальном положении диска: *a* — температуры ( $^\circ\text{C}$ ) вдоль оси  $y$ , *b* — давление (Па) вдоль угловой координаты  $\varphi$

Fig. 3. Distribution at the optimal collar position: *a* — temperature along the  $y$  axis, *b* — pressure along the angular coordinate  $\varphi$

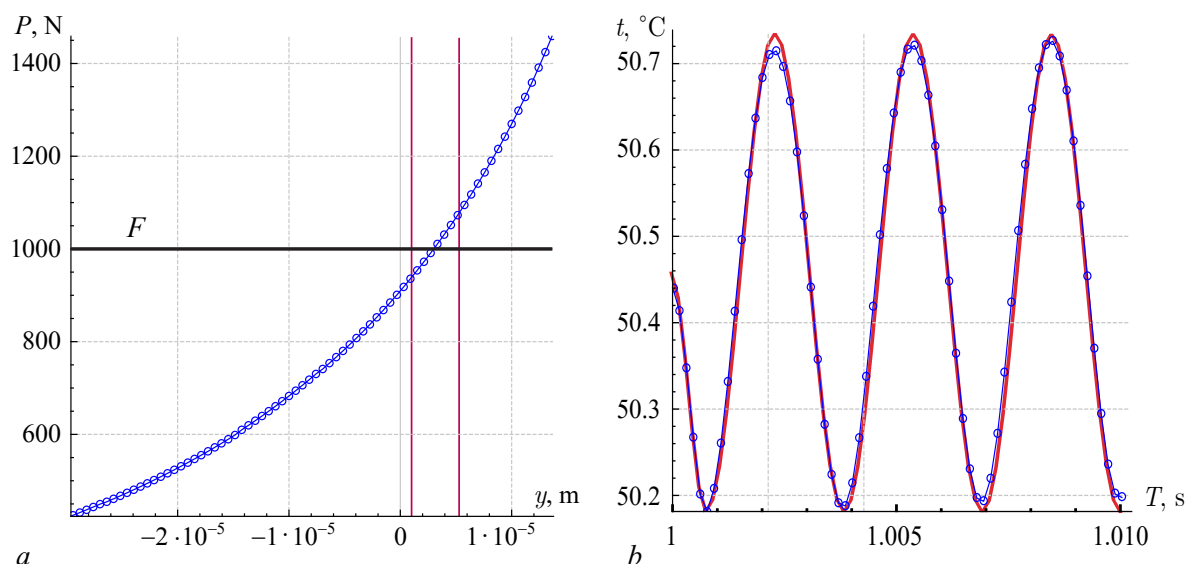


Рис. 4. Графики, демонстрирующие связь действующей на ротор силы  $F$ :  $a$  — область локализации равновесного состояния между несущей способностью  $P$  и силой  $F$ ,  $b$  — связь температуры (синяя линия) и траектории движения диска (красная линия) (цвет онлайн)

Fig. 4. Graphs demonstrating the relationship of the force  $F$  acting on the rotor.  $a$  — The region of equilibrium localization between the load-bearing capacity  $P$  and the force  $F$ ,  $b$  — the relationship between temperature (blue line) and the trajectory of the collar movement (red line) (color online)

В будущих статьях вопросы изменения интегральных характеристик упорного подшипника компрессора при решении прямой и обратной нелинейной задач, интенсивности помпажа и частоты вращения диска будут рассмотрены отдельно.

### Заключение

На основе предложенных методов разработан комплекс программ *Sm2Px3Txt*, позволяющий решать прямую и обратную нелинейные задачи одностороннего динамически нагруженного упорного подшипника скольжения с неподвижными подушками при различных геометрических, физических и режимных параметрах. С помощью программы можно исследовать устойчивость ротора с учетом воздействия упорного подшипника при различных режимах нагружения, что имеет важное практическое значение при проектировании различных компрессорных машин. Преимущества примененной ПТУГД математической модели заключаются в возможности полного учета температурного поля в подшипнике скольжения, включая перенос теплоты между соседними подушками и подачей свежей смазки. При нелинейной постановке происходит совместное интегрирование уравнений движения ротора и гидродинамики упорного подшипника, что позволяет учитывать нелинейное поведение реакции подшипника и моделировать реальное динамическое поведение ротора. При численной реализации предложен итерационный метод решения, использующий решение прямой задачи. Для снижения вычислительных затрат применен модифицированный метод Деккера–Брента совместно с модифицированным методом Ньютона. Решение обратной задачи позволит оптимизировать геометрические размеры упорного подшипника для достижения повышенной несущей способности и устойчивости движения ротора. Однако следует отметить, что решение обратной задачи с использованием ПТУГД математической модели может

быть сложным и требовать значительных вычислительных ресурсов. Таким образом, разработка эффективных численных методов и алгоритмов для решения этой задачи остается актуальной областью исследований в инженерной науке.

