Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 517.928

DOI: 10.18500/0869-6632-003090
EDN: VEFWUJ

Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр–седло*

О. А. Султанов[1,2]

[1]Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Россия
[2]Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
E-mail: ✉oasultanov@gmail.com

Поступила в редакцию 10.07.2023, принята к публикации 19.10.2023, опубликована онлайн 26.01.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. *Цель* настоящего исследования — изучить влияние стохастических возмущений типа белый шум на устойчивость захвата в авторезонанс в осциллирующих системах с переменной амплитудой и частотой накачки, при которых в соответствующей предельной автономной системе имеет место бифуркация центр–седло. Определить зависимость интервалов стохастической устойчивости авторезонанса от интенсивности шума. *Методы.* Существование авторезонансных режимов с растущей амплитудой доказывается путем построения и обоснования асимптотических решений в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами. Устойчивость решений по вероятности относительно шума обосновывается с помощью стохастических функций Ляпунова. *Результаты.* Описаны условия, при которых авторезонансный режим сохраняется и исчезает при прохождении параметров через бифуркационные значения. Найдена зависимость интервалов стохастической устойчивости авторезонанса от степени затухания интенсивности шума. Показано, что для сохранения устойчивости решений при бифуркационных значениях параметров требуются более жесткие ограничения. *Заключение.* На уровне дифференциальных уравнений, описывающих захват в авторезонанс, исследовано влияние затухающих стохастических возмущений на бифуркацию центр–седло. Полученные результаты указывают на возможность использования затухающих осциллирующих возмущений для устойчивого управления нелинейными системами.

Ключевые слова: авторезонанс, асимптотика, устойчивость, бифуркация, стохастическое возмущение.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30002.

Для цитирования: *Султанов О. А.* Стохастическая устойчивость модели авторезонанса с бифуркацией типа центр–седло // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 147–159. DOI: 10.18500/0869-6632-003090. EDN: VEFWUJ

*Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2023».

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003090

Stochastic stability of an autoresonance model with a center−saddle bifurcation*

O. A. Sultanov[1,2]

[1]Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision
of the Ufa Federal Research Centre of the RAS, Russia
[2]St. Petersburg State University, Russia
E-mail: ✉oasultanov@gmail.com
*Received 10.07.2023, accepted 19.10.2023, available online 26.01.2024,
published 29.03.2024*

Abstract. The *purpose* of this work is to investigate the effect of stochastic perturbations of the white noise type on the stability of capture into autoresonance in oscillating systems with a variable pumping amplitude and frequency such that a center−saddle bifurcation occurs in the corresponding limiting autonomous system. The another purpose is determine the dependence of the intervals of stochastic stability of the autoresonance on the noise intensity. *Methods.* The existence of autoresonant regimes with increasing amplitude is proved by constructing and justificating asymptotic solutions in the form of power series with constant coefficients. The stability of solutions in terms of probability with respect to noise is substantiated using stochastic Lyapunov functions. *Results.* The conditions are described under which the autoresonant regime is preserved and disappears when the parameters pass through bifurcation values. The dependence of the intervals of stochastic stability of autoresonance on the degree of damping of the noise intensity is found. It is shown that more stringent restrictions are required to preserve the stability of solutions for the bifurcation values of the parameters. *Conclusion.* At the level of differential equations describing capture into autoresonance, the effect of damped stochastic perturbations on the center−saddle bifurcation is studied. The results obtained indicate the possibility of using damped oscillating perturbations for stable control of nonlinear systems.

Keywords: autoresonance, asymptotics, stability, bifurcation, stochastic perturbation.

Acknowledgements. Research is supported by the Russian Science Foundation grant 19-71-30002.

For citation: Sultanov OA. Stochastic stability of an autoresonance model with a center−saddle bifurcation. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2):147–159. DOI: 10.18500/0869-6632-003090

Введение

В работе рассматривается модельная система дифференциальных уравнений, описывающая захват в авторезонанс в нелинейных осциллирующих системах с малой чирпированной накачкой [1]. Явление авторезонанса, связанное с устойчивой подстройкой фазы системы под фазу накачки и значительным ростом амплитуды колебаний, имеет широкий круг приложений и активно исследуется в последнее время [2]. В работе обсуждается специальный случай, когда амплитуда и частота накачки согласованы таким образом, что при вариации параметров имеет место бифуркация центр−седло для резонансных решений в соответствующей предельной автономной системе. Влияние детерминированных возмущений на такую бифуркацию обсуждалось в [3], где описаны условия, при которых соответствующая бифуркация сохраняется или разрушается. При этом влияние стохастических возмущений не рассматривалось. В настоящей работе исследуются существование и устойчивость авторезонанса относительно стохастических возмущений при прохождении параметров через бифуркационные значения.

*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear days in Saratov for young scientists – 2023”.

1. Постановка задачи

Рассматривается неавтономная система двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{d\tau} + \alpha(\tau)\rho = \beta(\tau)\sin\phi, \\ &\left(\frac{d\phi}{d\tau} - \rho^2 + \lambda(\tau)\right)\rho = \beta(\tau)\cos\phi \end{aligned} \tag{1}$$

с гладкими функциями $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\lambda(\tau)$, определенными при всех $\tau > 0$ и имеющими следующее асимптотическое поведение на бесконечности:

$$\alpha(\tau) \sim \tau^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\tau^{-k}, \quad \beta(\tau) \sim \tau^{b-1}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\tau^{-k}, \quad \lambda(\tau) \sim \tau^{2b}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tau^{-k}, \quad \tau \to \infty,$$

где $\alpha_k, \beta_k, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\beta_0 = 1$ и $2b \in \mathbb{Z}_+$. Система (1) возникает при изучении явления авторезонанса в широком классе нелинейных осциллирующих систем с малой чирпированной накачкой и слабой диссипацией [1]. Функция $\alpha(\tau)$ связана с диссипацией в системе, $\beta(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ — с амплитудой и частотой возмущения соответственно. Решения системы $\rho(\tau)$ и $\phi(\tau)$ играют роль амплитуды и расстройки фазы нелинейного осциллятора. Интерес представляют решения $\rho(\tau) \to \infty$ и $\phi(\tau) = \mathcal{O}(1)$ при $\tau \to \infty$, которые соответствуют синхронизации фазы осциллятора с фазой возмущения и захвату системы в авторезонанс. При этом решения с $\rho(\tau) = \mathcal{O}(1)$ и $|\phi(\tau)| \to \infty$ при $\tau \to \infty$ соответствуют явлению фазового дрейфа и отсутствию авторезонанса. В качестве простейшего примера, приводящего к системе (1), рассмотрим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + U'(x) = -A(t)\frac{dx}{dt} + \tilde{\varepsilon}B(t)\cos\Lambda(t), \tag{2}$$

