



## ПАРАМЕТРЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ РЕКУРСИВНОЙ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАНТОВАНИЕМ

Ю.А. Брюханов, Е.А. Мясников

Исследованы параметры предельных циклов, возникающих в системе второго порядка с нелинейным сумматором. Рассматриваются квантования двух типов: округление и усечение по величине. Предложены новые методы (аналитический и численный) исследования зависимостей параметров предельных циклов от коэффициентов системы. При помощи первого из них получены ограничения в виде рациональных функций от коэффициентов системы на амплитуды предельных циклов. Эти ограничения подтверждены при помощи второго метода.

### Введение

Рассматриваются свободные колебания в цифровой рекурсивной системе второго порядка прямой формы реализации [1]. Система содержит сумматор, два элемента задержки  $z^{-1}$  и два умножителя  $-a$  и  $b$  (рис. 1). Практически реализуемая цифровая система имеет конечную разрядность машинного слова, вследствие чего обладает конечным числом состояний, а ее выходной сигнал квантован по уровню. Исследуются два метода квантования результатов суммирования: усечение по величине и округление. Оба метода реализуются при построении системы, использующей двоичный дополнительный код [2]. Ниже полагаем, что параметры системы выбираются внутри треугольника устойчивости [3]

$$\Delta = \{(a,b) : |b| < 1 \cap b + |a| < 1\}.$$

Квантование выходного сигнала приводит к возникновению нежелательных автоколебаний – предельных циклов. В известных работах даются либо отрывочные, либо приближенные сведения о влиянии эффектов квантования на динамику цифровых фильтров. Так, в работах [2,4–6] описаны аналитические методы исследования динамики конкретных структур рекурсивных цифровых фильтров второго порядка с фиксированными нелиней-

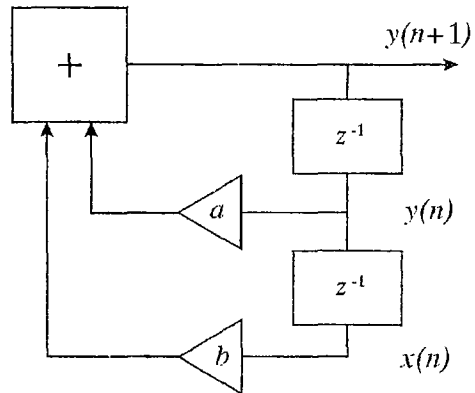


Рис. 1. Структурная схема рекурсивной цифровой системы

ностями квантования, а также приводятся результаты моделирования узкого класса таких структур. При этом авторы ограничиваются рассмотрением небольших интервалов значений параметров систем, малых длин периодов (до 4–х) и не предлагают более универсальных методов исследования параметров предельных циклов. Это обуславливает необходимость создания более общих и более точных методик исследования таких проблем.

Для достижения поставленной задачи предлагаем новые методы (аналитический и численный) исследования зависимостей параметров предельных циклов от коэффициентов системы.

### 1. Аналитическое исследование

Определим параметры предельных циклов. Без потери общности положим шаг квантования равным единице. При этом свободные колебания цифровой системы второго порядка с одним квантователем после сложения описываются разностным уравнением

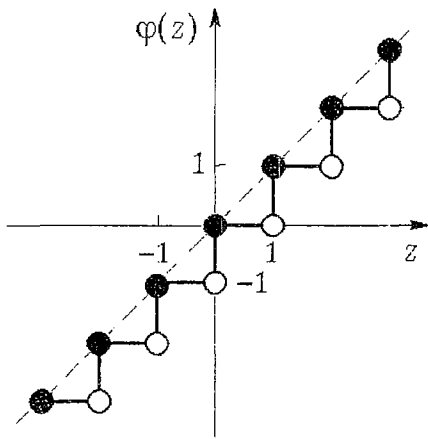


Рис. 2. Характеристика квантователя

$$x_{n+2} = \varphi(ax_{n+1} + bx_n - c), \quad (1)$$

где при усечении по величине  $c=0$ , при округлении  $c=-1/2$ , а функция  $\varphi(z)$  определена следующим образом:

$$\varphi(z) = L, \text{ если } L \leq z < L + 1, \quad (2)$$

где  $L$  – целое число. Вид функции (2) показан на рис. 2. Все движения системы вследствие характерного ступенчатого вида функции  $\varphi(z)$  суперустойчивы.

