

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ХАОТИЧЕСКИМ ВРЕМЕННЫМ РЯДАМ краткий обзор

О.Л. Аносов, О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов

Дан краткий обзор проблем, возникающих при восстановлении динамических уравнений из хаотических временных рядов. Описаны наиболее употребительные процедуры восстановления, включающие в себя оценку размерности системы, выбор типа уравнений, определение параметров нелинейных функций путем подгонки дифференциальных уравнений к временным рядам, селекцию ненадежных коэффициентов, испытание восстановленной системы на глобальную устойчивость. Приведены примеры восстановления динамических уравнений.

Предложен эффективный критерий различения динамических и случайных процессов, опирающийся на понятие степени предсказуемости. Указаны принципиальные ограничения, налагаемые влиянием шумов, в частности, ограничения на время предсказуемости (наличие «горизонта предсказуемости»), на длину анализируемой выборки, на количество определяемых коэффициентов и др. Изложен «дискриминантный» (двухоконный) подход, позволяющий выявлять нестационарности в динамической системе. Наконец, указана важная роль малоразмерных моделей для выявления нестационарностей в системах высокой размерности. В заключение перечислены перспективные области применения процедур восстановления.

Введение

Проблема восстановления динамических уравнений процессов из временных рядов возникла в теории динамических систем около 40–50 лет тому назад и связана с именами А.Н. Колмогорова и Дж. Габора. Основной подход к решению этой проблемы, которая известна также как обратная задача нелинейной динамики, состоит в «подгонке» дифференциального уравнения определенного класса к экспериментальным данным. Состояние вопроса о восстановлении дифференциальных уравнений в «дохаотическую» эпоху отражено в монографиях [1–4].

Особенность хаотических систем, которые стали предметом всеобщего интереса в 80–90-х годах, состоит в их исключительно высокой чувствительности к малым возмущениям, в том числе к шумовым воздействиям, присутствующим в любых физических системах. Малые возмущения в хаотических системах нарастают по экспоненциальному закону и довольно быстро достигают размеров аттрактора. Эта особенность хаотических систем получила название локальной неустойчивости. Несмотря на свойство локальной неустойчивости, хаотические системы все же допускают восстановление динамических уравнений на основе

стратегии подгонки, разработанной ранее для нехаотических динамических систем. Разумеется, свойство локальной неустойчивости не может не отразиться на качестве восстановления дифференциального уравнения: время предсказуемости, то есть интервал времени, на котором восстановленное уравнение обеспечивает удовлетворительное предсказание поведения наблюдаемой системы, для хаотических систем оказывается заметно более коротким, чем для нехаотических систем.

Данная статья написана по материалам доклада, сделанного авторами на саратовской школе ХАОС'98 [5], и представляет собой попытку кратко изложить основные проблемы восстановления дифференциальных уравнений, описывающих хаотическую систему.

Ранние попытки восстановить динамические уравнения системы из хаотических временных рядов в отсутствие шумов были предприняты Кремерсом и Хублером [6], Кратчфильдом и МакНамарой [7], Бриденом и Хублером [8], Гусбэ [9], Брашем и Кадтке [10]. В последующих работах, в частности, в публикациях [11–13], реконструкция уравнений производилась с учетом шумов. Различные подходы к проблеме восстановления уравнений из зашумленных экспериментальных данных и некоторые частные результаты освещены в работах [14–16], а также в отдельных статьях монографического сборника [17], посвященного предсказуемости сложных динамических систем. Общая характеристика методов восстановления дана также в представительном обзоре Павлова и Янсон [18], посвященном задачам восстановления динамики из электрокардиограмм. Одни из первых примеров восстановления уравнений для ряда медико-биологических объектов (сердце человека и др.) содержатся в работах Анищенко и Смирновой [19], Янсон и Анищенко [20,21].

Основные алгоритмы восстановления динамики описаны в разделе 1. Иллюстративные примеры приведены в разделе 2. Принципиально важный вопрос о критериях различения случайного и детерминированного, от решения которого зависит стратегия восстановления динамики, обсужден в разделе 3. В качестве основного критерия выявления динамических закономерностей предлагается выбрать время предсказуемости наблюдаемого процесса на основе принятой нелинейной модели. В разделе 4 анализируется новый вопрос о влиянии шумов на число восстанавливаемых коэффициентов и сделан вывод о существовании оптимальной длины выборки. Кроме того, в разделе 5 затронут вопрос о возможности выявления нестационарности в хаосе при помощи дискриминантного (двухоконного) подхода, а в разделе 6 – проблема скрытой передачи информации с использованием процедур восстановления динамических уравнений. Полезность низкоразмерных динамических моделей для выявления нестационарности в процессах высокой размерности отмечена в разделе 7. Наконец, в разделе 8 мы перечислим перспективные области применения методов восстановления динамических уравнений.