где $A(t) \equiv A_0(1+\tilde{\varepsilon}t)^{-1}$, $B(t) \equiv B_0(1+\tilde{\varepsilon}t)^{b-1}$, $\Lambda(t) \equiv t - \vartheta t^{2b+1}$, $U(x) = x^2/2 - x^4/4 + \mathcal{O}(x^6)$ при $x \to 0$, $A_0, B_0, \vartheta, \tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}_+$. Правая часть уравнения представляет собой возмущение с малыми параметрами $0 < A_0, \tilde{\varepsilon} \ll 1$. Заметим, что автономная система, соответствующая (2) с $\tilde{\varepsilon} = A_0 = 0$, имеет устойчивое по Ляпунову равновесие $(0,0)$ типа центр (см., например, [4, §4.1]). При этом решения возмущенного уравнение с $\tilde{\varepsilon} \neq 0$, $A_0 \neq 0$ и начальными данными вблизи точки $(0,0)$, для которых энергия $E(t) \equiv (x'(t))^2/2 + U(x(t))$ значительно увеличивается со временем, а фаза $\Psi(t) = \arctan(x'(t)/x(t))$ подстраивается под фазу возмущения $\Psi(t) - \Lambda(t) = \mathcal{O}(1)$, соответствуют захвату в авторезонанс. Для асимптотического описания таких решений на начальном этапе захвата введем медленную и быструю переменные $\tau = \varepsilon B_0 t/(2\kappa)$ и $\zeta = \Lambda(t)$ с $\kappa = (4B_0/3)^{1/3}$. Нетрудно проверить, что подстановка $x(t) = \tilde{\varepsilon}^{1/3}\kappa\rho(\tau)\cos(\phi(\tau) - \zeta) + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})$ при $\tilde{\varepsilon} \to 0$ в уравнение (2) и усреднение по быстрой переменной (см., например, [5]) приводят к системе (1) с $\alpha(\tau) \equiv \kappa A(t)B_0^{-1}\tilde{\varepsilon}^{-2/3}$, $\beta(\tau) \equiv B(t)B_0^{-1}$ и $\lambda(\tau) \equiv \vartheta(1+2b)(2\kappa\tilde{\varepsilon}^{-2/3}B_0^{-1})^{2b+1}\tau^{2b}$. Аналогичный переход к системам типа (1) имеет место при изучении авторезонанса в бесконечномерных системах, описываемых нелинейными уравнениями в частных производных [1]. Отметим, что системы вида (1) возникают, в частности, в задачах по управлению динамикой доменных стенок в ферромагнитных пленках в слабом внешнем магнитном поле [6].

В работе исследуется влияние стохастических возмущений на устойчивость авторезонансных решений системы (1). Возмущенную систему будем рассматривать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{d\tau} + \alpha(\tau)\rho = [\beta(\tau) + \varepsilon\sigma_1(\tau)\xi_1(\tau)]\sin\phi, \\ &\left(\frac{d\phi}{d\tau} - \rho^2 + \lambda(\tau)\right)\rho = [\beta(\tau) + \varepsilon\sigma_1(\tau)\xi_1(\tau)]\cos\phi + \varepsilon\sigma_2(\tau)\xi_2(\tau)\rho, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\xi_1(\tau)$ и $\xi_2(\tau)$ — независимые стохастические процессы, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Предполагается, что $\mathbb{E}[\xi_i(\tau)] = 0$ и $\mathbb{E}[\xi_i(\tau)\xi_i(\tau')] = \delta(\tau - \tau')$ для всех $i \in \{1, 2\}$, где $\delta(\tau)$ — δ-функция Дирака. Детерминированные функции $\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_2(\tau)$ с параметром $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ используются для контроля интенсивности шума. Положим $\xi_i(\tau) = \dot{W}_i(\tau)$, где $W_1(\tau), W_2(\tau)$ — независимые винеровские процессы. Тогда систему (3) можно рассматривать в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито [7, Гл. 5]. Цель работы — описать условия, при которых захват в авторезонанс сохраняется в возмущенной системе с вероятностью, близкой к единице.

2. Резонансные решения невозмущенной системы

Выделим растущую со временем компоненту в амплитуде и сделаем подстановку

$$\rho(\tau) = \sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-\frac{1}{2}} R(s(\tau)), \quad \phi(\tau) = \Psi(s(\tau)), \quad s(\tau) = \frac{2}{q}\tau^{\frac{q}{2}}, \quad q = 2b + 1 \tag{4}$$

в невозмущенной системе (1). Тогда для новых переменных $R(s)$, $\Psi(s)$ система примет вид

$$\frac{dR}{ds} = F(R, \Psi, s), \quad \frac{d\Psi}{ds} = G(R, \Psi, s), \tag{5}$$

где

$$F(R, \Psi, s(\tau)) \equiv \tau^{-\frac{q-3}{2}} \left(\beta(\tau)\sin\Psi - \alpha(\tau)\sqrt{\lambda(\tau)} - \frac{\lambda'(\tau)}{2\sqrt{\lambda(\tau)}}\right) + \tau^{-\frac{q-2}{2}} \left(\frac{1}{2}\tau^{-1} - \alpha(\tau)\right) R,$$

$$G(R, \Psi, s(\tau)) \equiv 2\tau^{-b}\sqrt{\lambda(\tau)} R + \tau^{-\frac{q}{2}} R^2 + \frac{\beta(\tau)\tau^{-\frac{q-2}{2}}\cos\Psi}{\sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-\frac{1}{2}} R}.$$

Заметим, что

$$\lambda^{\frac{m}{2}} \sim \tau^{bm}\lambda_0^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k}\zeta_k^m, \quad \beta\lambda^{-\frac{1}{2}} \sim \lambda_0^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k}\gamma_k, \quad \tau^{-\frac{q-3}{2}} \left(\alpha\sqrt{\lambda} + \frac{\lambda'}{2\sqrt{\lambda}}\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k}\mu_k$$

