



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 2
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(2)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003089
EDN: WBNLWM

Механизм обучения коллективного классификатора на основе конкуренции, управляемой обучающими примерами

А. А. Сутягин✉, О. И. Канаков

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: ✉alealesutyagin@gmail.com, okanakov@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 21.10.2023, принята к публикации 30.11.2023,
опубликована онлайн 12.01.2024, опубликована 29.03.2024

Аннотация. Цель работы состоит в модификации механизма обучения коллективного классификатора для обеспечения возможности его обучения только за счёт популяционной динамики, без внешнего сортирующего устройства. Коллективный классификатор представляет собой ансамбль неидентичных простых элементов, не имеющих собственной динамики и переменных параметров, обучаемый путём изменения состава ансамбля, что достигалось в предшествующей литературе путём «селекции» элементов ансамбля сортирующим устройством. **Методы.** Модель популяционной динамики коллективного классификатора дополнена «подсистемой обучения», которая управляется последовательностью обучающих примеров и, в свою очередь, управляет силой внутривидовой конкуренции в популяционной динамике. Динамика подсистемы обучения сводится к линейному отображению со случайными параметрами, выражаемыми через обучающие примеры. Решение отображения представляет собой марковский случайный процесс, стремящийся к стационарному, для которого аналитически найдено математическое ожидание, а дисперсия в рассматриваемом пределе стремится к нулю, что позволяет приближённо описывать связанную популяционную динамику как детерминированную, используя результаты из предшествующей литературы. **Результаты.** Аналитически показано и проиллюстрировано численным моделированием, что решающее правило, порождаемое классификатором, сходится в процессе обучения к правилу Байеса в рамках допущений, не отличающихся принципиально от принятых в имеющейся литературе по коллективным классификаторам; реализация требуемой конкурентной динамики не подразумевает использования внешнего сортирующего устройства. **Заключение.** Предложена концептуальная модель коллективного классификатора, обучение которого полностью обеспечивается собственной популяционной динамикой. Как и в предшествующей литературе, предполагается возможность реализации такого классификатора в виде ансамбля живых клеток с синтетическими генными структурами, если будет создан механизм популяционной динамики с внутривидовой конкуренцией, управляемой через синтетическую генную сеть.

Ключевые слова: конкуренция, машинное обучение, классификатор, модель Лотки–Вольтерры.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031).

Для цитирования: Сутягин А. А., Канаков О. И. Механизм обучения коллективного классификатора на основе конкуренции, управляемой обучающими примерами // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 160–179. DOI: 10.18500/0869-6632-003089. EDN: WBNLWM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Learning mechanism for a collective classifier based on competition driven by training examples

A. A. Sutyagin[✉], O. I. Kanakov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉alealesutyagin@gmail.com, okanakov@rf.unn.ru

Received 21.10.2023, accepted 30.11.2023, available online 12.01.2024, published 29.03.2024

Abstract. The purpose of this work is to modify the learning mechanism of a collective classifier in order to provide learning by population dynamics alone, without requiring an external sorting device. A collective classifier is an ensemble of non-identical simple elements, which do not have any intrinsic dynamics neither variable parameters; the classifier admits learning by adjusting the composition of the ensemble, which was provided in the preceding literature by selecting the ensemble elements using a sorting device. **Methods.** The population dynamics model of a collective classifier is extended by adding a “learning subsystem”, which is controlled by a sequence of training examples and, in turn, controls the strength of intraspecific competition in the population dynamics. The learning subsystem dynamics is reduced to a linear mapping with random parameters expressed via training examples. The solution to the mapping is an asymptotically stationary Markovian random process, for which we analytically find asymptotic expectation and show its variance to vanish in the limit under the specified assumptions, thus allowing an approximate deterministic description of the coupled population dynamics based on available results from the preceding literature. **Results.** We show analytically and illustrate it by numerical simulation that the decision rule of our classifier in the course of learning converges to the Bayesian rule under assumptions which are essentially in line with available literature on collective classifiers. The implementation of the required competitive dynamics does not require an external sorting device. **Conclusion.** We propose a conceptual model for a collective classifier, whose learning is fully provided by its own population dynamics. We expect that our classifier, similarly to the approaches taken in the preceding literature, can be implemented as an ensemble of living cells equipped with synthetic genetic circuits, when a mechanism of population dynamics with synthetically controlled intraspecific competition becomes available.

Keywords: competition, machine learning, classifier, Lotka–Volterra model.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWR-2023-0031).

For citation: Sutyagin AA, Kanakov OI. Learning mechanism for a collective classifier based on competition driven by training examples. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(2):160–179. DOI: 10.18500/0869-6632-003089

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Задача классификации состоит в отнесении классифицируемого объекта к одному из наперёд заданного множества классов на основании значения некоторого наблюдаемого признака, который может быть как действительной величиной, так и, например, действительным вектором и т. п. [1, 2]. Количество классов, вообще говоря, определяется постановкой задачи; настоящее исследование ограничивается случаем двух классов. Решающее правило классификатора является функцией, отображающей множество значений признака на множество классов. Если известны условные распределения вероятностей на множестве значений признака по условию принадлежности классифицируемого объекта к каждому из классов, то минимальная вероятность ошибки классификации обеспечивается решающим правилом Байеса [1, разд. 1.1–1.2], [2, разд. 3]. Если же эти распределения неизвестны, но дано множество «обучающих примеров» — значений признака, каждое из которых снабжено «меткой класса», то есть указанием на принадлежность объекта к определённом классу, то процесс построения оптимального классификатора (например, в смысле минимизации вероятности ошибки) на основании обучающих примеров называют обучением классификатора. Подавляющее большинство исследований в области машинного

обучения ориентировано на создание алгоритмов, исполняемых цифровыми вычислительными устройствами [1, 2]. В то же время в природе существуют неалгоритмические обучающиеся системы, в которых обучение обеспечивается собственной динамикой этих систем. К таковым относятся не только нервные системы, но и, например, адаптивные иммунные системы живых организмов. Представляет интерес не только исследование подобных объектов в живой природе, но и создание искусственных обучающихся систем на аналогичных принципах (см. обзор литературы в [3]).

В работах [4, 5] были введены в рассмотрение коллективные классификаторы — обучаемые системы, материальной основой которых служат ансамбли неидентичных элементов ограниченной сложности, каждый из которых реализует некоторую фиксированную (и достаточно простую) функцию отклика на входные признаки, не имеющую подстроечных параметров, а обучение классификатора (ансамбля в целом) происходит путём формирования оптимального соотношения численностей элементов различных типов в составе ансамбля. Был описан метод осуществления такого обучения путём селекции ансамбля (выборочного удаления элементов) при помощи внешнего сортирующего устройства на основании ответов отдельных элементов на обучающие примеры. Была предложена реализация элемента ансамбля в виде бактериальной клетки с синтетической геной сетью, поэтому элемент коллективного классификатора далее для определённости будем называть *клеткой*, хотя настоящее исследование носит обобщённый характер, без привязки к биологической или другой реализации. При этом процедура селекции, описанная в [4, 5], всегда приводит к режиму конкурентной популяционной динамики с единственным победителем (в пределе остаётся единственный тип клеток), что существенно ограничивает применимость данного подхода; в частности, невозможно обеспечить асимптотическую сходимость обученного классификатора в пределе процесса обучения к оптимальному (например, байесовскому) решающему правилу.

В последующей работе [3] был предложен подход к преодолению указанного ограничения за счёт перехода в популяционной динамике от режима с единственным победителем к режиму конкуренции с сосуществованием. Была предложена модель конкурентной динамики, обладающая требуемыми свойствами и обеспечивающая формирование обученного ансамбля как устойчивого состояния равновесия в популяционной динамике; предложена также реализация требуемой конкурентной динамики с помощью алгоритма селекции, управляемого обучающими примерами. Общим недостатком методов селекции при обучении коллективных классификаторов [3–5] является необходимость использования сортирующего устройства, которое является внешним по отношению к системе, поскольку это означает, что не обеспечивается обучение системы за счёт только собственной динамики.

Целью настоящего исследования является восполнение указанного пробела. Модель конкурентной динамики, ранее предложенная в [3], модифицирована и дополнена подсистемой, обеспечивающей, во-первых, обучение системы на примерах непосредственно в силу динамики системы и, во-вторых, сохранение состава ансамбля после обучения. Аналитически показано и проиллюстрировано численным моделированием, что ансамбль, формируемый в результате предложенной популяционной динамики, представляет собой обученный коллективный классификатор, функция отклика которого является аппроксимацией байесовского решающего правила.