1. Процедуры восстановления динамических уравнений из временных рядов

1.1. Выбор вектора состояния. Пусть датчик регистрирует значения наблюдаемой величины $y(t)$, которая может характеризовать процессы произвольной физической природы (механические, электрические, химические, биологические и др.). Величина $y(t)$ называется наблюдаемой или реализацией процесса.

При выявлении динамических закономерностей в экспериментальных временных рядах опираются либо на дискретные модели, описываемые разностными уравнениями (отображениями), либо на непрерывные модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. В первом случае экспериментальные данные изначально представлены дискретными отсчетами y_j , $j=1,2,\dots,n$. Во втором случае для компьютерной обработки данных производится дискретизация экспериментальной непрерывной реализации $y(t)$ с

некоторым (обычно постоянным) шагом по времени Δ , то есть вместо непрерывного процесса $y(t)$ записываются дискретные значения y_j

$$y_j \equiv y[t^0 + (j-1)\Delta], \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где j – номер отсчета, t^0 – момент начала измерений; величина Δ обычно называется шагом дискретизации, а набор значений y_j – временным рядом.

Предположим, что наблюдаемая величина y порождается некоторой динамической системой и является либо одной из ее переменных состояний, либо скалярной функцией от них. Набор переменных, характеризующих состояние динамической системы в данный момент времени, называется *вектором состояния*.

Задача состоит в том, чтобы по одномерному временному ряду

(а) восстановить фазовый портрет (аттрактор) изучаемой системы,

(б) восстановить динамические уравнения, в каком-то приближении описывающие поведение исходной системы.

Для решения задачи (а) в работе [22] был предложен метод задержки, согласно которому вектор состояния восстанавливался по формуле

$$\mathbf{Y}(t) = \{y(t), y(t+\Delta'), y(t+2\Delta'), \dots, y(t+(N-1)\Delta')\}, \quad (2)$$

где N – размерность вложения, Δ' – задержка вложения. Для дискретного векторного ряда задержка вложения выражается через целое число k шагов дискретизации $\Delta' = k\Delta$, а вектор состояния записывается следующим образом:

$$\mathbf{Y}_j = \{y_j, y_{j+k}, y_{j+2k}, \dots, y_{j+(N-1)k}\}.$$

Такенс [23] углубил этот результат, показав, что в отсутствие шумов и при размерности вложения $N \geq 2d+1$, где d – фрактальная размерность исследуемой хаотической системы, множество (2) топологически эквивалентно аттрактору системы (см. также [24]). Теорема Такенса подготовила почву для построения алгоритмов предсказания хаотических процессов с использованием сведений о динамической природе наблюдаемого временного ряда [25–28].

Вектор состояния (2), составленный из дискретных отсчетов (1), взятых с задержкой Δ' , имеет преимущества при построении конечно-разностных уравнений, описывающих исследуемую систему. Для большинства физических систем, которые описываются не разностными, а дифференциальными уравнениями, в качестве вектора состояния вместо (2) удобнее брать совокупность производных исследуемого процесса

$$\mathbf{Y}' = \{y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}\}, \quad (3)$$

где $y^{(n)}$ означает производную n -го порядка

$$y^{(n)}(t) = d^n y(t) / dt^n,$$

а под производной нулевого порядка понимается сама наблюдаемая функция $y(t)$. Метод последовательного дифференцирования, использующий вектор состояния (3), довольно часто используется в литературе (см., например, [7, 8, 11–14, 29]).

Фактически производные $y^{(n)}$ наблюдаемого процесса $y(t)$ вычисляются через конечные разности, скажем

$$y^{(n+1)}(t) = [y^{(n)}(t+\Delta) - y^{(n)}(t)] / \Delta. \quad (4)$$

Очевидно, точность вычисления производных тем хуже, чем больше уровень шумов и больше интервал дискретизации Δ . Поэтому алгоритм (4) является самым ненадежным элементом во всей процедуре восстановления динамических уравнений.

Кроме упомянутых, имеются и другие возможности введения вектора

состояния. Так, наряду с эквидистантными отсчетами (1) в принципе можно использовать также неэквидистантные измерения [30]. В работе [31] (см. также [20]) в число компонент вектора состояния предложено ввести еще интеграл от наблюдаемой переменной $y(t)$, что способствует стабилизации численных процедур.