## Список литературы

1. *Хадиев М. Б., Хамидуллин И. В.* Компрессоры в технологических процессах. Расчет подшипников скольжения центробежных и винтовых компрессоров. Казань: КНИТУ, 2021. 260 с.
2. *Максимов В. А., Баткис Г. С.* Трибология подшипников и уплотнений жидкостного трения высокоскоростных турбомашин. Казань: ФЭН, 1998. 429 с.
3. *Костюк А. Г.* Динамика и прочность турбомашин : учеб. для студентов вузов. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: МЭИ, 2007. 476 с.
4. *Некрасов А. Л.* Расчетный анализ нелинейных колебаний роторов турбомашин в подшипниках скольжения: дис. . . . канд. техн. наук: 05.04.12. Москва: МЭИ, 1998. 125 с.
5. *Хисамеев И. Г., Максимов В. А., Баткис Г. С., Гузельбаев Я. З.* Проектирование и эксплуатация промышленных центробежных компрессоров. 2-е изд., испр. и доп. Казань: ФЭН, 2012. 671 с.
6. *Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Хавкин А. Л., Хуснутдинов И. Ф.* Характер осевых колебаний ротора при переменных режимах работы центробежной компрессорной установки // Компрессорная техника и пневматика. 2018. Т. 4. С. 29–32.
7. *Lund J. W.* Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings // ASME Journal of Tribology. 1987. Vol. 109, no. 1. P. 37-41. DOI: 10.1115/1.3261324
8. *Zhu Q., Zhang W. J.* A Preliminary nonlinear analysis of the axial transient response of the sector-shaped hydrodynamic thrust bearing-rotor system // ASME Journal of Tribology. 2003. Vol. 125, no. 4. P. 854–858. DOI: 10.1115/1.1575775
9. *Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Максимов Т. В., Футин В. А.* Одноступенчатая центробежная компрессорная установка: практикум. Казань: КНИТУ, 2019. 152 с.
10. *Хадиев М. Б., Зиннатуллин Н. Х., Нафиков И. М.* Механизм помпажа в центробежных компрессорах // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17, № 8. С. 262–266.
11. *Heshmat H., Pinkus O.* Mixing inlet temperatures in hydrodynamic bearings // ASME Journal of tribology. 1886. Vol. 108, no. 2. P. 231–244. DOI: 10.1115/1.3261168.
12. *Усков М. К., Максимов В. А.* Гидродинамическая теория смазки: этапы развития, современное состояние, перспективы. Москва: Наука, 1985. 143 с.
13. *Sokolov N. V., Khadiev M. B., Maksimov T. V., Fedotov E. M., Fedotov P. E.* Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbochargers // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158, no. 04219. P. 138–151. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/4/042019.
14. *Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М.* Трёхмерное периодическое термоупругогидродинамическое моделирование гидродинамических процессов упорного подшипника скольжения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2021. Т. 20, № 3. С. 138–151. DOI: 10.18287/2541-7533-2021-20-3-138-151.
15. *Sokolov N. V., Khadiev M. B., Fedotov P. E., Fedotov E. M.* Mathematical model of a dynamically loaded thrust bearing of a compressor and some results of its calculation // Mesh methods for boundary-value problems and applications. Lecture notes in computational science and engineering. 2022. Vol. 141. P. 461–473. DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2\_35.
16. *Максимов В. А., Хадиев М. Б., Федотов Е. М.* Определение гидродинамических и тепло-