при $\tau \to \infty$, где ζ_k^m, γ_k, $\mu_k = \mathrm{const}$. В частности, $\zeta_0^m = \gamma_0 = 1$, $\mu_0 = \sqrt{\lambda_0}(1 + b) > 0$, $\zeta_1^m = m\lambda_1/\lambda_0$, $\gamma_1 = \beta_1 + \zeta_1^{-1}$, $\mu_1 = \sqrt{\lambda_0}\alpha_1 + \lambda_1/\sqrt{4\lambda_0}$. Нетрудно проверить, что имеют место асимптотические разложения $F(R, \Psi, s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} s^{-k/q} F_k(R, \Psi)$, $G(R, \Psi, s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} s^{-k/q} G_k(R, \Psi)$ при $s \to \infty$, где

$$F_k(R, \Psi) \equiv f_{k/2}(\Psi) + R\nu_{(k-q)/2}, \quad G_k(R, \Psi) \equiv R\eta_{k/2} + g_{k-q}(R, \Psi),$$

$$f_k(\Psi) \equiv (\beta_k \sin\Psi - \mu_k) \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2k}{q}}, \quad \nu_k = \left(\frac{1}{2}\delta_{k,0} - \alpha_k\right) \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2k}{q} - 1},$$

$$g_k(R, \Psi) \equiv \delta_{k,0}\frac{2R^2}{q} + \sum_{ql+2(m+n)=k} (-1)^l R^l \cos\Psi \lambda_0^{-\frac{l+1}{2}} \zeta_m^{-l} \gamma_n \left(\frac{2}{q}\right)^{1+\frac{k}{q}}, \quad \eta_k = 2\sqrt{\lambda_0}\zeta_k^1 \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2k}{q}}.$$

Заметим, что $q \in \mathbb{Z}_+$ и $q \geqslant 2$. Предполагается, что $f_k(\Psi) \equiv g_k(R, \Psi) \equiv 0$ и $\nu_k = \eta_k = 0$, если $k \notin \mathbb{N}_0$. Таким образом, система (5) является асимптотически автономной [8]. Соответствующая предельная система

$$\frac{dR}{ds} = \sin\Psi - \mu_0, \quad \frac{d\Psi}{ds} = \sqrt{4\lambda_0} R \tag{6}$$

имеет две неподвижные точки $z_s = (0, \arcsin \mu_0)$ — седло и $z_c = (0, \pi - \arcsin \mu_0)$ — центр, если $\mu_0 \in (0,1)$. При $\mu_0 = 1$ седло и центр сливаются в вырожденную неподвижную точку $z_0 = (0,1)$, которая исчезает при $\mu_0 > 1$. Если $\mu_0 > 1$, то все траектории предельной системы оказываются неограниченными.

Заметим, что функции $\tilde{F}(R,\Psi,s) \equiv F(R,\Psi,s) - F_0(R,\Psi)$ и $\tilde{G}(R,\Psi,s) \equiv G(R,\Psi,s) - G_0(R,\Psi)$ играют роль затухающих возмущений системы (6). Нетрудно проверить, что в окрестности седла такие добавки не приводят к качественному изменению поведения траекторий (см., например, [3]). При этом динамика вблизи центра и вырожденной точки зависит от параметров возмущений.

Дадим определение устойчивости резонансных решений с растущей амплитудой, которое будет использоваться ниже.

Определение 1. *Решение $\rho_*(\tau)$, $\psi_*(\tau)$ системы* (1) *называется устойчивым, если $\forall\, \varepsilon > 0$ существуют $\delta_0 > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что при любых ϱ_0 и φ_0: $|\rho_*(\tau_0) - \varrho_0| + |\psi_*(\tau_0) - \varphi_0| \leqslant \delta_0$, для решения $\rho(\tau)$, $\psi(\tau)$ системы* (1) *с начальными данными $\rho(\tau_0) = \varrho_0$, $\psi(\tau_0) = \varphi_0$ имеет место неравенство*

$$\sup_{\tau \geqslant \tau_0} \left\{ \tau^{\frac{1}{2}} |\rho(\tau) - \rho_*(\tau)| + |\psi(\tau) - \psi_*(\tau)| \right\} \leqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим сначала поведение траекторий вблизи точки z_c. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $0 < \sqrt{\lambda_0}(1+b) < 1$ и $\alpha_0 > \dfrac{1}{2} - \dfrac{4(b+1)}{(2b+1)^2}$. Тогда система* (1) *имеет устойчивое решение $\rho_c(\tau) \equiv \sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-1/2} R_c(s(\tau))$, $\phi_c(\tau) \equiv \Psi_c(s(\tau))$, где $s(\tau) = (2/q)\tau^{q/2}$,*

$$R_c(s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} s^{-\frac{k}{q}} r_k, \quad \Psi_c(s) \sim \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s^{-\frac{k}{q}} \psi_k, \quad s \to \infty, \tag{7}$$

с коэффициентами $r_k, \psi_k = \mathrm{const}$, $\psi_0 = \pi - \arcsin \mu_0$, $q = 2b+1$.

Доказательство. Подстановка (7) в систему (5) и группировка выражений при одинаковых степенях s приводят к системе рекуррентных уравнений:

$$\sqrt{4\lambda_0} r_k = \mathcal{A}_k, \quad -\sqrt{1-\mu_0^2} \psi_k = \mathcal{B}_k, \quad k \geqslant 1, \tag{8}$$

где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_k$ выражаются через $r_1, \psi_1, \ldots, r_{k-1}, \psi_{k-1}$. В частности,

$$\mathcal{A}_1 = -G_1(0,\psi_0), \quad \mathcal{A}_2 = -G_2(0,\psi_0) - r_1 \partial_R G_1(0,\psi_0) - \psi_1 \partial_\Psi G_1(0,\psi_0),$$
$$\mathcal{B}_1 = -F_1(0,\psi_0), \quad \mathcal{B}_2 = \mu_0 \psi_1^2/2 - F_2(0,\psi_0) - r_1 \partial_R F_1(0,\psi_0) - \psi_1 \partial_\Psi F_1(0,\psi_0).$$

Так как $\lambda_0 \neq 0$ и $0 < \mu_0 < 1$, то система (8) разрешима. Для доказательства существования решения системы (7) определим функции $R_N(s) \equiv \sum_{k=1}^{N} s^{-k/q} r_k$, $\Psi_N(s) \equiv \psi_0 + \sum_{k=1}^{N} s^{-k/q} \psi_k$ с некоторым целым $N \in \mathbb{N}$. Из построения вытекает, что

$$R_N'(s) - F(R_N(s), \Psi_N(s), s) = \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}}), \quad \Psi_N'(s) - G(R_N(s), \Psi_N(s), s) = \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $s \to \infty$. Подстановка $R(s) = R_N(s) + r(s)$, $\Psi(s) = \Psi_N(s) + \psi(s)$ в (5) приводит к системе

$$\frac{dr}{ds} = \mathcal{F}_N(r,\psi,s), \quad \frac{d\psi}{ds} = \mathcal{G}_N(r,\psi,s), \tag{9}$$