Относительно оптимального выбора интервала дискретизации Δ единого мнения в литературе не существует. Так, при работе с вектором задержанных переменных рекомендуется выбирать интервал Δ из условия минимизации функции взаимной информации [32, 33] или же логарифма корреляционного интеграла [34]. В обоих случаях мы имеем дело с интервалами порядка времени корреляции $\tau_{\text{корр}}$. В руководствах по методам идентификации динамических систем (см., например, [1]) интервал Δ рекомендуется выбирать равным $(0.2-0.3)\tau_{\text{корр}}$. Такой выбор согласуется с требованием теоремы Котельникова, согласно которой интервал дискретизации Δ не должен превышать величину $1/(2f)$, где $2f$ – эффективная ширина спектра сигнала: $\Delta < 1/(2f)$. Для сигналов со сплошным спектром, в частности, для хаотических сигналов, ширина спектра $2f$ сравнима с обратным временем корреляции $\tau_{\text{корр}} \sim 1/(2f)$, так что неравенство $\Delta < 1/(2f)$ эквивалентно требованию $\Delta < \tau_{\text{корр}}$. В противном случае, то есть при слишком редких отсчетах ($\Delta \geq \tau_{\text{корр}}$) мы рискуем потерять существенную информацию о системе. В то же время слишком частые отсчеты с $\Delta \ll \tau_{\text{корр}}$ нежелательны из-за резкого увеличения массива данных, не сопровождаемого соразмерным ростом получаемой информации. Эта особенность подчеркивается во множестве публикаций, в частности, в недавно вышедшей книге [80]. Оценка $\Delta \sim (0.2-0.3)\tau_{\text{корр}}$ является компромиссной. В конкретных расчетах имеет смысл оптимизировать выбор интервала дискретизации Δ на фактически имеющемся массиве данных, руководствуясь критерием (18), о котором речь пойдет ниже (см. разд. 3).

Независимо от метода восстановления модели (при помощи вектора состояния (2), восстановленного методом задержки, или же при помощи вектора (3), составленного из производных исследуемого процесса) речь идет о восстановлении динамических уравнений (разностных или дифференциальных) во всем фазовом пространстве, то есть о восстановлении *глобальной* модели.

1.2. Оценка размерности хаотического процесса. Важным элементом восстановления динамических уравнений по экспериментальным данным является оценка размерности исследуемого процесса, то есть оценка эффективного числа степеней свободы, вовлеченных в динамический процесс.

Как известно, хаотические аттракторы характеризуются фрактальной размерностью d [35,36]. Вычислению фрактальной размерности d непосредственно из экспериментальных данных посвящена обширная литература, представление о которой дают работы [37–43]. Располагая фрактальной размерностью d , можно оценить размерность N (ее называют размерностью вложения) по формуле Такенса $N \geq 2d+1$, хотя эта оценка часто оказывается завышенной [43]. В этих условиях часто прибегают к упрощенным оценкам размерности вложения, используя, например, корреляционную размерность [18,32,34,44–47].

Эффективный способ оценки размерности опирается на вычисление ковариационной матрицы, которая составляется из отсчетов $y_j^k \equiv y[t^k + (j-1)\Delta]$, сделанных в моменты времени t_j^k . Ковариационная матрица

$$C_{kj} = \sum_{j=1}^n y_j^k y_j^j \quad (5)$$

имеет размерность $n \times n$. Удобные алгоритмы оценки размерности по матрице были предложены Грассбергером и Прокачchia [48], Брумхэдом и Кингом [49], Ланда и Розенбломом [46]. Простой и не требующий больших массивов алгоритм Ланда и Розенблума опирается на вычисление собственных значений λ_i ковариационной матрицы (5).

Численным моделированием было установлено, что зависимость логарифм–

ма нормированных собственных чисел $\delta_i = \lambda_i / \sum \lambda_i$ от размерности i испытывает излом наклона при некотором значении N (рис. 1), которое и рекомендуется принять за размерность системы (размерность вложения). Считается, что при переходе от малых значений i , для которых характерен большой наклон кривой $\ln \delta_i$, к большим значениям $i > N$, где наклон кривой $\ln \delta_i$ меньше, происходит уменьшение удельного веса «новых» переменных y^k с $i > N$ по сравнению с «базовыми» переменными y^k , отвечающими $i < N$.