1. Методика

1.1. Модель конкуренции с сосуществованием, основанная на внешнем сортировщике.

В работе [3] была предложена и исследована стратегия обучения коллективного классификатора, основанная на популяционной динамике, включающей внутривидовую конкуренцию наряду с конкуренцией за общий ресурс, благодаря чему обеспечивается режим конкуренции

с сосуществованием. Динамика численностей типов клеток описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{n}_i = b_i n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^s n_j \right) - (1 - b_i) \frac{n_i^2}{N_c}, \quad i = 1 \dots s, \quad (1)$$

где численности типов клеток n_i выступают в качестве непрерывных динамических переменных, индекс i нумерует типы клеток, s — количество типов клеток, b_i — параметры конкурентоспособности, $N_c > 0$ — «ёмкость среды». На параметры накладывается ограничение $0 < b_i < 1$, а фазовое пространство ограничено неотрицательным ортантом (все $n_i \geq 0$), который в полном действительном пространстве является инвариантной областью.

Система (1) имеет состояние равновесия

$$n_i = N_c \frac{b_i}{1 - b_i} h, \quad \text{где} \quad h = \left(\sum_{j=1}^s \frac{1}{1 - b_j} - (s - 1) \right)^{-1}, \quad (2)$$

глобально устойчивое в положительном ортанте фазового пространства (где все $n_i > 0$).

В модели (1) параметр b_i задаёт соотношение вкладов механизмов внутривидовой конкуренции и конкуренции за общий ресурс в динамике численности соответствующего типа клеток: при $b_i = 1$ в правой части i -го уравнения в (1) отлично от нуля только первое слагаемое (имеющее смысл конкуренции за общий ресурс), тогда как при $b_i = 0$ отлично от нуля только второе слагаемое (имеющее смысл внутривидовой конкуренции). На основе модели (1) в [3] был предложен алгоритм селекции, управляемый обучающими примерами, порождающий конкурентную динамику, переходящую в (1) в непрерывном пределе, в результате чего, как было показано, решающее правило обученного классификатора приближается к (оптимальному) правилу Байеса.

Механизмы обучения коллективных классификаторов на основе селекции, представленные в [3–5], имеют общий недостаток — необходимость во внешнем сортирующем устройстве для обеспечения требуемой конкурентной динамики. Преодоление этого ограничения требует решения двух задач, которым и посвящено настоящее исследование: во-первых, требуется, чтобы обучение коллективного классификатора происходило за счёт собственной популяционной динамики ансамбля, и во-вторых, состав ансамбля должен сохраняться после завершения обучения.

Решение первой задачи, то есть отказ от внешней селекции при обучении, подразумевает фактическую реализацию в элементах ансамбля механизма конкурентной популяционной динамики (то есть управляемого размножения и удаления элементов) вместе с механизмом подстройки параметров конкурентоспособности, управляемым обучающими примерами. В случае реализации элемента ансамбля в виде бактериальной клетки с синтетической геной сетью [4], управление конкурентоспособностью может быть организовано, например, при помощи управления устойчивостью клетки к антибиотику через синтетическую геновую сеть, а ввод обучающих примеров и включение-отключение механизма обучения — например, за счёт использования химических каналов межклеточной коммуникации (таких, как кворум-сенсинг [4]). В любом случае коэффициенты конкурентоспособности, которые в модели (1) являются постоянными параметрами, при переходе к механизму обучения, основанному на собственной динамике элемента, становятся дополнительными динамическими переменными, динамика которых должна быть описана соответствующей подсистемой (далее — «подсистемой обучения»), дополнительно к подсистеме, описывающей популяционную динамику. В настоящем исследовании не ставится задача описания какой-либо конкретной материальной реализации требуемой конкурентной динамики, управляемой обучающими примерами; мы ограничиваемся демонстрацией принципиальной возможности решения поставленной задачи на основе простой достаточной модели.

Для решения второй из указанных задач, то есть для обеспечения сохранения структуры популяции после обучения, необходимо, чтобы вне процесса обучения относительные пропорции клеток разных типов в составе ансамбля не изменялись, либо изменялись на временном масштабе, превышающем требуемое время сохранения обученного состояния системы. В исходной форме модели (1) это требование не может быть выполнено, поскольку обучение по смыслу модели осуществляется путём управления параметрами конкурентоспособности b_i . Прекращение же обучения, таким образом, подразумевает прекращение управления конкурентоспособностью, то есть возвращение всех параметров b_i к некоторому «исходному» значению, одинаковому для всех клеток и определяемому реализацией элемента. Это, в свою очередь, влечёт за собой переход системы к устойчивому состоянию равновесия, в котором численности всех типов клеток также одинаковы, что означает забывание системой своего обученного состояния. Для решения этой проблемы предлагается модифицировать систему (1) таким образом, чтобы параметр, управляющий конкурентоспособностью каждого типа клеток, влиял только на *внутривидовую* конкуренцию внутри конкретного типа клеток, при этом конкурентоспособность всех типов клеток в конкуренции *за общий ресурс* становится одинаковой. При таком подходе, как показано в разделе 1.2, прекращение обучения переводит конкуренцию в вырожденный режим, сохраняющий пропорции типов клеток в составе ансамбля.

1.2. Модифицированная модель конкуренции с сосуществованием. Для реализации требуемой динамики модифицируем модель (1), поделив правую часть каждого уравнения на b_i и вводя переобозначение параметров, в результате чего модифицированная модель записывается в виде

$$\dot{n}_i = n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^s n_j \right) - k_i \frac{n_i^2}{N_c}, \quad \text{где } k_i = \frac{1 - b_i}{b_i}, \quad i = 1 \dots s. \quad (3)$$

Ограничение $b_i \in (0, 1)$ переходит в $k_i \in (0, +\infty)$. Заметим, что параметры k_i в модели (3) с точки зрения популяционной динамики трактуются как определяющие внутривидовую конкуренцию. Если параметры k_i постоянны во времени и удовлетворяют указанному ограничению, то выражение для состояния равновесия (2) сохраняет силу и с учётом переобозначения параметров переписывается в виде

$$n_i = h N_c k_i^{-1}, \quad \text{где } h = \left(1 + \sum_{j=1}^s k_j^{-1} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Утверждение о глобальной устойчивости состояния равновесия (4) в положительном ортанте остаётся справедливым (см. пункт 1 Приложения); это означает, что режим сосуществования, определяемый состоянием равновесия (4), является единственно возможным результатом конкурентной динамики в системе (3).

Равновесное значение суммарной численности клеток не отличается от известного [3, уравн. (6)] для модели (1) и получается суммированием всех численностей n_i в состоянии равновесия (4):

$$N_\infty = \sum_{i=1}^s n_i = N_c h \sum_{i=1}^s k_i^{-1} = N_c h (h^{-1} - 1) = N_c (1 - h). \quad (5)$$

Будем считать, что прекращение обучения соответствует случаю, когда все параметры k_i обращаются в нуль. Выражение для состояния равновесия (4) в этом случае неприменимо, однако

сама система (3) сохраняет смысл и переходит в вырожденную модель конкуренции с одинаковой конкурентоспособностью

$$\dot{n}_i = n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_{j=1}^s n_j \right), \quad i = 1 \dots s. \quad (6)$$

Эта модель имеет $(s - 1)$ -мерное инвариантное многообразие, заданное уравнением

$$\sum_{j=1}^s n_j = N_c \quad (7)$$

(гиперплоскость, отсекающая на всех осях координат одинаковые отрезки $n_i = N_c$), которое обращает в нуль выражение в скобках в правой части (6), то есть полностью состоит из состояний равновесия, и при этом глобально устойчиво в положительном ортанте (доказательство последнего утверждения следует ниже).