где $\mathcal{F}_N(r,\psi,s) \equiv F(R_N(s)+r,\Psi_N(s)+\psi,s) - R'_N(s)$ и $\mathcal{G}_N(r,\psi,s) \equiv G(R_N(s)+r,\Psi_N(s)+ +\psi,s) - \Psi'_N(s)$. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{F}_N = \sum_{k=0}^{q} s^{-\frac{k}{q}} \left\{f_{k/2}(\psi+\Psi_N) - f_{k/2}(\Psi_N) + \delta_{k,q}\nu_0 r\right\} + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}) + \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}}),$$

$$\mathcal{G}_N = \sum_{k=0}^{q} s^{-\frac{k}{q}} \left\{r\eta_{k/2} + \delta_{k,q}\big(g_0(r+R_N,\psi+\Psi_N) - g_0(R_N,\Psi_N)\big)\right\} + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}) + \mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $s\to\infty$ и $d := d(r,\psi) \equiv \sqrt{r^2+\psi^2} \to 0$. В качестве функции Ляпунова рассмотрим $V(r,\psi,s) \equiv V_c(r,\psi,s;\Psi_N(s),\vartheta)$, где

$$V_c(r,\psi,s;\Psi_N,\vartheta) = \sum_{k=0}^{q} s^{-\frac{k}{q}} \left\{\eta_{k/q}\frac{r^2}{2} - \int\limits_0^{\psi} f_{k/2}(\phi+\Psi_N)\,d\phi + \psi f_{k/2}(\Psi_N)\right\} + s^{-1}\vartheta r\psi.$$

Заметим, что $V(r,\psi,s) = (\eta_0 r^2 + \sqrt{1-\mu_0^2}\psi^2)/2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(d^2)\mathcal{O}(s^{-1/q})$ при $s\to\infty$ и $d\to 0$, где $\eta_0 = \sqrt{4\lambda_0} > 0$. Производная функции $V(r,\psi,s)$ на траекториях системы (9) имеет следующий вид:

$$\frac{dV}{ds}\Big|_{(9)} = s^{-1}\left(-A_\vartheta r^2 - B_\vartheta\psi^2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}})\mathcal{O}(d^2)\right) + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{N+1}{q}})$$

при $s\to\infty$ и $d\to 0$ с параметрами $A_\vartheta = \eta_0(q(2\alpha_0-1)/4-\vartheta)$ и $B_\vartheta = \sqrt{1-\mu_0^2}(\vartheta + 2\mu_0/\sqrt{q^2\lambda_0})$. Выберем параметр $\vartheta = \vartheta_c$, удовлетворяющий неравенствам $-2\mu_0/\sqrt{q^2\lambda_0} < \vartheta_c < q(2\alpha_0-1)/4$, тогда $A_\vartheta > 0$ и $B_\vartheta > 0$. Следовательно, найдутся $d_1 > 0$ и $s_1 > 0$ такие, что

$$m_- d^2 \leqslant V(r,\psi,s) \leqslant m_+ d^2, \quad \frac{dV}{ds}\Big|_{(9)} \leqslant -s^{-1}Cd^2 + s^{-\frac{N+1}{q}}Dd \tag{10}$$

при $s \geqslant s_1$ и $d \leqslant d_1$ с положительными параметрами m_-, m_+, $C = \min\{A_\vartheta, B_\vartheta\}/2$ и D. Выберем $N \geqslant q$, тогда для любого $\varepsilon \in (0,d_1)$ найдутся

$$\delta_\varepsilon = \min\left\{d_1, \frac{2s_\varepsilon^{-1/q}}{C}, \varepsilon\sqrt{\frac{m_-}{2m_+}}\right\}, \quad s_\varepsilon = \max\left\{s_1, \left(\frac{4}{C\varepsilon}\right)^q\right\}$$

такие, что $dV/ds|_{(9)} = -s^{-1}(Cd^2 - s_\varepsilon^{-1/q}\delta_\varepsilon^{-1}Dd^2) \leqslant -s^{-1}Cd^2/2 < 0$ для всех $s \geqslant s_\varepsilon$ и (r,ψ) таких, что $\delta_\varepsilon \leqslant d(r,\psi) \leqslant \varepsilon$. Отсюда и из неравенств $\sup_{d\leqslant\delta_\varepsilon} V(r,\psi,s) \leqslant m_+\delta_\varepsilon^2 \leqslant m_-\varepsilon^2 = \inf_{d=\varepsilon} V(r,\psi,s)$ для всех $s \geqslant s_\varepsilon$ следует, что любое решение системы (9) с начальными данными $d(r(s_\varepsilon),\psi(s_\varepsilon)) \leqslant \delta_\varepsilon$ не покидает ε-окрестность нуля $d(r(s),\psi(s)) \leqslant \varepsilon$ при $s \geqslant s_\varepsilon$. Более того, из (10) следует, что $dV/ds|_{(9)} \leqslant s^{-1-(N+1-q)/q}\varepsilon D$ для всех $s \geqslant s_\varepsilon$ и $d \leqslant \varepsilon$. Интегрируя последнее неравенство, мы получаем $d(r(s),\psi(s)) = \mathcal{O}(s^{-(N+1-q)/(2q)})$ при $s\to\infty$ для любого $N \geqslant q$. Отсюда вытекает существование устойчивого решения системы (9) с асимптотикой (7). Учитывая подстановку (4), мы получаем доказательство теоремы 1. □

Если $\mu_0 = 1$, система (8) оказывается неразрешимой, и асимптотическое решение в форме (7) вблизи вырожденной точки z_0 не строится. В этом случае в зависимости от параметров возмущений возможно появление либо устойчивого режима с траекториями, стремящимися к равновесию предельной системы (6), либо неустойчивого режима с неограниченно растущими траекториями.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\sqrt{\lambda_0}(b+1)=1$, $\beta_1>\mu_1$ *и* $\alpha_0>\dfrac{1}{2}-\dfrac{4b-1}{(2b+1)^2}$. *Тогда система* (1) *имеет устойчивое решение* $\rho_0(\tau)\equiv\sqrt{\lambda(\tau)}+\tau^{-1/2}R_0(s(\tau))$, $\phi_0(\tau)\equiv\Psi_0(s(\tau))$, *где* $s(\tau)=(2/q)\tau^{q/2}$,

$$R_0(s)\sim\sum_{k=1}^{\infty}s^{-\frac{k}{q}}r_k,\quad \Psi_0(s)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}s^{-\frac{k}{q}}\psi_k,\quad s\to\infty, \tag{11}$$

с коэффициентами $r_k,\psi_k=\mathrm{const}$, $\psi_1=\sqrt{2(\beta_1-\mu_1)}(2/q)^{1/q}$, $q=2b+1$.