Имеются и другие способы оценки размерности, например, с использованием «старых» приемов, развитых в математической статистике [50]. Во всех случаях оценка размерности выступает как экспериментальная величина. В расчетах, проведенных с участием авторов данной работы [11–14], использовались оценки размерности как по методу Брумхэда и Кинга [49], так и методом, описанным в [46].

1.3. Модельное уравнение порядка N с полиномиальной нелинейностью.

Оценив размерность системы, можно приступить к подгонке модельного уравнения к временным рядам. При такой подгонке нелинейные слагаемые в дифференциальных уравнениях чаще всего аппроксимируются полиномами, хотя возможны и иные аппроксимации нелинейных функций, например, кусочно-линейными или кусочно-непрерывными функциями. Выбор аппроксимирующих функций диктуется, прежде всего, априорными сведениями о системе.

Если априорные данные о структуре системы отсутствуют, то полиномиальная аппроксимация выступает как разумное начальное приближение, которое может быть уточнено (или даже заменено иным, лучшим, приближением) по мере накопления данных о системе в процессе подгонки. Конечным результатом подгонки является определение коэффициентов при нелинейных слагаемых в уравнениях определенного класса. Таким образом, решение обратной задачи нелинейной динамики сводится, в сущности, к параметризации модельного уравнения заданного класса путем наилучшего (в том или ином смысле) согласования модели с экспериментальными данными.

Ниже мы будем говорить преимущественно о восстановлении дифференциальных уравнений системы. Отметим, однако, что приемы восстановления разностных уравнений во многом подобны приемам реконструкции дифференциальных уравнений [18].

Весьма общее модельное уравнение системы может быть представлено в форме полинома от компонент модельного вектора состояния

$$\mathbf{Z} = (z_0, z_1, \dots, z_N),$$

где под z_n понимается n -я производная модельного процесса $z(t)$

$$z_n \equiv z^{(n)} = d^n z / dt^n,$$

а под z_0 — сама переменная $z(t)$: $z_0(t) = z(t)$. Компактная запись модельного дифференциального уравнения имеет вид

$$F(\mathbf{z}, \mathbf{A}) = \sum_m A_m G_m(\mathbf{z}) = 0. \quad (6)$$

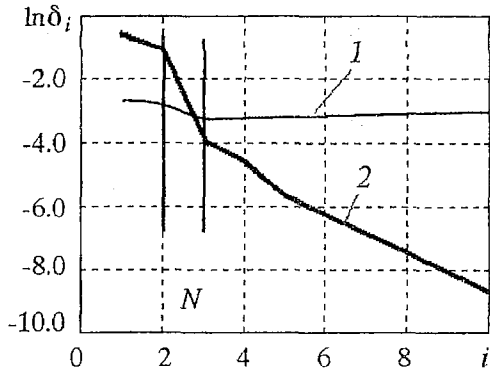


Рис. 1. К оценке размерности системы N при помощи собственных чисел корреляционной матрицы. Кривая 1 — зависимость логарифма собственных чисел от размерности i для случайного процесса. Кривая 2 — зависимость собственных чисел для x -компоненты системы Ресслера в хаотическом режиме. Вертикальные линии показывают границы излома, по которому оценивается размерность вложения N .

Здесь G_m – мономы (одночлены), составленные из степеней z_0, z_1, \dots, z_N ; $\mathbf{A}=(A_1, \dots, A_M)$ – M -компонентный вектор коэффициентов, подлежащих определению.

В силу однородности уравнения (6) относительно A_m один из коэффициентов A_m может быть выбран произвольно. Чаще всего полагают равным единице коэффициент при старшей производной $z_N(t)$. Остальные коэффициенты находятся из уравнения (6), если в качестве модельных значений вектора $\mathbf{z}(t)$ подставить в (6) экспериментальные данные $y(t)=(y, y^{(1)}, \dots, y^{(N)})$, соответствующие моментам времени t_j^k ,

$$\sum_m A_m G_m(\mathbf{z})|_{z(t_j^k)=y(t_j^k)} = 0. \quad (7)$$

Число M неизвестных коэффициентов A_m быстро растет с увеличением порядка дифференциального уравнения N и степени нелинейности s . Например, полное (с учетом всех возможных комбинаций) уравнение третьего порядка ($N=3$) с кубичной нелинейностью ($s=3$) имеет вид

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}, \mathbf{A}) = & A^0 + (A_0 z_0 + A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3) + \\ & + (A_{00} z_0^2 + A_{01} z_0 z_1 + \dots + A_{33} z_3^2) + \\ & + (A_{000} z_0^3 + A_{001} z_0^2 z_1 + \dots + A_{333} z_3^3) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Это уравнение содержит 35 коэффициентов, а если положить $A_3=1$, чтобы третья производная $z_3 \equiv d^3 z/dt^3$ вошла в уравнение (8) с единичным коэффициентом, то число неопределенных коэффициентов составит 34. Таким образом, число отсчетов в данном случае не может быть менее $M=34$.