Кроме того, инвариантным многообразием является каждый луч в фазовом пространстве, выходящий из начала координат и описываемый уравнением

$$n_i = v_i N, \quad (8)$$

где v_i — константы, задающие направление луча, а $N \in [0, +\infty)$ является координатой вдоль луча. В самом деле, подстановка (8) в (6) обращает каждое уравнение системы (6) в одно и то же уравнение, описывающее динамику переменной N (движение вдоль луча)

$$\dot{N} = N \left(1 - \frac{N}{N_c} \sum_{j=1}^s v_j \right). \quad (9)$$

Без потери общности будем считать, что константы v_i удовлетворяют дополнительному условию

$$\sum_{j=1}^s v_j = 1 \quad (10)$$

(которое может быть выполнено для любого луча (8) путём домножения правой части (8) на константу), тогда из (8) имеем

$$N = \sum_{j=1}^s n_j. \quad (11)$$

В этом случае переменная $N(t)$ имеет смысл полной численности клеток, а её динамика описывается тогда частным случаем уравнения (9)

$$\dot{N} = N \left(1 - \frac{N}{N_c} \right), \quad (12)$$

имеющим два состояния равновесия: неустойчивое $N = 0$ и устойчивое $N = N_c$. Подставляя $N = N_c$ в уравнение луча (8) и учитывая (10), убеждаемся, что устойчивое состояние равновесия на каждом луче лежит на инвариантном многообразии (7). Поскольку каждая точка в положительном ортанте лежит на каком-либо луче вида (8), из этого рассуждения следует отмеченная выше глобальная устойчивость инвариантного многообразия (7) в положительном ортанте.

Выражение (8) при выполнении (10) может рассматриваться как решение системы (6)

$$n_i(t) = v_i N(t), \quad (13)$$

где $N(t)$ — решение уравнения (12).

1.3. Подсистема обучения и метод обучения коллективного классификатора. Сформулируем методику обучения коллективного классификатора, основанную на конкурентной динамике, исходя из предположения, что популяционная динамика ансамбля в процессе обучения описывается моделью (3), где параметры k_i , определяющие силу внутривидовой конкуренции, теперь считаются переменными во времени, а именно динамика переменных $k_i(t)$ в процессе обучения определяется обучающими примерами, последовательно предъявляемыми системе, а после окончания обучения все k_i обращаются в нуль (динамика системы тогда описывается вырожденной моделью (6)).

Пусть x — вход классификатора (признак или, вообще говоря, вектор признаков), и для каждого типа клеток задана функция отклика $f_i(x) \geq 0$, описывающая отклик любой клетки i -го типа на входное значение признака x (везде используем обозначения, соответствующие [3]).

Пусть имеется обучающая последовательность $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$, содержащая общее количество N_{learn} обучающих примеров, каждый из которых представляет собой пару $\pi_\alpha = (x_\alpha, c_\alpha)$, состоящую из значения признака x_α и метки класса $c_\alpha \in \{+, -\}$, задающей принадлежность примера к одному из двух классов, которые далее именуются «положительным» и «отрицательным» и обозначаются соответствующими символами ‘+’ и ‘-’.

Будем считать, что все обучающие примеры предъявляются последовательно, в случайном порядке, длительность предъявления каждого примера составляет фиксированную величину T_s , а временные промежутки между предъявлением последовательных примеров отсутствуют (полное время обучения составляет, таким образом, величину $N_{\text{learn}} \cdot T_s$).

Введём в рассмотрение динамику переменных k_i — «подсистему обучения», описываемую уравнениями

$$\dot{k}_i = \begin{cases} -\tau_l^{-1} k_i & \text{вне процесса обучения,} \\ \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha) (k^+ - k_i), & \text{если } c_\alpha = +, \\ \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha) (k^- - k_i), & \text{если } c_\alpha = -, \end{cases} \quad (14)$$

где α — номер обучающего примера, предъявляемого в текущий момент времени, τ_l — параметр, определяющий временной масштаб процесса обучения, k^+ и k^- — константы.

Если для некоторого k_i в течение неограниченного времени реализуется только один из случаев в правой части уравнения (14), и $x_\alpha = \text{const}$ (то есть в течение неограниченного времени предъявляется один обучающий пример либо ни одного примера), то имеем для k_i автономную систему 1-го порядка (на фазовой прямой), которая при $f_i(x_\alpha) > 0$ имеет единственное глобально устойчивое состояние равновесия $k_i = 0$, $k_i = k^+$ или $k_i = k^-$, соответственно случаям в правой части (14). Характерное время приближения значения $k_i(t)$ к состоянию равновесия зависит от значения $f_i(x_\alpha)$, причём в случае $f_i(x_\alpha) = 0$ (если i -й тип клеток не даёт отклика на значение признака x_α) динамика (14) для переменной k_i вырождается в константу (то есть данный обучающий пример не оказывает влияния на значение переменной k_i).

Интуитивное обоснование предлагаемой методики обучения основано на соображении, что последовательность случайно выбираемых обучающих примеров приводит в (14) к стохастической динамике, в результате которой установившееся среднее значение каждой переменной k_i определяется только теми обучающими примерами, которые попадают в область ненулевого отклика соответствующего (i -го) типа клеток, а именно — соотношением между количествами примеров из положительного и отрицательного классов среди них. В частности, если в области отклика i -го типа клеток имеются только примеры из положительного (отрицательного) класса, то в процессе обучения в системе (14) правая часть оказывается отличной от нуля только для случая, соответствующего $c_\alpha = +$ ($c_\alpha = -$), и тогда $k_i(t)$ стремится к детерминированному предельному

значению $k_i(t) \rightarrow k^+$ ($k_i(t) \rightarrow k^-$). Если же клетки i -го типа дают ненулевой отклик на примеры из обоих классов, присутствующие в обучающей последовательности в случайном порядке, то в процессе обучения неизбежны случайные флуктуации переменной $k_i(t)$ на интервале между k^+ и k^- , причём можно ожидать, что если среди соответствующих (то есть дающих ненулевой отклик клеток i -го типа) обучающих примеров преобладают примеры из положительного (отрицательного) класса, то значения $k_i(t)$ в среднем будут оказываться ближе к k^+ (k^-). Кроме того, выполнение условия

$$T_s \ll \tau_l \quad (15)$$

подразумевает, что за время τ_l системе предъявляется большое количество обучающих примеров, благодаря чему их действие на систему должно эффективно усредняться, то есть дисперсия флуктуаций переменных $k_i(t)$ должна спадать с уменьшением отношения T_s/τ_l .

Вышеприведённые интуитивные рассуждения формализованы в Приложении, где приведён анализ динамики подсистемы обучения (14) как для детерминированной постановки задачи, в которой обучающая последовательность считается заданной, так и для стохастической постановки, где обучающая последовательность рассматривается как случайная выборка из некоторой генеральной совокупности. Показано, что в последнем случае математические ожидания (случайных) переменных $k_i(t)$ сходятся с течением времени к стационарным значениям

$$\langle k_i(t) \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \hat{k}_i, \quad (16)$$

причём при выполнении условия (15) стационарные значения дисперсий $D[k_i(t)]$ стремятся к нулю.

Соответствующая конкурентная динамика численностей типов клеток n_i , описываемая подсистемой (3), куда вместо постоянных параметров k_i теперь должны быть подставлены случайные процессы $k_i(t)$, являющиеся решением подсистемы обучения (14), также становится стохастической. Однако в установившемся (стационарном) режиме подсистемы обучения, в предположении о малости дисперсий переменных $k_i(t)$, что обеспечивается условием (15), можно ожидать, что дисперсии численностей $n_i(t)$ также должны быть малы. Из этих соображений, пренебрежём флуктуациями при описании асимптотического состояния подсистемы (3), которое в этом приближении рассматривается как детерминированное и описывается глобально устойчивым состоянием равновесия (4), куда вместо k_i подставляются соответствующие стационарные значения математических ожиданий \hat{k}_i :

$$\langle n_i(t) \rangle \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \hat{n}_i = h N_c \hat{k}_i^{-1}. \quad (17)$$

Стационарное значение суммарной численности даётся выражением (5), а именно

$$\sum_{i=1}^s \hat{n}_i = N_c (1 - h). \quad (18)$$

После окончания обучения, согласно первому случаю в (14), все переменные k_i устремляются к нулю экспоненциально, с постоянной времени τ_l . В предположении, что этот масштаб мал в сравнении с характерным временным масштабом популяционной динамики (3), можно считать, что динамика системы мгновенно переключается на режим вырожденной конкуренции (6), для которого асимптотическое состояние процесса обучения (17) выступает в качестве начального условия. Как показано в разделе 1.2, дальнейшее движение изображающей точки в фазовом пространстве происходит вдоль соответствующего луча (8) и стремится к устойчивому состоянию

равновесия, лежащему на пересечении этого луча с инвариантным многообразием (7). Движение вдоль луча (8) подразумевает, что значения переменных в состоянии равновесия $n_i = n_i^{\text{eq}}$ получаются пропорциональным масштабированием начальных значений $n_i = \hat{n}_i$ с сохранением соотношений между ними, то есть

$$n_i^{\text{eq}} = b \hat{n}_i, \quad (19)$$

где b — неизвестная константа. С другой стороны, в силу уравнения инвариантного многообразия (7), имеем

$$\sum_{i=1}^s n_i^{\text{eq}} = N_c. \quad (20)$$

Из уравнений (18)–(20) находим $b = (1 - h)^{-1}$. Тогда из уравнений (19) и (17) получаем установившиеся значения численностей типов клеток n_i^{eq} , определяющие результирующий состав обученного классификатора

$$n_i^{\text{eq}} = \frac{h}{1 - h} N_c \hat{k}_i^{-1}. \quad (21)$$

1.4. Аппроксимация байесовского решающего правила обученным классификатором.