Доказательство. Подстановка (11) в систему (5) и приравнивание выражений при одинаковых степенях s приводят к уравнению

$$\frac{\psi_1^2}{2}=(\beta_1-\mu_1)\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2}{q}}. \tag{12}$$

Остальные коэффициенты r_k, ψ_k определяются из системы уравнений

$$\sqrt{4\lambda_0}r_k=\mathcal{A}_k,\quad -\psi_1\psi_{k+1}=\mathcal{C}_{k+1},\quad k\geqslant 1, \tag{13}$$

где $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{C}_k$ выражаются через $r_1,\psi_1,\dots,r_{k-1},\psi_{k-1}$. Например,

$$\mathcal{A}_1=-G_1\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\quad \mathcal{A}_2=-G_2\left(0,\frac{\pi}{2}\right)-r_1\partial_R G_1\left(0,\frac{\pi}{2}\right)-\psi_1\partial_\Psi G_1\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\mathcal{C}_2=-\delta_{q,2}\nu_0 r_1,\quad \mathcal{C}_3=-\frac{\psi_1^4}{24}+\frac{\psi_2^2}{2}+\beta_1\frac{\psi_1^2}{2}\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{2}{q}}-\delta_{q,3}\nu_0 r_1+(\mu_2-\beta_2)\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{4}{q}}.$$

Так как $\lambda_0\neq 0$ и $\beta_1>\mu_1$, то существует решение системы (12), (13), которое зависит от выбора корня уравнения (12).

Рассмотрим функции $R_N(s)\equiv\sum_{k=1}^N s^{-k/q}r_k$, $\Psi_N(s)\equiv\pi/2+\sum_{k=1}^N s^{-k/q}\psi_k$. Подстановка $R(s)=R_N(s)+s^{-3/(2q)}r(s)$, $\Psi(s)=\Psi_N(s)+s^{-1/q}\psi(s)$ в (5) приводит к системе (9) с

$$\mathcal{F}_N(r,\psi,s)\equiv s^{\frac{3}{2q}}\Big(F(R_N(s)+s^{-\frac{3}{2q}}r,\Psi_N(s)+s^{-\frac{1}{q}}\psi,s)-R_N'(s)\Big)+s^{-1}\frac{3r}{2q},$$
$$\mathcal{G}_N(r,\psi,s)\equiv s^{\frac{1}{q}}\Big(G(R_N(s)+s^{-\frac{3}{2q}}r,\Psi_N(s)+s^{-\frac{1}{q}}\psi,s)-\Psi_N'(s)\Big)+s^{-1}\frac{\psi}{q}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{F}_N=\sum_{k=0}^{q+2}s^{-\frac{2k-3}{2q}}\Big\{f_{k/2}(s^{-\frac{1}{q}}\psi+\Psi_N)-f_{k/2}(\Psi_N)\Big\}+s^{-1}\left(\nu_0+\frac{3}{2q}\right)r+$$
$$+\mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}})+\mathcal{O}(s^{-\frac{2N-1}{2q}})=s^{-\frac{1}{2q}}(-\psi_1\psi+\mathcal{O}(d^2)+\mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}})),$$
$$\mathcal{G}_N=\sum_{k=0}^{q}s^{-\frac{2k+1}{2q}}r\eta_{k/2}+s^{-1+\frac{1}{q}}\Big(\big(g_0(s^{-\frac{3}{2q}}r+R_N,s^{-\frac{1}{q}}\psi+\Psi_N)-g_0(R_N,\Psi_N)\big)\Big)+s^{-1}\frac{\psi}{q}+$$
$$+\mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}})+\mathcal{O}(s^{-\frac{N}{q}})=s^{-\frac{1}{2q}}(\eta_0 r+\mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}}))$$

при $s\to\infty$ и $d(r,\psi)\to 0$.

Пусть $\psi_1 > 0$. В этом случае предельная система, соответствующая (9), имеет неподвижную точку типа центр. Рассмотрим функцию Ляпунова для системы (9) в виде $V(r,\psi,s) \equiv \equiv V_0(r,\psi,s;\Psi_N(s),\vartheta)$, где ϑ — некоторый параметр и

$$V_0(r,\psi,s,\Psi_N,\vartheta) \equiv \sum_{k=0}^{q} s^{-\frac{k}{q}}\eta_{k/q}\frac{r^2}{2} - \sum_{k=0}^{q+2} s^{-\frac{k-2}{q}}\left\{\int\limits_0^{\psi} f_{k/2}(s^{-\frac{1}{q}}\phi + \Psi_N)\,d\phi - \psi f_{k/2}(\Psi_N)\right\} + \\ + s^{-\frac{2q-1}{2q}}\vartheta r\psi.$$

Заметим, что $V(r,\psi,s) = (\eta_0 r^2 + \psi_1\psi^2)/2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(d^2)\mathcal{O}(s^{-1/q})$ при $s\to\infty$ и $d\to 0$, где $\eta_0 = \sqrt{4\lambda_0} > 0$. Производная функции $V(r,\psi,s)$ на траекториях системы (9) имеет вид

$$\frac{dV}{ds}\Big|_{(9)} = s^{-1}\left(-A_\vartheta r^2 - B_\vartheta\psi^2 + \mathcal{O}(d^3) + \mathcal{O}(s^{-\frac{1}{q}})\mathcal{O}(d^2)\right) + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{2N-1}{2q}})$$

при $s\to\infty$ и $d\to 0$ с параметрами $A_\vartheta = \eta_0(q(2\alpha_0-1)/4 - 3/(2q) - \vartheta)$, $B_\vartheta = \psi_1(2\mu_0/\sqrt{q^2\lambda_0} - - q^{-1} + \vartheta)$. Выберем $\vartheta = \vartheta_0$, удовлетворяющий неравенствам $(\sqrt{\lambda_0}-2)/\sqrt{q^2\lambda_0} < \vartheta_0 < < (q^2(2\alpha_0-1)-6)/(4q)$, тогда $A_\vartheta > 0$ и $B_\vartheta > 0$. Следовательно, найдутся $d_1 > 0$ и $s_1 > 0$ такие, что $m_- d^2 \leqslant V(r,\psi,s) \leqslant m_+ d^2$, $dV/ds|_{(9)} \leqslant -s^{-1}Cd^2 + s^{-2N-1/(2q)}Dd$ при $s \geqslant s_1$ и $d \leqslant d_1$ с положительными параметрами m_-, m_+, $C = \min\{A_\vartheta, B_\vartheta\}/2$ и D. Выберем $N \geqslant q+1$, тогда, повторяя рассуждения теоремы 1, мы получим доказательство теоремы 2. □

Заметим, что выбор отрицательного корня уравнения (12) соответствует неподвижной точке типа седло в предельной системе. В этом случае затухающие возмущения существенно не влияют на поведение близких траекторий и асимптотический режим, соответствующий (11) с $\psi_1 < 0$, оказывается неустойчивым.