Условием существования предельного цикла периода  $N$  является разрешимость системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(ax_{N-1} + bx_{N-2} - c), \\ x_1 = \varphi(ax_0 + bx_{N-1} - c), \\ x_2 = \varphi(ax_1 + bx_0 - c), \\ \dots \\ x_{N-1} = \varphi(ax_{N-2} + bx_{N-3} - c), \end{cases} \quad (3)$$

где  $x_i$  – целые числа, а  $i \in [0, N-1]$ . Ступенчатый характер функции  $\varphi(z)$  позволяет преобразовать эти условия в систему линейных неравенств

$$\begin{cases} C_1 \leq ax_{N-1} + bx_{N-2} - x_0 < C_2, \\ C_1 \leq ax_0 + bx_{N-1} - x_1 < C_2, \\ C_1 \leq ax_1 + bx_0 - x_2 < C_2, \\ \dots \\ C_1 \leq ax_{N-2} + bx_{N-3} - x_{N-1} < C_2. \end{cases} \quad (4)$$

Запишем эту систему в векторном виде

$$C_1 \leq Cx < C_2, \quad (5)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \\ a & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ b & a & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{N-3} \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Все компоненты векторов  $C_1$  и  $C_2$  равны  $c$  и  $1+c$ , соответственно, а компоненты вектора  $x$  являются отсчетами некоторого периода длины  $N$ . Размерности всех векторов равны  $N$ , а матрицы  $C$  —  $N \times N$ . Система неравенств (5) определяет  $N$ -мерный многогранник, образованный пересечением пространственных слоев, заключенных между параллельными плоскостями (4). Пространство векторов  $x$  есть пространство всевозможных периодов длины  $N$ , а многогранник (5) ограничивает в этом пространстве множество допустимых периодов этой длины при заданных коэффициентах  $(a, b)$  и фиксированном методе квантования.

Рассмотрим семейство векторов  $\{V^j\}$ ,  $j \in [0, J-1]$ , определяющих координаты вершин этого многогранника ( $J$  — количество вершин). Заметим, что компоненты  $V^j$  этих векторов являются рациональными функциями коэффициентов  $(a, b)$ , где порядок полиномов в знаменателе равен  $N$ , а в числителе не превышает  $N-1$ . Получим функции  $V^j$  решением (например, методом Крамера) набора линейных уравнений

$$CV^j = Z^j, \quad (7)$$

где  $Z^j \in Z$ . Множество  $Z$  строится следующим образом. образуем семейство всевозможных векторов размерности  $N$ , компоненты которых принимают значения, равные  $c$  или  $1+c$ . Из этого семейства исключим все векторы  $Z^k$ , для которых найдется такая пара  $Z^l$ , что

$$Z^k = -Z^l$$

или

$$Z^k = \sigma^{(r)}[Z^l],$$

где  $r$  — целое число, отличное от нуля; преобразование  $\sigma$  имеет вид

$$\sigma[z] = \sigma[(z_0, z_1, z_2, \dots, z_{N-1})^T] = (z_{N-1}, z_0, z_1, \dots, z_{N-2})^T,$$

а символ  $T$  обозначает операцию транспонирования. Из полученного множества исключим векторы, компоненты которых образуют периодическую на интервале  $[0, N-1]$  последовательность. Итоговое семейство векторов составит множество  $Z$ .

Функции  $V^j$ , полученные при фиксированном векторе  $Z^j \in Z$ , определяют оценку амплитуд

$$A(Z^j, a, b) = \max_{i \in [0, N-1]} \{|V_i^j(a, b)|\}$$

предельных циклов периода  $N$ , подобных такому вектору-шаблону. При этом верхняя оценка амплитуды допустимых предельных циклов равна