Если априорные вероятности принадлежности классифицируемого объекта к каждому из двух классов одинаковы, то оптимальным с точки зрения минимизации вероятности ошибки классификации является байесовское решающее правило [1, разд. 1.1–1.2], [2, разд. 3], [3, уравн. (9)]

$$C_{\text{Bayes}}(x) = \begin{cases} +, & \text{если } w_+(x) > w_-(x), \\ -, & \text{если } w_+(x) \leq w_-(x), \end{cases} \quad (22)$$

где $w_+(x)$ и $w_-(x)$ — функции условной плотности распределения вероятности признака x по условию принадлежности объекта к классу c :

$$w_+(x) = w(x|c = +), \quad w_-(x) = w(x|c = -). \quad (23)$$

В рамках задачи обучения, функции $w_+(x)$ и $w_-(x)$ не заданы априори, и решающее правило классификатора должно быть получено в результате обучения на примерах.

Покажем, что решающее правило классификатора, обученного по методике, описанной в разделе 1.3, при определённых условиях может рассматриваться как аппроксимация правила (22). Следуя подходу, применённому в [3], будем считать функции отклика клеток $f_i(x)$ «узкими» в том смысле, что для них выполняется приближённое соотношение [3, уравн. (19)] (вопрос формализации этого приближения обсуждается ниже)

$$\frac{\int g(x) f_i(x) dx}{\int f_i(x) dx} \approx g(x_i), \quad (24)$$

где $g(x) = w_+(x)$ или $g(x) = w_-(x)$, x_i — «центральное» значение аргумента (признака), которое можно приписать каждой функции $f_i(x)$ таким образом, что «существенно отличные от нуля» (вносящие основной вклад в интеграл) значения $f_i(x)$ достигаются для значений аргумента x , сосредоточенных в окрестности $x = x_i$. Совокупность значений $\{x_i\}$ для всех типов клеток может образовывать равномерную или, вообще говоря, неравномерную сетку на множестве значений признака x . Заметим, что соотношение (24) становится точным, если функции отклика выражены через дельта-функцию Дирака в виде $f_i(x) = c_i \delta(x - x_i)$, где c_i — константы. Для реальных

функций отклика соотношение (24) выполняется тем точнее, чем меньше изменяются функции $w_+(x)$ и $w_-(x)$ на «эффективной ширине» (вносящей основной вклад в интеграл) функции отклика $f_i(x)$.

В Приложении показано, что при выполнении (15) и (24), в случае равенства априорных вероятностей двух классов (что, однако, не является принципиальным требованием; выкладки могут быть модифицированы для случая неравных априорных вероятностей классов), стационарное состояние (16) подсистемы обучения, устанавливающееся в процессе обучения, аппроксимируется выражением

$$\hat{k}_i \approx \frac{k^+ + k^-}{2} + \frac{k^+ - k^-}{2} \cdot \frac{w_+(x_i) - w_-(x_i)}{w_+(x_i) + w_-(x_i)}, \quad (25)$$

откуда, полагая для определённости $k^+ < k^-$, получаем соотношение

$$\hat{k}_i \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} \frac{k^+ + k^-}{2} \quad \text{при} \quad \begin{cases} w_+(x_i) < w_-(x_i), \\ w_+(x_i) = w_-(x_i), \\ w_+(x_i) > w_-(x_i), \end{cases} \quad (26)$$

выполняемое с точностью до всех аппроксимаций, сделанных выше.

Подставляя результат (26) в выражение (21), для численностей типов клеток в обученном классификаторе n_i^{eq} имеем

$$n_i^{\text{eq}} \begin{cases} < \Theta \\ = \Theta \\ > \Theta \end{cases} \begin{cases} \text{при} & w_+(x_i) < w_-(x_i), \\ \text{при} & w_+(x_i) = w_-(x_i), \\ \text{при} & w_+(x_i) > w_-(x_i), \end{cases} \quad \text{где} \quad \Theta = \frac{h}{1-h} N_c \frac{2}{k^+ + k^-}. \quad (27)$$

Строгая формализация аппроксимации (24) требует конкретизации предположений о входящих в неё функциях. В Приложении приводится один из вариантов такой формализации, представленный в виде интервальной оценки (в форме двойного неравенства) в рамках условий, которым удовлетворяет семейство функций отклика $f_i(x)$, используемых в разделе 2. Соответствующая модификация соотношений (26), (27) также приведена в Приложении и может быть использована при разработке классификатора, однако для компактности выкладок далее рассматривается упрощённая формулировка, заданная соотношениями (25)–(27).

Введём в рассмотрение решающее правило коллективного классификатора, заданное аналогично [3, уравн. (10)] в виде

$$C_{\text{Collective}}(x) = \begin{cases} +, & \text{если } F(x) > \Theta, \\ -, & \text{если } F(x) \leq \Theta, \end{cases} \quad F(x) = \sum_i n_i f_i(x), \quad (28)$$

где $F(x)$ — суммарный отклик всех клеток, составляющих коллективный классификатор, Θ — порог классификации. Положим, что функции отклика $f_i(x)$ удовлетворяют дополнительному требованию

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (29)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, вследствие чего имеем

$$F(x_i) = n_i. \quad (30)$$

В примере, рассмотренном в разделе 2, соотношения (29), (30) выполняются точно; для реальных функций отклика (например, при реализации классификатора в виде ансамбля живых клеток

с синтетическими генными структурами [4, 5]) они могут рассматриваться как приближённые, и выполнение этих соотношений может быть обеспечено с некоторой точностью.

Применяя выражение (30) в случае обученного классификатора, то есть при $n_i = n_i^{\text{eq}}$, и учитывая соотношение (27) вместе с введённым в нём выражением для порога Θ , заключаем, что решающее правило обученного коллективного классификатора (28) аппроксимирует байесовское правило (22) в том смысле, что для значений признака x , попадающих в узлы сетки $x \in \{x_i\}$, ответ коллективного классификатора (28) совпадает с байесовским решающим правилом (22) с точностью, определяемой использованными аппроксимациями, а вне узлов сетки зависит от конкретного выбора функций отклика $f_i(x)$ (например, для случая, рассмотренного в разделе 2, определяется линейной интерполяцией значений $F(x)$ между узлами сетки).

В общем случае выражение для порога Θ , введённое в (27), непригодно для практического применения напрямую, поскольку входящая в него величина h , исходно определяемая в (4), сама по себе выражается через переменные подсистемы обучения k_i , равновесные значения которых устанавливаются в процессе обучения и не известны априори. Для решения задачи практического отыскания значения порога Θ , рассмотрим предельный случай

$$k^+ \ll k^-, \quad (31)$$

при котором выражение для Θ переходит в

$$\Theta = \frac{h}{1-h} N_c \frac{2}{k^-}. \quad (32)$$

Предположим, что среди типов клеток имеется хотя бы один такой (обозначим его номер как i^*), для которого реализуется подавляющее преобладание обучающих примеров из отрицательного класса, то есть $w_+(x_{i^*}) \ll w_-(x_{i^*})$. В этом пределе выражение (25) для \hat{k}_{i^*} переходит в $\hat{k}_{i^*} = k^-$, а соответствующая численность клеток данного типа в составе обученного классификатора, согласно (21), составляет

$$n_{i^*}^{\text{eq}} = \frac{h}{1-h} N_c \frac{1}{k^-}. \quad (33)$$

Заметим, что при $k^+ < k^-$ выражение (25) даёт $\hat{k}_i \leq k^-$ для всех типов клеток i . Тогда значение (33) может быть найдено как наименьшая численность среди всех типов клеток в обученном классификаторе (21)

$$n_{i^*}^{\text{eq}} = n_{\min} = \min_i \{n_i^{\text{eq}}\}, \quad (34)$$

либо, согласно (30), как наименьшее значение суммарного отклика обученного классификатора $F(x)$ в узлах сетки $\{x_i\}$

$$n_{i^*}^{\text{eq}} = n_{\min} = \min_i F(x_i). \quad (35)$$

Сравнивая выражения (32) и (33), заметим, что искомое пороговое значение Θ может быть найдено как удвоенная величина $n_{i^*}^{\text{eq}}$, то есть

$$\Theta = 2n_{\min} = 2 \min_i F(x_i). \quad (36)$$

В силу вышесказанного, для практического определения порога Θ требуется обеспечить наличие среди типов клеток хотя бы одного «калибровочного» типа, для которого имеет место подавляющее преобладание обучающих примеров из отрицательного класса среди примеров, вызывающих ненулевой отклик клеток этого типа; в этом случае значение порога Θ может быть установлено согласно выражению (36).