Если $\mu_0 = 1$ и $\beta_1 < \mu_1$, то асимптотическое решение в форме (11) не строится. Более того, в этом случае траектории системы (5) ведут себя так же, как и решения предельной системы (6) при $\mu_0 > 1$ и являются неограниченными [3].

3. Стохастическая устойчивость резонансных решений

В настоящем разделе обсуждается устойчивость авторезонансных решений системы (1) относительно стохастических возмущений при $0 < \mu_0 < 1$ и при $\mu_0 = 1$. Известно, что даже малые стохастические возмущения могут приводить к потере устойчивости решений [9, Гл. 10] и появлению новых устойчивых состояний [10]. Опишем условия, при которых гарантируется сохранение устойчивости авторезонанса по вероятности по крайней мере на асимптотически больших временных интервалах.

Заметим, что подстановка (4) приводит систему (3) к следующему виду (см. [7, §8.5]):

$$\begin{aligned} dR &= F(R,\Psi,s)\,ds + \varepsilon\sigma_{1,1}(R,\Psi,s)\,dw_1(s), \\ d\Psi &= G(R,\Psi,s)\,ds + \varepsilon\sigma_{2,1}(R,\Psi,s)\,dw_1(s) + \varepsilon\sigma_{2,2}(R,\Psi,s)\,dw_2(s), \end{aligned} \tag{14}$$

где $(w_1(s), w_2(s))$ — некоторый двумерный винеровский процесс,

$$\sigma_{1,1}(R,\Psi,s(\tau)) \equiv \tau^{\frac{4-q}{4}}\sigma_1(\tau)\sin\Psi, \quad \sigma_{2,1}(R,\Psi,s(\tau)) \equiv \frac{\tau^{\frac{2-q}{4}}\sigma_1(\tau)\cos\Psi}{\sqrt{\lambda(\tau)} + \tau^{-1/2}R},$$

$$\sigma_{2,2}(R,\Psi,s(\tau)) \equiv \tau^{\frac{2-q}{4}}\sigma_2(\tau).$$

Из теоремы 1 следует, что система (14) при $\varepsilon = 0$ и $0 < \mu_0 < 1$ имеет устойчивое решение $R_c(s)$, $\Psi_c(s)$ с асимптотикой (7). Покажем, что решение остается устойчивым относительно стохастических возмущений при $\varepsilon \neq 0$ при определенных ограничениях на класс возмущений $\mathcal{K}_{a_1,a_2} := \{(\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)) : \sigma_1(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{a_1}), \sigma_2(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{a_2})$ при $\tau \to \infty\}$. Определим функцию $d(r, \psi) \equiv \sqrt{r^2 + \psi^2}$. Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть* $0 < \sqrt{\lambda_0}(1 + b) < 1$, $\alpha_0 > \dfrac{1}{2} - \dfrac{4(b+1)}{(2b+1)^2}$ *и* $(\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)) \in \mathcal{K}_{a_1,a_2}$ *с параметрами* $a_1 \leqslant -1 + (2b+1)K/4$, $a_2 \leqslant -1/2 + (2b+1)K/4$, $K \leqslant 1$. *Тогда существует* $\tau_0 > 0$ *такое, что для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *найдутся* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$ *такие, что любое решение* $\rho(\tau)$, $\psi(\tau)$ *системы* (3) *с* $d(\rho(\tau_0) - \rho_c(\tau_0), \psi(\tau_0) - \psi_c(\tau_0)) \leqslant \delta_1$ *и* $0 < \varepsilon < \delta_2$ *удовлетворяет оценке*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant \tau - \tau_0 \leqslant \mathcal{T}} d\left(\tau^{\frac{1}{2}}(\rho(\tau) - \rho_c(\tau)), \psi(\tau) - \psi_c(\tau)\right) \geqslant \varepsilon_2\right) \leqslant \varepsilon_1 \tag{15}$$

с параметром $\mathcal{T} = \varepsilon^{-1}$ *при* $0 < K \leqslant 1$, $\mathcal{T} = s(\tau_0)(\exp \varepsilon^{-1} - 1)$ *при* $K = 0$ *и* $\mathcal{T} = \infty$ *при* $K < 0$.

Доказательство. Подстановка $R(s) = R_c(s) + r(s)$, $\Psi(s) = \Psi_c(s) + \psi(s)$ в (14) приводит к системе

$$\begin{aligned} dr &= \mathcal{F}(r, \psi, s)\, ds + \varepsilon \tilde{\sigma}_{1,1}(r, \psi, s)\, dw_1(s), \\ d\psi &= \mathcal{G}(r, \psi, s)\, ds + \varepsilon \tilde{\sigma}_{2,1}(r, \psi, s)\, dw_1(s) + \varepsilon \tilde{\sigma}_{2,2}(r, \psi, s)\, dw_2(s), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\mathcal{F}(r, \psi, s) \equiv F(R_c(s) + r, \Psi_c(s) + \psi, s) - F(R_c(s), \Psi_c(s), s)$, $\mathcal{G}(r, \psi, s) \equiv G(R_c(s) + r, \Psi_c(s) + \psi, s) - G(R_c(s), \Psi_c(s), s)$, $\tilde{\sigma}_{i,j}(r, \psi, s) \equiv \sigma_{i,j}(R_c(s) + r, \Psi_c(s) + \psi, s)$ и $(R_c(s), \Psi_c(s))$ — решение системы (5) с асимптотикой (7). Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sum_{k=0}^{q} s^{-\frac{k}{q}} \left\{ f_{k/2}(\psi + \Psi_c) - f_{k/2}(\Psi_c) + \delta_{k,q} \nu_0 r \right\} + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-1-\frac{1}{q}}), \\ \mathcal{G} &= \sum_{k=0}^{q} s^{-\frac{k}{q}} \left\{ r \eta_{k/2} + \delta_{k,q} \big(g_0(r + R_c, \psi + \Psi_c) - g_0(R_c, \Psi_c) \big) \right\} + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-1-\frac{1}{q}}), \\ \tilde{\sigma}_{i,j} &= \mathcal{O}(s^{-1+K}) \end{aligned}$$

при $s \to \infty$ и $d \to 0$.