По мере увеличения N и s число коэффициентов M , подлежащих определению, катастрофически (факториально) возрастает: оно оценивается как $M=(N+s+1)!/[(s+1)!N!]$. При переходе от $N=s=3$ к $N=s=4$ оно увеличивается от 35 до 126, при $N=s=5$ достигает 462, а при $N=s=6$ переваливает за тысячу $M=1716$. Столь стремительный рост числа неопределенных коэффициентов приводит не только к значительным техническим трудностям при их вычислении (фактически речь идет об обращении матриц высокой размерности), но и к принципиальным затруднениям познавательного характера. Если бы технические трудности удалось преодолеть, то есть если бы имелась возможность быстро и надежно вычислить огромное число коэффициентов, то польза от такой громоздкой модели была бы сомнительной, поскольку сама модель становится чрезвычайно сложным объектом для изучения. Такая модель имела бы плохо обозримое пространство параметров, которым, к тому же, весьма трудно придать определенный физический смысл. Сказанное заставляет ограничиваться малоразмерными модельными уравнениями и максимально использовать всю доступную априорную информацию об исследуемой системе, чтобы предельно упростить модельное уравнение и уменьшить число коэффициентов, подлежащих определению.

В идеале число временных отсчетов n должно соответствовать числу M неопределенных коэффициентов. Если учесть необходимость определения производных до N -го порядка, то к M следовало бы добавить еще $2N$ отсчетов (по N дополнительных отсчетов в начале и конце выборки), так что минимальная длительность выборки должна составить

$$n_{\min} = M + 2N. \quad (9)$$

В действительности из-за присутствия шумов длительность выборки приходится увеличивать по сравнению с (9), поскольку восстанавливаемые коэффициенты A_m могут испытывать существенные флуктуации. В этих условиях для оценки неизвестных коэффициентов A_m приходится либо усреднять значения A_m по нескольким соседним выборкам длиной $M+2N$ [11–13], либо брать избыточное (по сравнению с

М) число отсчетов n и оценивать затем A_m по методу наименьших квадратов, как это было предложено еще в ранних работах [6,7], а также в работе [18].

1.4. Модельная система N уравнений первого порядка. Кроме описанного подхода, использующего одно модельное уравнение N -го порядка (6), возможен и несколько иной подход к выбору модельных уравнений, опирающийся на теорему Такенса [23]. Согласно этой теореме, решение $\mathbf{X}(t)$ динамической системы весьма общего вида

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{X}),$$

допускающей существование аттрактора размерности d , может быть плавным образом отображено на решение $\mathbf{x}(t)$ более простой системы

$$dx_1/dt = x_2, \quad dx_2/dt = x_3, \quad \dots \quad dx_N/dt = f(\mathbf{x}) \quad (10)$$

размерности $N \geq 2d+1$. Поэтому система уравнений (10) тоже может служить удовлетворительной моделью для многих динамических систем.

Указанный подход можно реализовать, например, следующим образом [11,12,16]. Пусть \mathbf{S}_j – собственные векторы ковариационной матрицы (5). Тогда произвольный вектор состояния \mathbf{Y} можно разложить по собственным векторам корреляционной матрицы \mathbf{S}_j («оптимальный» базис) и ограничиться в этом разложении членами, соответствующими размерности системы N ,

$$\mathbf{Y} \cong \eta_1 \mathbf{S}_1 + \eta_2 \mathbf{S}_2 + \dots + \eta_N \mathbf{S}_N. \quad (11)$$

Коэффициенты этого разложения η_k , найденные из временного ряда y_j^k , могут служить новыми переменными вместо y_j . Поведение коэффициентов η_k можно тогда моделировать при помощи переменных ζ_k , подчиняющихся системе уравнений первого порядка вида (10)

$$d\zeta_1/dt = \zeta_2,$$

$$d\zeta_2/dt = \zeta_3,$$

...

$$d\zeta_N/dt = \Phi(\zeta, \mathbf{B})/g(\zeta, \mathbf{C}). \quad (12)$$

Нелинейность системы описывается здесь дробно-рациональной функцией $\Phi(\zeta, \mathbf{B})/g(\zeta, \mathbf{C})$, где Φ и g представляют собой полиномы от компонент вектора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ с неопределенными коэффициентами B_k и C_k , объединенными в векторы \mathbf{B} и \mathbf{C} . Для полинома $g(\zeta, \mathbf{C})$ можно ограничиться невысокой (скажем, второй) степенью нелинейности. Общее число коэффициентов B_k и C_k , подлежащих определению, может оказаться даже меньше, чем число коэффициентов A_m в уравнении (6).