2. Результаты

Конкретизируем задачу следующим образом. В подсистеме популяционной динамики (3) единственным свободным параметром является N_c , однако изменение N_c эквивалентно одно-временному перемасштабированию всех переменных состояния n_i , поэтому значение N_c может быть без нарушения общности выбрано любым. Положим $N_c = 1$, что соответствует измерению численности клеток n_i в долях от ёмкости среды N_c .

В подсистеме обучения (14) положим $k^- = 5$, $k^+ = 0.5 \ll k^-$, что удовлетворяет (31). Выберем масштаб времени подсистемы обучения $\tau_l = 2$.

Функции отклика типов клеток зададим аналогично [3] в виде базиса линейной интерполяции на эквидистантной сетке

$$x_i = x_1 + (i - 1)\Delta, \quad (37a)$$

$$f_i(x) = \max \left\{ 1 - \left| \frac{x - x_i}{\Delta} \right|, 0 \right\}, \quad (37b)$$

что удовлетворяет требованию (29). Тогда $F(x)$ в (28) представляет собой кусочно-линейную интерполяцию значений (30) в узлах сетки. Шаг сетки Δ полагаем равным 1, количество типов клеток $s = 9$, сетка x_i пробегает целочисленные значения от $x_1 = 2$ до $x_9 = 10$. График одной из функций этого семейства показан на рис. 1.

Начальные условия для подсистемы популяционной динамики задаются $n_i(0) = N_c/s$, а для подсистемы обучения $k_i(0) = 1$.

Продолжительность предъявления одного обучающего примера $T_s = 0.01 \ll \tau_l$, чем обеспечено выполнение (15). Полное количество предъявляемых обучающих примеров составляет $N_{\text{learn}} = 20000$, таким образом полное время обучения составляет $T_s \cdot N_{\text{learn}} = 200$. Продолжительность эволюции системы после завершения обучения (после предъявления всех обучающих примеров) составляет $T_{\text{free}} = 20$.

Обучающие примеры в процессе обучения выбираются из двух классов случайно, с равной вероятностью и независимо. Функции условной плотности вероятности классов для получения выборки обучающих примеров задаются аналогично работе [3]: одна из этих функций (для «отрицательного» класса) представлена гауссовским распределением, вторая (для «положительного» класса) — бимодальным распределением, полученным суперпозицией двух гауссовских функций:

$$w_+(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right), \quad w_-(x) = \frac{1}{\sigma_3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}, \quad (38)$$

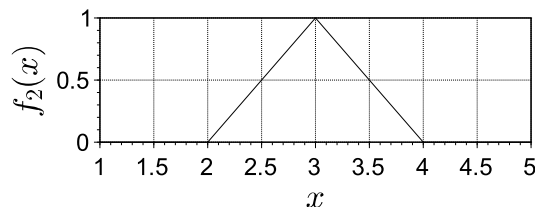


Рис. 1. График функции отклика клетки $f_i(x)$ на примере $i = 2$ ($x_i = 3$)

Fig. 1. Graph of cell response function $f_i(x)$ for $i = 2$ ($x_i = 3$)

Представлены результаты моделирования для следующих комбинаций параметров:

$$\mu_1 = 3, \quad \mu_2 = 9, \quad \mu_3 = 6, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1; \quad (39a)$$

$$\mu_1 = 3, \quad \mu_2 = 7, \quad \mu_3 = 6, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.5. \quad (39b)$$

Соответствующие графики функций $w_+(x)$ и $w_-(x)$ показаны на верхних панелях рис. 2. Значения параметров (39a) идентичны рассмотренным в [3]. Дополнительными вертикальными линиями сетки отмечены значения $x = x_L$ и $x = x_R$, являющиеся корнями уравнения $w_+(x) = w_-(x)$ и представляющие собой границы областей решений байесовского решающего правила (22).

Выполнено численное моделирование динамики полной системы, состоящей из подсистемы популяционной динамики (3), описывающей динамику численностей типов клеток $n_i(t)$, и подсистемы обучения (14), описывающей динамику коэффициентов внутривидовой конкуренции $k_i(t)$. Полученная эволюция динамики всех переменных модели представлена на рис. 3.

Графики отклика обученного коллективного классификатора $F(x)$ согласно (28), где взяты численности клеток в конечный момент численного эксперимента $n_i = n_i(T_s \cdot N_{\text{learn}} + T_{\text{free}})$, вместе с соответствующим пороговым значением Θ согласно (36), показаны на нижних панелях рис. 2. Сопоставление верхней и нижней панелей рис. 2 показывает, что решающее правило обученного коллективного классификатора (28), как и предсказано теорией, аппроксимирует байесовское решающее правило (22) в том смысле, что неравенство $F(x_i) > \Theta$ (положительный ответ коллективного классификатора) имеет место для значений признака x в тех узлах сетки $x = x_i$, в которых байесовский классификатор даёт положительный ответ ($w_+(x_i) > w_-(x_i)$), и наоборот, $F(x_i) < \Theta$ при $w_+(x_i) < w_-(x_i)$, чем и подтверждается работоспособность предложенной методики обучения коллективного классификатора без внешнего сортировщика.

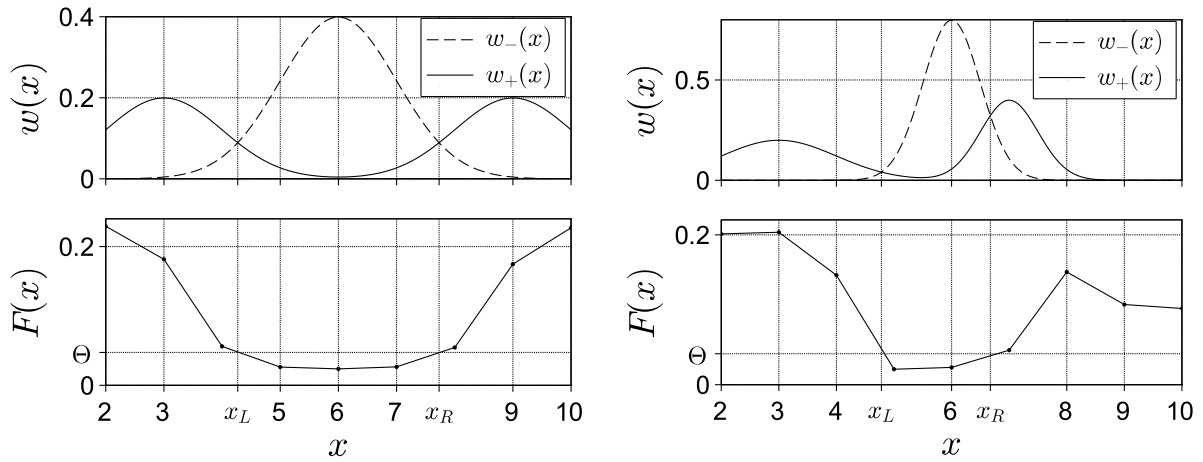


Рис. 2. Верхние панели: графики функций условной плотности вероятности классов $w_+(x)$ и $w_-(x)$ (38). Нижние панели: функция суммарного отклика обученного классификатора $F(x)$ (28). Дополнительными вертикальными линиями сетки отмечены границы x_L, x_R областей решений байесовского классификатора (22); дополнительной горизонтальной линией сетки на нижних панелях отмечен порог (36) решающего правила коллективного классификатора (28). Значения параметров распределений для классов: слева — согласно (39a), справа — согласно (39b)