- вых характеристик упорных подшипников математическим моделированием // Вестник машиностроения. 2004. № 6. С. 39–45.
17. Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М. Численное исследование влияния класса вязкости смазки на работу упорного подшипника скольжения // Математическое моделирование и численные методы. 2023. № 1. С. 92–111. DOI: 10.18698/2309-3684-2023-1-92111.
  18. Голубев А. И. Торцовые уплотнения вращающихся валов. М.: Машиностроение, 1974. 214 с.
  19. Федотов П. Е., Федотов Е. М., Соколов Н. В., Хадиев М. Б. *Sm2Px3Txyt* – Динамически нагруженный упорный подшипник скольжения при постановке прямой задачи. Свид-во о госуд. регистрации программы для ЭВМ № 2020615227, 2020.
  20. Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М. Влияние температуры подачи смазочного материала на работу упорного подшипника скольжения // Вестник машиностроения. 2023. № 1. С. 47–55. DOI: 10.36652/0042-4633-2023-102-1-47-55.
  21. Соколов Н. В., Хадиев М. Б., Федотов П. Е., Федотов Е. М. Сравнение квазитрехмерной и полной трехмерной постановок работы упорного подшипника скольжения // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2023. Т. 22, № 3. С. 143–159. DOI: 10.18287/2541-7533-2023-22-3-143-159.
  22. Fedotov P. E. Numerical solution of the one-sided compressor thrust bearing dynamics equation // CEUR Workshop Proceedings. 2021. Vol. 2837. P. 54–75.
  23. Савин Л. А., Соломин О. В., Устинов Д. Е. Метод пространственного движения жесткого ротора на опорах жидкостного трения // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королева (национального исследовательского университета). 2006. № 2-1. С. 328–332.
  24. Корнеев А. Ю. Анализ динамики жесткого ротора на конических гидродинамических подшипниках скольжения методом траекторий // Вестник машиностроения. 2013. № 12. С. 24–28.
  25. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. Computer Methods for Mathematical Computations // In: Prentice-Hall series in computational mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977. 259 p. DOI: 10.1002/zamm.19790590235.

## References

1. Khadiev MB, Khamidullin IV. Compressors in Technological Processes. Calculation of Fluid Film Bearings of Centrifugal and Screw Compressors. Kazan: KNRTU; 2021. 260 p. (in Russian).
2. Maksimov VA, Batkis GS. Tribology of Bearings and Seals of Liquid Friction of High-speed Turbomachines. Kazan: FEN (science); 1998. 429 p. (in Russian).
3. Kostyuk AG. Dynamics and Strength of Turbomachines: a Textbook for University Students. 3rd ed., revised and additional. Moscow: Moscow power engineering university; 2007. 476 p. (in Russian).
4. Nekrasov AL. Calculation Analysis of Nonlinear Vibrations of Turbomachine Rotors in Fluid Film Bearings. PhD Thesis. Moscow: Moscow Power Engineering Institute; 1998. 125 p. (in Russian).
5. Khisameev IG, Maksimov VA, Batkis GS, Guzelbaev YaZ. Design and Operation of Industrial Centrifugal Compressors. 2nd ed., corrected and enlarged. Kazan: FEN (science); 2012. 671 p. (in Russian).
6. Sokolov NV, Khadiev MB, Khavkin AL, Khusnutdinov IF. The nature of axial oscillations of the rotor under variable operating conditions of a centrifugal compressor unit. Compressors and pneumatics. 2018;(4):29–32 (in Russian).