$$A_{\max}(a, b) = \max_Z \{A(Z^j, a, b)\}.$$

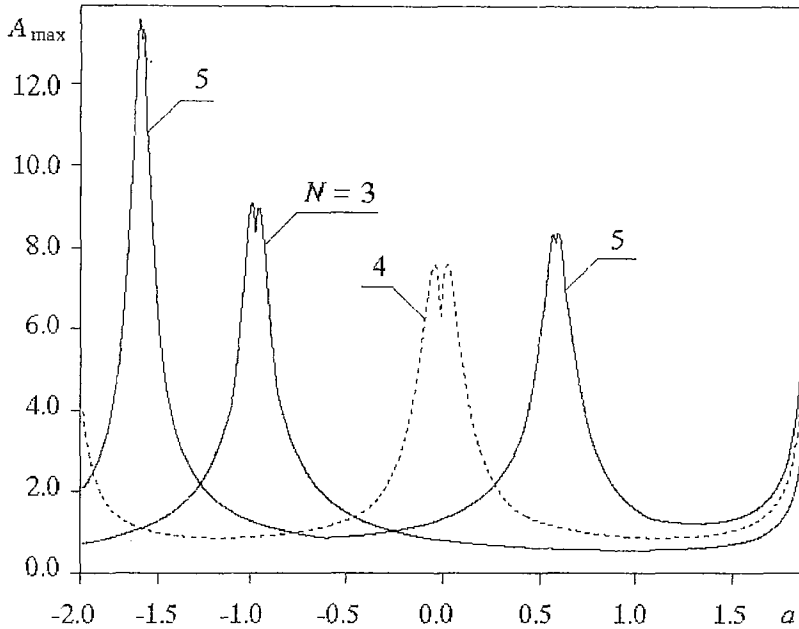


Рис. 3. Распределение амплитуд предельных циклов для  $N \in \{3;4;5\}$

Таким образом, сущность предлагаемого аналитического метода заключается в следующем. Зафиксируем длину периода  $N$ , выберем интересующий тип квантования. Построим множество  $Z$  по описанным выше правилам. Для векторов данного множества вычислим их компоненты (функции  $V_i(a,b)$ ) при помощи уравнения (7). Огибающая модулей этих функций есть оценка амплитуд предельных циклов периода  $N$ . Полную картину зависимости амплитуд предельных циклов от коэффициентов  $(a,b)$  получим, рассмотрев другие значения  $N$ . Следует отметить, что для систем прямой формы реализации этот метод легко распространяется на более высокие (без ограничений) порядки.

Рассмотрим применение данного метода к системе (1). Положим  $N=3$ , а в качестве метода квантования выберем округление. При этом определитель матрицы  $C$  равен

$$\det C(a,b) = -1 + 3ab + a^3 + b^3.$$

Для вектора  $Z=(1/2, -1/2, 1/2)^T$ , которым исчерпывается множество  $Z$  при заданных условиях, получим три функции следующего вида:

$$V_0(a,b) = (1+a-b-ab-a^2+b^2)/(2\det C(a,b)),$$

$$V_1(a,b) = (-1+a+b+ab+a^2+b^2)/(2\det C(a,b)),$$

$$V_2(a,b) = (1-a+b-ab+a^2-b^2)/(2\det C(a,b)).$$

График огибающей модулей этих функций (при фиксированном  $b=-0.92$ ) показан на рис. 3. На этом же рисунке показаны огибающие для периодов  $N=\{4,5\}$ .

## 2. Численный метод поиска предельных циклов

Описанный выше аналитический метод применим только к системам прямой формы реализации. Недостатком прямой формы является высокая чувствительность к эффектам квантования при высоких порядках. Это обуславливает

использование на практике других (неканонических) форм реализаций цифровых фильтров [1]. Следовательно, существует необходимость исследования цифровых фильтров произвольной формы реализации. В связи со значительными сложностями аналитического описания процессов, предлагается численное решение этой задачи. К сожалению, применение известной процедуры вычисления амплитуд циклов при заданных  $(a, b)$  крайне ограничено, поскольку рассматриваемые сугубо нелинейные системы весьма чувствительны к начальным условиям и требуют большого количества вычислений. В общем случае при  $L$  уровнях квантования требуется  $L^2 N$  вычислений, где  $N$  – длительность реализации динамического процесса.