Fig. 2. Upper panels: graphs of the conditional probability density functions for the classes $w_+(x)$ and $w_-(x)$ (38). Lower panels: summary response function $F(x)$ (28) of the trained classifier. Additional vertical grid lines denote the decision boundaries x_L, x_R for the Bayesian classification rule (22); additional horizontal grid lines in the lower panels denotes the threshold (36) for the collective classifier decision rule (28). Parameter values: left column (39a), right column (39b)

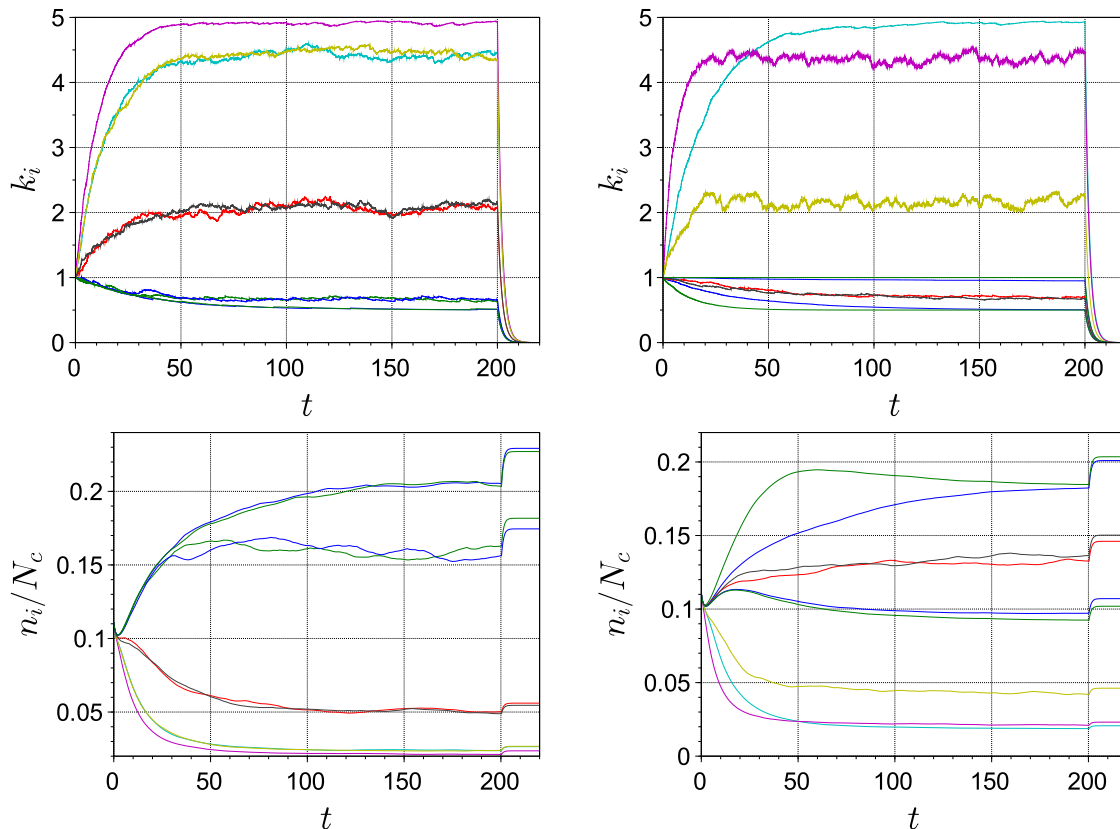


Рис. 3. Эволюция динамических переменных подсистемы обучения (14) $k_i(t)$ (верхние панели) и подсистемы популяционной динамики (3) $n_i(t)$ (нижние панели). Отрезок времени $t = 0 \dots 200$ — обучение, отрезок $t = 200 \dots 220$ — переходный процесс после обучения. Значения параметров распределений для классов: слева — согласно (39a), справа — согласно (39b) (цвет онлайн)

Fig. 3. Evolution of the dynamical variables of the learning subsystem (14) $k_i(t)$ (upper panels) and of the population dynamics subsystem (3) $n_i(t)$ (lower panels). Time ranges: $t = 0 \dots 200$ — learning, $t = 200 \dots 220$ — transient process after learning. Parameter values: left column (39a), right column (39b) (color online)

Заключение

Новая модель конкурентной динамики, представляющая собой модификацию системы, предложенной в [3], обеспечивает обучение коллективного классификатора только за счёт популяционной динамики, без использования внешнего сортировщика. Для этого система дополняется «подсистемой обучения», динамика которой определяется последовательностью обучающих примеров и, в свою очередь, управляет силой внутривидовой конкуренции в популяционной динамике. На примере рассмотренной концептуальной модели показано, что решающее правило, порожаемое обученным классификатором, является аппроксимацией оптимального байесовского правила, если удовлетворяется ряд допущений: в течение характерного масштаба времени динамики подсистемы обучения должно предъявляться большое количество обучающих примеров, выбираемых случайно и независимо, для их эффективного усреднения (снижения флуктуаций); продолжительность обучения должна быть достаточно большой для обеспечения сходимости к устойчивому состоянию равновесия; конкурентоспособность типов клеток вне процесса обучения должна быть одинаковой для сохранения пропорций типов клеток в обученном ансамбле; функции отклика клеток должны быть узкими в сравнении с условными распределениями классов

на пространстве признаков и вместе должны обладать свойствами базиса интерполяции для формирования суммарной функции отклика. Эти допущения не отличаются от сделанных в [4], где рассматривалась реализация коллективного классификатора в виде ансамбля живых клеток с синтетическими генными структурами, что позволяет рассчитывать на возможность такой реализации и для подхода, предложенного в настоящем исследовании, однако открытой остаётся проблема реализации «подсистемы обучения», то есть управления внутривидовой конкуренцией на основе последовательности обучающих примеров.

Приложение

1. Глобальная устойчивость режима сосуществования. В работе [6] модель Лотки–Вольтерры записана в виде

$$\dot{n}_i = n_i \left(b_i + \sum_{j=1}^s a_{ij} n_j \right), \quad i = 1 \dots s.$$

В случае невырожденной матрицы коэффициентов $A = (a_{ij})$ круглые скобки одновременно обращаются в ноль в единственной точке фазового пространства, которая, таким образом, является состоянием равновесия системы. Теорема [6] тогда утверждает, что это состояние равновесия глобально устойчиво в положительном ортанте, если оно в нём находится, и существует такая постоянная диагональная матрица с положительными коэффициентами C , что матрица $CA + (CA)^T$ (где T – операция транспонирования) является отрицательно определённой.

Для применения этой теоремы к системе (3) (для наглядности размерность системы выбрана $s = 3$) матрица A записывается в виде

$$A = -\frac{1}{N_c} \begin{pmatrix} 1 + k_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + k_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + k_3 \end{pmatrix},$$

а матрица C полагается единичной, тогда

$$CA + (CA)^T = -\frac{2}{N_c} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \right].$$

Здесь матрица из единиц является положительно полуопределённой, диагональная матрица имеет положительные коэффициенты и, значит, является положительно определённой, следовательно выражение в целом является отрицательно определённой матрицей. Остальные условия теоремы также выполнены.

2. Детерминированное описание процесса обучения. Уравнения, составляющие подсистему обучения (14), независимы друг от друга, поэтому дальнейшее рассмотрение относится к одному отдельно взятому уравнению системы, то есть значение индекса i фиксируется; везде далее обозначение k используется как сокращённый эквивалент для k_i . Поскольку процесс обучения описывается вторым и третьим случаями в (14), именно они рассматриваются далее.