7. Lund JW. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. ASME Journal of Tribology. 1987;109(1):37–41. DOI: 10.1115/1.3261324
8. Zhu Q, Zhang WJ. A Preliminary nonlinear analysis of the axial transient response of the sector-shaped hydrodynamic thrust bearing-rotor system. ASME Journal of Tribology. 2003;125(4): 854-858. DOI: 10.1115/1.1575775
9. Sokolov NV, Khadiev MB, Maksimov TV, Futin VA. Single-stage centrifugal compressor unit: practical work. Kazan: KNRTU; 2019. 152 p. (in Russian).
10. Khadiev MB, Zinnatullin NKh, Nafikov IM. The surge mechanism in centrifugal compressors. Bulletin of the Kazan Technological University. 2014;(8):262–266 (in Russian).
11. Heshmat H, Pinkus O. Mixing inlet temperatures in hydrodynamic bearings. ASME Journal of tribology. 1986;108(2):231-244. DOI: 10.1115/1.3261168.
12. Uskov MK, Maksimov VA. Hydrodynamic Lubrication Theory: Stages of Development, Current State, Prospects. Moscow: Nauka; 1985. 143 p. (in Russian).
13. Sokolov NV, Khadiev MB, Maksimov TV, Fedotov EM, Fedotov PE. Mathematical modeling of dynamic processes of lubricating layers thrust bearing turbochargers. Journal of Physics: Conference Series. 2019;1158(04219):138–151. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/4/042019.
14. Sokolov NV, Fedotov PE, Khadiev MB, Fedotov EM. Three-dimensional periodic thermoelasto-hydrodynamic (PTEHD) modeling of hydrodynamic processes of a thrust bearing. In: Proceedings of the 2021 International Scientific and Technical Engine Conference (EC). 23-25 June 2021, Samara, Russian Federation. New York, NY: IEEE; 2021. P. 1–7. DOI: 10.1109/EC52789.2021.10016829.
15. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Mathematical model of a dynamically loaded thrust bearing of a compressor and some results of its calculation. Mesh methods for boundary-value problems and applications. Lecture notes in computational science and engineering. 2022;141:461–473. DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2\_35.
16. Maksimov VA, Khadiev MB, Fedotov EM. Determination of hydrodynamic and thermal characteristics of thrust bearings by mathematical modeling. Bulletin of mechanical engineering. 2004;(6): 39–45 (in Russian).
17. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Numerical study of the lubricant viscosity grade influence on thrust bearing operation. Cyber-physical systems engineering and control. Studies in Systems, Decision and Control. 2023;1:477. DOI: 10.1007/978-3-031-33159-6\_16.
18. Golubev AI. Mechanical Seals of Rotating Shafts. Moscow: Mechanical engineering; 1974. 214 p. (in Russian).
19. Fedotov PE, Fedotov EM, Sokolov NV, Khadiev MB.  $Sm2Px3Tx\tau$  – Dynamically loaded fluid film thrust bearing when setting a direct problem. Certificate of the state registration of a computer program No. 2020615227. 2020. (in Russian).
20. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Influence of the lubricant's supply temperature on the operation of a fluid film thrust bearing. Russian Engineering Research. 2023;43(3):264–271. DOI: 10.3103/S1068798X23040329.
21. Sokolov NV, Khadiev MB, Fedotov PE, Fedotov EM. Comparison of quasi-three-dimensional and full three-dimensional formulations of the operation of a thrust sliding bearing. Bulletin of Samara University. Aerospace Engineering, Technology and Mechanical Engineering. 2023;22(3):143–159. DOI: 10.18287/2541-7533-2023-22-3-143-159. (in Russian).
22. Fedotov PE. Numerical solution of the one-sided compressor thrust bearing dynamics equation. CEURWorkshop Proceedings. 2021;2837:54–75.
23. Savin LA, Solomin OV, Ustinov DE. Method of spatial motion of a rigid rotor on fluid friction bearings. Bulletin of the Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolev (National Research University). 2006;(2-1):328–332. (in Russian).

24. Korneev AYu. Analysis of the dynamics of a rigid rotor on conical hydrodynamic plain bearings using the trajectory method. Bulletin of mechanical engineering. 2013;(12):24–28. (in Russian).
25. Forsythe GE, Malcolm MA, Moler CB. Computer Methods for Mathematical Computations. In: Prentice-Hall series in computational mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977. 259 p.



*Федотов Павел Евгеньевич* — родился в Казани (1996). Окончил с отличием Институт вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета по направлению «Прикладная математика». Защитил магистерскую диссертацию по специальности «Прикладная математика. Математическое моделирование». С 2021 года работает на кафедре «Прикладной математики и искусственного интеллекта» Казанского (Приволжского) федерального университета в должности ассистента. Научные интересы — вычислительная математика, математическое моделирование, высокопроизводительные системы, параллельные вычисления.

Россия, 420008 Казань, ул. Кремлевская, 35  
 Институт вычислительной математики и информационных технологий,  
 Казанский (Приволжский) федеральный университет  
 E-mail: paulfedotov@mail.ru  
 ORCID: 0000-0002-3398-7505  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1133146



*Соколов Николай Викторович* — родился в Казани (1988). Окончил с отличием факультет энергомашиностроения и технологического оборудования Казанского государственного технологического университета по специальности «Вакуумная и компрессорная техника физических установок» (2010). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности «Вакуумная, компрессорная техника и пневмосистемы» (2014, КНИТУ). Доцент кафедры «Компрессорные машины и установки» Казанского национального исследовательского технологического университета. Научные интересы — гидродинамическая теория смазки, проектирование и эксплуатация узлов трения компрессоров. Автор 9 статей, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science.

Россия, 420029 Казань, ул. Попова, 10, корп. «Г»  
 Казанский национальный исследовательский технологический университет  
 E-mail: sokol-88@list.ru  
 ORCID: 0009-0001-2657-9503  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 871154