Для повышения эффективности вычислительного процесса предлагается новый метод. Заметим, что исследуемая система имеет бесконечное число дискретных состояний. Однако амплитуды предельных циклов ограничены, и для анализа периодических движений достаточно рассмотреть конечное число состояний. В целях повышения эффективности алгоритма введем в исследуемую систему нелинейность, ограничивающую число необходимых состояний. В качестве такой нелинейности можно выбрать, например, нелинейность насыщения

$$S(z) = \begin{cases} S_{\min}, & z < S_{\min}, \\ S_{\max}, & z > S_{\max}, \\ z, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При этом функция  $f(z)$ , описывающая нелинейность сумматора, принимает вид

$$f(z) = S(\varphi(z-c)),$$

а количество уровней квантования вычисляется по формуле

$$L = S_{\max} - S_{\min} + 1.$$

В данном случае поведение системы удобно описать при помощи двумерного двухпараметрического отображения

$$\mathcal{F}: \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ f(bx_0 + ay_0) \end{pmatrix},$$

где  $x_0, y_0, x_1, y_1 \in \{S_{\min}, S_{\min}+1, \dots, S_{\max}-1, S_{\max}\}$  – состояния системы на фазовой плоскости  $(x, y)$ .

Вследствие дискретности состояний и ограниченности функции  $S(z)$  система имеет конечное количество состояний. Графически эти состояния могут быть представлены как узлы конечной квадратной решетки с шагом 1 по обеим координатам и равным количеством строк и столбцов. Нижний левый узел решетки имеет координаты  $(S_{\min}, S_{\min})$ , а верхний правый –  $(S_{\max}, S_{\max})$ . Это позволяет перейти от отображения  $\mathcal{F}$  к алгебраической перестановке [7]. При построении перестановки производится последовательная нумерация состояний по следующему принципу. Узлу нижнего левого угла присваивается номер «0», следующему узлу, выше на одну строку, присваивается номер «1» и т.д. до последней строки первого столбца. По достижении последней строки первого столбца осуществляется переход к первой строке второго столбца с продолжением последовательной нумерации. В результате получаем следующую перестановку:

$$\pi: i \rightarrow \pi(i), \quad i \in [0, L^2-1], \quad (8)$$

где

$$\begin{cases} i = (y_0 - S_{\min}) + L(x_0 - S_{\min}), \\ \pi(i) = (y_1 - S_{\min}) + L(x_1 - S_{\min}). \end{cases}$$

Полученная перестановка представляет собой одномерную целочисленную запись движений системы. Для восстановления реальных движений на фазовой плоскости необходим обратный переход к отображению  $\mathcal{F}$ . Возможность такого перехода обусловлена тем, что в перестановке (8) сохранено взаимно однозначное соответствие номеров состояний  $i$  и их координат  $(x_0, y_0)$ . Для его осуществления необходимо определить по номеру состояния содержащие его строку и столбец  $n$ , сместив их номера на значения  $S_{\min}$ , получить соответствующие координаты состояния на плоскости

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(i/L) + S_{\min} \\ y_0 = i - L\varphi(i/L) + S_{\min} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = \varphi(i/L) + S_{\min} \\ y_1 = \pi(i) - L\varphi(\pi(i)/L) + S_{\min} \end{cases} \quad (9)$$

Для анализа перестановки (8) предлагаем следующий алгоритм.

1. Сформируем множество  $U = \{m: m \neq \pi(n) \ m, n \in [0, L^2 - 1]\}$ . Исключим из перестановки (8) все переходы с номерами  $i \in U$ .

2. Если множество  $U$  пусто – работа алгоритма завершена. В противном случае повторим шаг 1.

Полученная в результате операций 1 и 2 перестановка  $\Pi$  содержит информацию обо всех предельных циклах. При помощи формул (9) определим максимальную амплитуду предельного цикла

$$A_{\max} = \max_{j \in \Pi} \{|x_0(j)|\}.$$

Величина  $A_{\max}$  может использоваться как количественный критерий динамических свойств различных структур рекурсивных цифровых фильтров. Таким образом, предлагаемый метод сводится к пошаговому поиску инвариантных траекторий (предельных циклов) вместо используемого в известной процедуре анализа  $L^2$  реализаций динамического процесса.

Результаты применения вышеописанного алгоритма при использовании округления и усечения по модулю приводятся на рис. 4 в виде ступенчатых функций. На рис. 4, *a* в виде плавной кривой показан график аналитической оценки максимальной амплитуды предельных циклов периода 3. Рисунок подтверждает высокую точность полученных первым методом аналитических оценок.

Предлагаемый численный метод применим к любым структурам цифровых фильтров с конечной длиной машинного слова. Выбранная в качестве примера нелинейность насыщения может быть заменена любой другой ограниченной функцией.