Если последовательность обучающих примеров $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$ задана, то система (14) описывает детерминированную динамику со скачкообразно изменяющимися во времени параметрами в правой части. Момент времени, в который начинается предъявление обучающего примера под номером α , обозначим

$$t_\alpha = T_s(\alpha - 1). \tag{40}$$

На каждом интервале времени предъявления отдельно взятого обучающего примера $t \in (t_\alpha, t_{\alpha+1})$ система (14) имеет постоянные параметры и может быть представлена в виде

$$\dot{k} = -\lambda_\alpha(k - k_\alpha^0), \quad (41)$$

где введены обозначения

$$\lambda_\alpha = \tau_l^{-1} f_i(x_\alpha), \quad k_\alpha^0 = \begin{cases} k^+, & \text{если } c_\alpha = +, \\ k^-, & \text{если } c_\alpha = -. \end{cases} \quad (42)$$

Исходя из непрерывности решения $k(t)$ в точках разрыва правой части $t = t_\alpha$ (то есть в моменты смены обучающего примера), вводя обозначение

$$k_\alpha = k(t_\alpha) \quad (43)$$

для значения переменной $k(t)$ в начальный момент предъявления обучающего примера π_α и рассматривая это значение как начальное условие для уравнения (41), запишем соответствующее частное решение в виде

$$k(t) = k_\alpha^0 + (k_\alpha - k_\alpha^0)e^{-\lambda_\alpha(t-t_\alpha)}, \quad t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1}], \quad (44)$$

в результате чего значение переменной $k(t)$ по окончании предъявления обучающего примера π_α (то есть в момент времени $t = t_\alpha + T_s = t_{\alpha+1}$), которое совпадает с начальным условием $k_{\alpha+1}$ для следующего обучающего примера, выражается точечным отображением

$$k_{\alpha+1} = k_\alpha^0 + (k_\alpha - k_\alpha^0)e^{-\lambda_\alpha T_s} \quad (45)$$

или эквивалентно

$$k_{\alpha+1} = k_\alpha(1 - \varepsilon_\alpha) + k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha, \quad (46)$$

где введено обозначение

$$\varepsilon_\alpha = 1 - e^{-\lambda_\alpha T_s} = 1 - e^{-\frac{T_s}{\tau_l} f_i(x_\alpha)}. \quad (47)$$

Поскольку $f_i(x) \geq 0$, всегда имеем $\varepsilon_\alpha \in [0, 1]$, причём $\varepsilon_\alpha = 0$ реализуется только в случае $f_i(x_\alpha) = 0$, то есть если i -й тип клеток даёт нулевой отклик на значение признака $x = x_\alpha$. Кроме того, полагая функции отклика $f_i(x)$ ограниченными и вводя параметр

$$\mu = \frac{T_s}{\tau_l}, \quad (48)$$

который является малым в рамках предположения (15) о малости длительности предъявления одного обучающего примера T_s в сравнении с временным масштабом подсистемы обучения τ_l , и раскладывая экспоненту в (47) в ряд по степеням μ , находим

$$\varepsilon_\alpha = \mu f_i(x_\alpha) + O(\mu^2), \quad (49)$$

что является малой величиной порядка $O(\mu)$.

Таким образом, имея заданную последовательность обучающих примеров $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$, через которые выражениями (42) и (47) определяются последовательности параметров $\{k_\alpha^0\}$ и $\{\varepsilon_\alpha\}$ в отображении (46), а также задавая начальное условие $k(t=0) = k_1$, получаем из (46) значения переменной $k(t)$ в моменты смены обучающих примеров $k(t_\alpha) = k_\alpha$, тогда значения $k(t)$ внутри интервалов предъявления обучающих примеров даются выражением (44).

3. Стохастическое описание процесса обучения. Рассмотрим теперь стохастическую постановку задачи, где каждый обучающий пример $\pi_\alpha = (x_\alpha, c_\alpha)$ выбирается случайным образом из некоторой генеральной совокупности обучающих примеров, то есть обучающая последовательность $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{\text{learn}}}$ представляет собой случайную выборку некоторой случайной величины $\pi = (x, c) \in \mathbb{R} \times \{+, -\}$. Заметим, что в таком случае разные примеры π_α и $\pi_{\beta \neq \alpha}$ независимы между собой и имеют одинаковые вероятностные свойства, однако величины x_α и c_α внутри каждого примера, вообще говоря, зависимы (именно на этой зависимости основана возможность классификации). Отображение (46) тогда задаёт марковский случайный процесс $\{k_\alpha\}$ с дискретным временем и случайными параметрами k_α^0 и ε_α , а решение подсистемы обучения $k(t)$, получаемое из (44), является случайным процессом с непрерывным временем.

Поскольку (случайные) параметры k_α^0 и ε_α в (46) выражаются однозначно через компоненты примера π_α , они зависимы между собой, однако они независимы от величины k_α , которая имеет смысл начального условия для подсистемы обучения при предъявлении примера π_α , а значит, k_α может зависеть от предшествующих примеров $\pi_{\beta < \alpha}$, но не от π_α . Из этого следует факторизация математического ожидания $\langle k_\alpha \varepsilon_\alpha \rangle = \langle k_\alpha \rangle \langle \varepsilon_\alpha \rangle$ [7, § 25]; тогда из (46) получаем отображение для математических ожиданий

$$\langle k_{\alpha+1} \rangle = \langle k_\alpha \rangle (1 - \langle \varepsilon \rangle) + \langle k^0 \varepsilon \rangle, \quad (50)$$

где введены обозначения $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_\alpha \rangle$ и $\langle k^0 \varepsilon \rangle = \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha \rangle$, не зависящие от α в силу идентичности вероятностных свойств обучающих примеров под всеми номерами α .

За исключением вырожденного случая $\langle \varepsilon \rangle = 0$, который означает, что i -й тип клеток не даёт отклика ни на один пример (см. комментарий к уравнению (47)); в таком случае этот тип является «лишним» и может быть исключён), отображение (50) имеет неподвижную точку

$$\hat{k} = \frac{\langle k^0 \varepsilon \rangle}{\langle \varepsilon \rangle}, \quad (51)$$

которая отыскивается из условия $\langle k_{\alpha+1} \rangle = \langle k_\alpha \rangle = \hat{k}$, является устойчивой в силу $|1 - \langle \varepsilon \rangle| < 1$ и определяет стационарное значение, к которому сходится математическое ожидание процесса $\{k_\alpha\}$. К тому же значению сходится и математическое ожидание процесса с непрерывным временем $k(t)$, который определяется выражением (44) и принимает значения между k_α и $k_{\alpha+1}$ на каждом отрезке $t \in [t_\alpha, t_{\alpha+1}]$, чем обосновывается формула (16).

По формуле полного математического ожидания [7, § 23, уравн. (5)] находим

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle P(c_\alpha = +) + \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle P(c_\alpha = -), \quad (52a)$$

$$\langle k^0 \varepsilon \rangle = \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle P(c_\alpha = +) + \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle P(c_\alpha = -). \quad (52b)$$

Заметим, что значения k_α^0 при заданном c_α определяются выражением (42), а значит, при расчёте условных математических ожиданий в (52b) могут считаться детерминированными величинами, то есть

$$\langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle = k^+ \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle, \quad \langle k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle = k^- \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle. \quad (53)$$

Для компактности выкладок будем считать априорные вероятности двух классов одинаковыми, то есть $P(c_\alpha = +) = P(c_\alpha = -) = 1/2$. Это требование не является принципиальным; дальнейшие выкладки могут быть модифицированы для случая неравных априорных вероятностей классов.

Вводя обозначения для (не зависящих от α) условных математических ожиданий

$$\langle \varepsilon^+ \rangle = \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = + \rangle, \quad \langle \varepsilon^- \rangle = \langle \varepsilon_\alpha | c_\alpha = - \rangle \quad (54)$$

и используя соотношения (52a,b), (53), перепишем (51) в виде

$$\hat{k} = \frac{k^+ \langle \varepsilon^+ \rangle + k^- \langle \varepsilon^- \rangle}{\langle \varepsilon^+ \rangle + \langle \varepsilon^- \rangle} = \frac{k^+ + k^-}{2} + \frac{k^+ - k^-}{2} \cdot \frac{\langle \varepsilon^+ \rangle - \langle \varepsilon^- \rangle}{\langle \varepsilon^+ \rangle + \langle \varepsilon^- \rangle}. \quad (55)$$

Пусть генеральная совокупность, из которой выбираются обучающие примеры, описывается условными плотностями распределения вероятности признака x по условию принадлежности примера к каждому из двух классов, введёнными в (23). Тогда в предположении малости параметра μ условные математические ожидания $\langle \varepsilon^+ \rangle$ и $\langle \varepsilon^- \rangle$ в (54) могут быть записаны (с точностью до $O(\mu^2)$) исходя из выражения (49) в виде

$$\langle \varepsilon^+ \rangle = \mu \int f_i(x) w_+(x) dx, \quad \langle \varepsilon^- \rangle = \mu \int f_i(x) w_-(x) dx. \quad (56)$$

Если функции $f_i(x)$ – «узкие» в смысле приближённого соотношения (24), то выражения (56) могут быть аппроксимированы в виде

$$\langle \varepsilon^+ \rangle \approx w_+(x_i) \cdot \mu \int f_i(x) dx, \quad \langle \varepsilon^- \rangle \approx w_-(x_i) \cdot \mu \int f_i(x) dx, \quad (57)$$

в результате чего результат (55) переписывается в виде (25).