Определим оператор

$$\mathcal{L} = \partial_s + \mathcal{F}\partial_r + \mathcal{G}\partial_\psi + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\tilde{\sigma}_{1,1}^2 \partial_r^2 + 2\tilde{\sigma}_{1,1}\tilde{\sigma}_{2,1}\partial_r\partial_\psi + (\tilde{\sigma}_{2,1}^2 + \tilde{\sigma}_{2,2}^2)\partial_\psi^2\right),$$

связанный с (16) и играющий ключевую роль при исследовании стохастической устойчивости (см. [11, § 3.6]). Рассмотрим вспомогательную функцию $V(r, \psi, s) \equiv V_c(r, \psi, s; \Psi_c(s), \vartheta_c)$ с параметром ϑ_c, определенным при доказательстве теоремы 1. Заметим, что найдутся $d_0 > 0$ и $s_0 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} &m_- d^2(r, \psi) \leqslant V(r, \psi, s) \leqslant m_+ d^2(r, \psi), \\ &\mathcal{L}V(r, \psi, s) \leqslant -s^{-1} C d^2(r, \psi) + s^{-1+K} \varepsilon^2 M \end{aligned} \tag{17}$$

при $s \geqslant s_0$ и $d(r,\psi) \leqslant d_0$ с положительными константами m_-, m_+, C и M. Тогда функцию Ляпунова для системы (16) можно взять в следующем виде [12, 13]: $U(r,\psi,s) \equiv V(r,\psi,s) + \varepsilon^2 M\theta_K(s)$ с

$$\theta_K(s) = \begin{cases} s_0^{-1+K}(\mathcal{T}+s_0-s), & 0<K\leqslant 1,\\ \log(\mathcal{T}+s_0)-\log s, & K=0,\\ \int\limits_s^{\mathcal{T}+s_0} \varsigma^{K-1}\,d\varsigma, & K<0. \end{cases}$$

Заметим, что

$$U(r,\psi,s) \geqslant m_- d^2(r,\psi), \quad \mathcal{L}U(r,\psi,s) \leqslant 0 \tag{18}$$

для всех $(r,\psi,s) \in \mathcal{D}(d_0,s_0,\mathcal{T}) := \{(r,\psi,s) : d \leqslant d_0, 0 \leqslant s-s_0 \leqslant \mathcal{T}\}$. Зафиксируем параметры $\varepsilon_1 \in (0,d_0)$ и $\varepsilon_2 > 0$. Пусть $(r(s),\psi(s))$ — решение системы (16) при $d(r(s_0),\psi(s_0)) \leqslant \delta_1$ и $0<\varepsilon<\delta_2$. Обозначим через $s_{\mathcal{D}}$ момент первого выхода траекторий из области $\mathcal{D}(\delta_1,s_0,\mathcal{T})$, и положим $\varsigma_s \equiv \min\{s_{\mathcal{D}}, s\}$. Тогда $(r(\varsigma_s),\psi(\varsigma_s),\varsigma_s)$ является процессом, остановленным в момент первого выхода из области $\mathcal{D}(\delta_1,s_0,\mathcal{T})$. Более того, из (18) следует, что $U(r(\varsigma_s),\psi(\varsigma_s),\varsigma_s)$ является неотрицательным супермартингалом [11, § 5.2], и имеют место оценки

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\sup_{0\leqslant s-s_0\leqslant\mathcal{T}} d(r(s),\psi(s)) > \varepsilon_1\big) &= \mathbb{P}\big(\sup_{s\geqslant s_0} d(r(\varsigma_s),\psi(\varsigma_s)) > \varepsilon_1\big)\\ &\leqslant \mathbb{P}\big(\sup_{s\geqslant s_0} U(r(\varsigma_s),\psi(\varsigma_s),\varsigma_s) > m_-\varepsilon_1^2\big) \leqslant \frac{U(r(s_0),\psi(s_0),s_0)}{m_-\varepsilon_1^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Последняя оценка вытекает из неравенства Дуба для супермартингалов. Заметим, что $U(r(s_0),\psi(s_0),s_0) \leqslant m_+\delta_1^2 + \varepsilon^2 M\theta_K(s_0)$. Выберем $\delta_1 = \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_2 m_-/(2m_+)}$ и

$$\delta_2 = \begin{cases} m_+\delta_1^2 M^{-1} s_0^{1-K}, & 0<K\leqslant 1,\\ m_+\delta_1^2 M^{-1}, & K=1,\\ m_+\delta_1^2 M^{-1}|K| s_0^{-K}, & K<0. \end{cases}$$

Отсюда, из (4) и (19) вытекает оценка (15). □

Теорема 4. *Пусть* $\sqrt{\lambda_0}(1+b) = 1$, $\beta_1 > \mu_1$, $\alpha_0 > \frac{1}{2} - \frac{4b-1}{(2b+1)^2}$ *и* $(\sigma_1(\tau),\sigma_2(\tau)) \in \mathcal{K}_{a_1,a_2}$ *с параметрами* $a_1 \leqslant -7/4 + (2b+1)K/4$, $a_2 \leqslant -1 + (2b+1)K/4$, $K \leqslant 1$. *Тогда существует* $\tau_0 > 0$ *такое, что для любых* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *найдутся* $\delta_1 > 0$ *и* $\delta_2 > 0$ *такие, что любое решение* $\rho(\tau)$, $\psi(\tau)$ *системы* (3) *с* $d(\rho(\tau_0)-\rho_0(\tau_0),\psi(\tau_0)-\psi_0(\tau_0)) \leqslant \delta_1$ *и* $0<\varepsilon<\delta_2$ *удовлетворяет оценке*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant\tau-\tau_0\leqslant\mathcal{T}} d\left(\tau^{\frac{5}{4}}(\rho(\tau)-\rho_0(\tau)), \tau^{\frac{1}{2}}(\psi(\tau)-\psi_0(\tau))\right) \geqslant \varepsilon_2\right) \leqslant \varepsilon_1$$

с параметром $\mathcal{T} = \varepsilon^{-1}$ *при* $0<K\leqslant 1$, $\mathcal{T} = s(\tau_0)(\exp\varepsilon^{-1}-1)$ *при* $K=0$ *и* $\mathcal{T}=\infty$ *при* $K<0$.

Доказательство. Подстановка $R(s) = R_0(s) + s^{-3/(2q)} r(s)$, $\Psi(s) = \Psi_0(s) + s^{-1/q}\psi(s)$ в (14) при $\mu_0 = 1$ приводит к системе (16) с

$$\mathcal{F}(r,\psi,s) \equiv s^{\frac{3}{2q}} \left(F\left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}} r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s\right) - F(R_0(s), \Psi_0(s), s)\right) + s^{-1}\frac{3r}{2q},$$

$$\mathcal{G}(r,\psi,s) \equiv s^{\frac{1}{q}} \left(G\left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}} r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s\right) - G(R_0(s), \Psi_0(s), s)\right) + s^{-1}\frac{\psi}{q},$$

$$\tilde{\sigma}_{1,1}(r,\psi,s) \equiv s^{\frac{3}{2q}} \sigma_{1,1}\left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}} r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s\right),$$

$$\tilde{\sigma}_{2,j}(r,\psi,s) \equiv s^{\frac{1}{q}} \sigma_{2,j}\left(R_0(s) + s^{-\frac{3}{2q}} r, \Psi_0(s) + s^{-\frac{1}{q}}\psi, s\right),$$