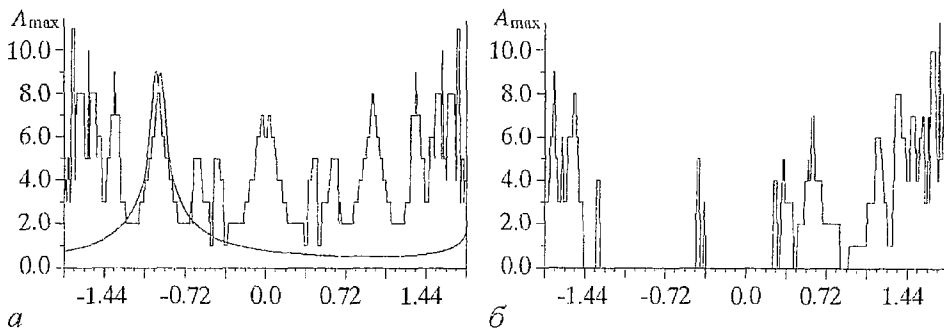


Рис. 4. Распределение амплитуд предельных циклов: *a* – квантование округлением, *б* – квантование с усечением по величине

## Заклучение

Исследованы параметры предельных циклов, возникающих в системе второго порядка с нелинейным сумматором. Рассмотрены квантования двух типов: округление и усечение по величине. Предложены новые методы (аналитический и численный) исследования зависимостей параметров предельных циклов от коэффициентов системы. При помощи первого метода получены ограничения (в виде рациональных функций от коэффициентов системы) на амплитуды предельных циклов. Эти ограничения подтверждены при помощи второго метода.

Результаты работы могут использоваться при анализе устойчивости нелинейных цифровых фильтров второго порядка и синтезе систем цифровой обработки информации.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17939).*

## Библиографический список

1. Коча В.М., Торяник Н.Н. К вопросу о структурах цифровых фильтров// Зарубежная радиоэлектроника. 1985. № 11. С.16.
2. Bose T., Chen Mei-Qin. Stability of digital filters implemented with two's complement truncation quantization// IEEE Trans. Signal Processing. 1992. Vol. 40, № 1. P. 24.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.
4. Sandberg I.W., Kaiser J.F. A bound on limit cycles in fixed-point implementations of digital filters// IEEE Trans. Audio and Electroacoustics. 1972. Vol. AU-20, № 2. P. 110.
5. Munson D.C., Strickland J.H., Walker T.P. Maximum amplitude zero-input limit cycles in digital filters// IEEE Trans. Circuits and Systems. 1984. Vol. CAS-31, № 3. P. 266.
6. Djebbari A., Belbachir M.F., Rouvaen J.M. A fast exhaustive search algorithm for checking limit cycles in fixed-point digital filters// Signal Processing. 1999. Vol. 69. P. 199.
7. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1976.

Ярославский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
после доработки

13.07.1999  
26.01.2000

## PARAMETERS OF LIMIT CYCLE IN RECURSIVE SECOND-ORDER DIGITAL SYSTEM WITH ONE QUANTIZER

*Y.A. Bryuhanov, E.A. Myasnikov*

Parameters of limit cycles in second-order digital system with non-linear adder are investigated. Two kinds of quantization way are considered: rounding and value truncation. New analytical and computer aimed methods are proposed for investigation of limit cycles parameters dependencies upon the system coefficients. Upper bounds of limit cycles amplitudes are obtained by the first method. These bounds are rational functions of system coefficients and are verified by the second method.



*Брюханов Юрий Александрович* – родился в Красноярске (1941), окончил Красноярский политехнический институт (1967) и аспирантуру Воронежского государственного университета (1970). С 1971 года работает в Ярославском государственном университете, в настоящее время заведует кафедрой динамики электронных систем. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Область научных интересов – нелинейная динамика электронных систем дискретного времени. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 180 статей. Заслуженный деятель науки РФ.



*Мясников Евгений Анатольевич* – родился в Ярославле (1974), окончил Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (1996), аспирант кафедры динамики электронных систем. Область научных интересов – нелинейная динамика цифровых систем, влияние эффектов квантования на динамику цифровых фильтров. Имеет 4 публикации в отечественных и зарубежных изданиях.