Строгая формулировка аппроксимации (57) требует конкретизации свойств функций, входящих в выражения. Например, как показано в [3, п. 5 Приложения], если на некотором отрезке $x \in [a_i, b_i]$ функции $w_+(x)$ и $f_i(x)$ интегрируемы, и для $w_+(x)$ справедлива оценка $w_+(x) \in [\underline{w}_i^+, \overline{w}_i^+]$, а для $f_i(x)$ имеем $f_i(x) > 0$ на интервале $x \in (a_i, b_i)$, и $f_i(x) = 0$ при $x \notin (a_i, b_i)$ (что выполняется для семейства функций $f_i(x)$, заданных выражениями (37a), (37b), если положить $a_i = x_{i-1}$, $b_i = x_{i+1}$), то справедлива интервальная оценка

$$\underline{w}_i^+ \cdot \mu \int f_i(x) dx \leq \langle \varepsilon^+ \rangle \leq \overline{w}_i^+ \cdot \mu \int f_i(x) dx, \quad (58)$$

которая (вместе с аналогичной оценкой для $\langle \varepsilon^- \rangle$) является строгой формулировкой аппроксимации (57). Соответствующие соотношения, аналогичные (26), (27), но основанные на формулировке аппроксимации (58) вместо (57), могут быть получены из (55) и записываются в виде

$$\hat{k}_i \quad \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} \quad \frac{k^+ + k^-}{2} \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{w}_i^+ < \underline{w}_i^-, \\ \underline{w}_i^+ > \overline{w}_i^-, \end{array} \right. \quad (59)$$

$$n_i^{\text{eq}} \quad \left\{ \begin{array}{l} < \Theta \\ > \Theta \end{array} \right\} \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{w}_i^+ < \underline{w}_i^-, \\ \underline{w}_i^+ > \overline{w}_i^-. \end{array} \right. \quad (60)$$

Запишем теперь уравнение для дисперсий в отображении (46) с учётом (50), также факторизуя математические ожидания с учётом независимости k_α от k_α^0 и ε_α ; индекс α для краткости отбросим внутри не зависящих от него математических ожиданий:

$$\begin{aligned} D[k_{\alpha+1}] &= \langle k_{\alpha+1}^2 \rangle - \langle k_{\alpha+1} \rangle^2 = \\ &= \langle (k_\alpha(1 - \varepsilon_\alpha) + k_\alpha^0 \varepsilon_\alpha)^2 \rangle - (\langle k_\alpha \rangle (1 - \langle \varepsilon \rangle) + \langle k^0 \varepsilon \rangle)^2 = \\ &= \langle k_\alpha^2 \rangle \langle (1 - \varepsilon)^2 \rangle + 2 \langle k_\alpha \rangle \langle (1 - \varepsilon) k^0 \varepsilon \rangle + \langle (k^0 \varepsilon)^2 \rangle - \\ &\quad - \langle k_\alpha \rangle^2 (1 - \langle \varepsilon \rangle)^2 - 2 \langle k_\alpha \rangle (1 - \langle \varepsilon \rangle) \langle k^0 \varepsilon \rangle - \langle k^0 \varepsilon \rangle^2. \quad (61) \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые с учётом определения дисперсии и соотношения

$$\langle(1 - \varepsilon)^2\rangle = (1 - \langle\varepsilon\rangle)^2 + D[\varepsilon], \quad (62)$$

получаем

$$D[k_{\alpha+1}] = D[k_{\alpha}](1 - \langle\varepsilon\rangle)^2 + \langle k_{\alpha}^2 \rangle D[\varepsilon] - 2\langle k_{\alpha} \rangle (\langle k^0 \varepsilon^2 \rangle - \langle k^0 \varepsilon \rangle \langle \varepsilon \rangle) + D[k^0 \varepsilon]. \quad (63)$$

В пределе $\mu \rightarrow 0$ имеем соотношение малости $\varepsilon = O(\mu)$ (49), откуда следует $D[\varepsilon] = O(\mu^2)$, $D[k^0 \varepsilon] = O(\mu^2)$, и

$$D[k_{\alpha+1}] = D[k_{\alpha}](1 - 2\langle\varepsilon\rangle) + O(\mu^2), \quad (64)$$

тогда для стационарного значения дисперсии $D[k]_s = D[k_{\alpha+1}] = D[k_{\alpha}]$ находим

$$D[k]_s = \frac{O(\mu^2)}{2\langle\varepsilon\rangle} = O(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0. \quad (65)$$

Список литературы

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989. 608 с.
2. Alpaydin E. Introduction to Machine Learning. Fourth Edition. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2020. 683 p.
3. Сутягин А. А., Канаков О. И. Метод обучения коллективного классификатора на основе конкуренции в режиме сосуществования // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 220–239. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-220-239.
4. Didovyk A., Kanakov O. I., Ivanchenko M. V., Hasty J., Huerta R., Tsimring L. Distributed classifier based on genetically engineered bacterial cell cultures // ACS Synthetic Biology. 2015. Vol. 4, no. 1. P. 72–82. DOI: 10.1021/sb500235p.
5. Kanakov O., Kotelnikov R., Alsaedi A., Tsimring L., Huerta R., Zaikin A., Ivanchenko M. Multi-input distributed classifiers for synthetic genetic circuits // PLoS ONE. 2015. Vol. 10, no. 5. P. e0125144. DOI: 10.1371/journal.pone.0125144.
6. Goh B. S. Global stability in many-species systems // The American Naturalist. 1977. Vol. 111, no. 977. P. 135–143. DOI: 10.1086/283144.
7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: ЛЕНАНД, 2022. 456 с.

References

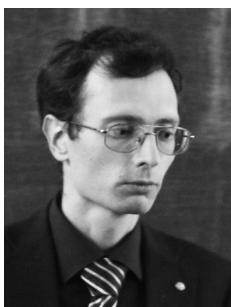
1. Aivazyan SA, Buchstaber VM, Yenyukov IS, Meshalkin LD. Applied Statistics: Classification and Reduction of Dimensionality. Moscow: Finansy i Statistika; 1989. 608 p. (in Russian).
2. Alpaydin E. Introduction to Machine Learning. Fourth Edition. Cambridge, Massachusetts: MIT Press; 2020. 683 p.
3. Sutyagin AA, Kanakov OI. Collective classifier learning strategy based upon competition in the coexistence regime. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(2):220–239 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-2-220-239.
4. Didovyk A, Kanakov OI, Ivanchenko MV, Hasty J, Huerta R, Tsimring L. Distributed classifier based on genetically engineered bacterial cell cultures. ACS Synthetic Biology. 2015;4(1):72–82. DOI: 10.1021/sb500235p.

5. Kanakov O, Kotelnikov R, Alsaedi A, Tsimring L, Huerta R, Zaikin A, Ivanchenko M. Multi-input distributed classifiers for synthetic genetic circuits. PLoS ONE. 2015;10(5):e0125144. DOI: 10.1371/journal.pone.0125144.
6. Goh BS. Global stability in many-species systems. The American Naturalist. 1977;111(977): 135–143. DOI: 10.1086/283144.
7. Gnedenko BV. A Course in Probability Theory. Moscow: LENAND; 2022. 456 p. (in Russian).



Сутягин Алексей Алексеевич — родился в Нижнем Новгороде (1992). Окончил с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (ННГУ) по направлению «Радиофизика» (2016). Неоднократный победитель и призёр творческих и научных конкурсов. С 2019 преподаёт на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ в должности ассистента. Научные интересы — конкурентная динамика, коллективные классификаторы. Зарегистрировал РИД в рамках научной работы.

Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
 Национальный исследовательский
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: alealesutyagin@gmail.com
 AuthorID (eLibrary.Ru): 981112



КанакOV Олег Игоревич — родился в Нижнем Новгороде (1981). Окончил с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (ННГУ) по направлению «Радиофизика» (2004). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (2007, ННГУ) и доктора физико-математических наук (2017, ННГУ) по специальности «Радиофизика». С 2007 года преподаёт на кафедре теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (с 2019 — в должности профессора). Научные интересы — нелинейная динамика биологических моделей, коллективные классификаторы, локализованные решения и взаимодействие мод в нелинейных гамильтоновских решётках. Опубликовал более 30 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, проспект Гагарина, 23
 Национальный исследовательский
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: okanakov@rf.unn.ru
 AuthorID (eLibrary.Ru): 142927
 ORCID: 0000-0001-9041-2209