где $R_0(s)$, $\Psi_0(s)$ — решение системы (5) при $\mu_0 = 1$ с асимптотикой (11). Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \sum_{k=0}^{q+2} s^{-\frac{2k-3}{2q}} \left\{f_{k/2}(\Psi_0 + s^{-\frac{1}{q}}\psi) - f_{k/2}(\Psi_0)\right\} + s^{-1}\left(\nu_0 + \frac{3}{2q}\right) r + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}),\\
\mathcal{G} &= \sum_{k=0}^{q} s^{-\frac{2k+1}{2q}} r\eta_{k/2} + s^{-\frac{q-1}{q}} \left(\left(g_0(R_0 + s^{-\frac{3}{2q}} r, \Psi_0 + s^{-\frac{1}{q}}\psi) - g_0(R_0, \Psi_0)\right)\right) + \\
&\qquad + s^{-1}\frac{\psi}{q} + \mathcal{O}(d)\mathcal{O}(s^{-\frac{q+1}{q}}),\\
\tilde{\sigma}_{i,j} &= \mathcal{O}(s^{-1+K})
\end{aligned}$$

при $s \to \infty$ и $d(r,\psi) \to 0$. Заметим, что функция $V(r,\psi,s) \equiv V_0(r,\psi,s;\Psi_0(s),\vartheta_0)$ с параметром ϑ_0, определенным в теореме 2, удовлетворяет (17). В этом случае построение функции Ляпунова для стохастической системы (16) и дальнейшее обоснование проводятся так же, как и в доказательстве теоремы 3. □

Заключение

Таким образом, описаны условия, при которых авторезонансный режим сохраняется и исчезает при прохождении параметров накачки через бифуркационные значения в соответствующей предельной системе. Исследовано влияние затухающих стохастических возмущений и найдена зависимость интервалов стохастической устойчивости авторезонанса от степени затухания интенсивности шума. Показано, что для сохранения устойчивости решений при соответствующих бифуркационных значениях параметров требуются более жесткие ограничения.

Полученные результаты расширяют возможность использования явления авторезонанса для устойчивого управления нелинейной динамикой. Доказана возможность значительного изменения энергии осциллирующих систем с помощью малого чирпированного возмущения при наличии слабой диссипации и шума. В частности, показано, что стохастические возмущения не разрушают захвата в авторезонанс при прохождении параметров накачки через бифуркационные значения.

Список литературы

1. *Калякин Л. А.* Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, № 5(383). С. 3–72. DOI: 10.4213/rm9237.

2. *Friedland L.* Autoresonance in nonlinear systems // Scholarpedia. 2009. Vol. 4, no. 1. P. 5473. DOI: 10.4249/scholarpedia.5473.
3. *Sultanov O. A.* Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2021. Vol. 31, no. 9. P. 2150137. DOI: 10.1142/S0218127421501376.
4. *Khalil H. K.* Nonlinear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002. 750 p.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1955. 448 с.
6. *Шамсутдинов М. А., Калякин Л. А., Сухоносов А. Л., Харисов А. Т.* Управление квазирелятивистской динамикой доменной стенки в режиме автофазировки // Физика металлов и металловедение. 2010. Т. 110, № 5. С. 451–462.
7. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. 324 p. DOI: 10.1007/978-3-662-03620-4.
8. *Markus L.* Asymptotically autonomous differential systems // In: Lefschetz S. (ed) Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations (AM-36). Vol. III. Princeton: Princeton University Press, 1956. P. 17–29. DOI: 10.1515/9781400882175-003.
9. *Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
10. *Sultanov O. A.* Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32, no. 11. P. 2250164. DOI: 10.1142/S0218127422501644.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 370 с.
12. *Sultanov O.* White noise perturbation of locally stable dynamical systems // Stochastics and Dynamics. 2017. Vol. 17, no. 1. P. 1750002. DOI: 10.1142/S0219493717500022.
13. *Султанов О. А.* Стохастическая устойчивость динамической системы, возмущенной белым шумом // Математические заметки. 2017. Т. 101, № 1. С. 130–139. DOI: 10.4213/mzm11108.

References

1. Kalyakin LA. Asymptotic analysis of autoresonance models. Russian Mathematical Surveys. 2008;63(5):791–857. DOI: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004560.
2. Friedland L. Autoresonance in nonlinear systems. Scholarpedia. 2009;4(1):5473. DOI: 10.4249/scholarpedia.5473.
3. Sultanov OA. Damped perturbations of systems with center-saddle bifurcation. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2021;31(9):2150137. DOI: 10.1142/S0218127421501376.
4. Khalil HK. Nonlinear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 2002. 750 p.
5. Bogoliubov NN, Mitropolsky YA. Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations. New York: Gordon and Breach; 1961. 537 p.
6. Shamsutdinov MA, Kalyakin LA, Sukhonosov AL, Kharisov AT. Controlling quasi-relativistic dynamics of domain walls in the regime of self-phasing. Phys. Metals Metallogr. 2010;110(5): 430–441. DOI: 10.1134/S0031918X10110037.
7. Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin, Heidelberg: Springer; 1998. 324 p. DOI: 10.1007/978-3-662-03620-4.
8. Markus L. Asymptotically autonomous differential systems. In: Lefschetz S, editor. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations (AM-36). Vol. III. Princeton: Princeton University Press; 1956. P. 17–29. DOI: 10.1515/9781400882175-003.

9. Freidlin MI, Wentzell AD. Random Perturbations of Dynamical Systems. 2nd edition. New York: Springer; 1998. 432 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0611-8.
10. Sultanov OA. Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022;32(11):2250164. DOI: 10.1142/S0218127422501644.
11. Khasminskii R. Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd edition. Berlin, Heidelberg: Springer; 2012. 342 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23280-0.
12. Sultanov O. White noise perturbation of locally stable dynamical systems. Stochastics and Dynamics. 2017;17(1):1750002. DOI: 10.1142/S0219493717500022.
13. Sultanov OA. Stochastic stability of a dynamical system perturbed by white noise. Mathematical Notes. 2017;101(1):149–156. DOI: 10.1134/S0001434617010151.

Султанов Оскар Анварович — родился в Уфе (1990). Окончил с отличием общенаучный факультет Уфимского государственного авиационного технического университета по направлению «Прикладная математика и информатика» (2012). Кандидат физико-математических наук (2015, ИМВЦ УНЦ РАН). С 2015 года работает в отделе дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН в должности старшего научного сотрудника. Научные интересы — нелинейные дифференциальные уравнения, устойчивость, асимптотика, бифуркации, детерминированные и стохастические возмущения. Опубликовал 40 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
E-mail: oasultanov@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1970-3382
AuthorID (eLibrary.Ru): 724333