При численном решении системы уравнений (12) приходится преодолевать технические трудности, связанные с наличием полюсов у функции Φ/g . Специальные процедуры, необходимые для преодоления этих трудностей, описаны, например, в работе [28]. На практике дробно-рациональные функции в уравнении (12) целесообразно использовать только при наличии априорной информации, да и в этом случае дробно-рациональную функцию часто можно успешно аппроксимировать полиномом.

1.5. Другие подходы. Указанными двумя подходами (уравнение порядка N вида (6) и система N уравнений первого порядка вида (12)), использующими полиномиальные аппроксимации нелинейных функций, не исчерпывается все разнообразие приемов, предложенных к настоящему времени. Упомянем еще метод краевых задач, облегчающий подгонку дифференциальных уравнений к экспериментальным данным [51], использование критерия минимальной длины

описания для выбора оптимальной модели [15,52–56], метод *радиальных функций* [15], использование ортогональных полиномов для аппроксимации нелинейностей [6], критерий минимума энтропии модели [7], процедуру синхронизации модели экспериментальными данными [57].

Кроме полиномиальных моделей иногда применяются также кусочно-линейные функции, но их использование, как правило, обусловлено наличием априорной информации [58,59,80].

В ряде случаев, когда измеряется не одна, а несколько компонент исследуемого процесса (скажем, скорость и температура, или ток и напряжение), модельную систему уравнений следует видоизменить таким образом, чтобы появилась возможность согласовать систему уравнений с несколькими временными рядами [60]. Разумеется, наличие дополнительного информационного канала способствует улучшению качества восстановления.

В случае неавтономных систем задача восстановления уравнений существенно усложняется. В настоящее время нам известно только о двух удавшихся попытках восстановления неавтономной системы [61,62].

1.6. Дополнительные процедуры. Кроме перечисленных, иногда применяют и другие процедуры. Прежде всего, упомянем предварительную фильтрацию экспериментальных данных, применяемую иногда для снижения влияния высокочастотных шумов [49,63,64,11–14].

При анализе зашумленных данных или же при использовании малоразмерных моделей в анализе заведомо высокоразмерных процессов восстановленные коэффициенты A_m часто проявляют сильные флуктуации. В этих условиях кроме усреднения коэффициентов A_m по нескольким выборкам, целесообразно применять также процедуру исключения «ненадежных» коэффициентов, флуктуации которых ΔA_m заметно превышают среднее значение \bar{A}_m [11–14]. Практический опыт показывает, что исключение (то есть, фактически, зануление) ненадежных коэффициентов часто уменьшает вариации других, более надежных, коэффициентов.

Наконец, в тех случаях, когда целесообразно проверять восстановленные уравнения на глобальную устойчивость [11–14,16].

2. Примеры

В качестве первого примера рассмотрим аттрактор Рёсслера, находящийся под внешним шумовым воздействием [60,65],

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + f_1, \\ \dot{y} &= x + ay + f_2, \\ \dot{z} &= b - cz + xz + f_3, \end{aligned} \quad (13)$$

где $f_{1,2,3}$ – шумовые компоненты. Для получения исходной реализации интегрировалась система уравнений (13) с учетом шумовых компонент $f_{1,2,3}$ на каждом шаге интегрирования.

Уравнение третьего порядка, эквивалентное системе трех уравнений (13), описывающих аттрактор Рёсслера, в отсутствие шумов имеет вид

$$(-\ddot{z} + \ddot{a}z - \dot{z})(z - c - a) + (c + a)(\dot{a}z - \ddot{z} - z - b) - b(z - c - a)^2 + (z - c - a)(z - c)(\dot{a}z - \ddot{z} - z - b) = 0. \quad (14)$$

Ниже приведены результаты применения процедуры, подробно описанной в [66], к восстановлению зашумленной системы Рёсслера (13), характеризующейся

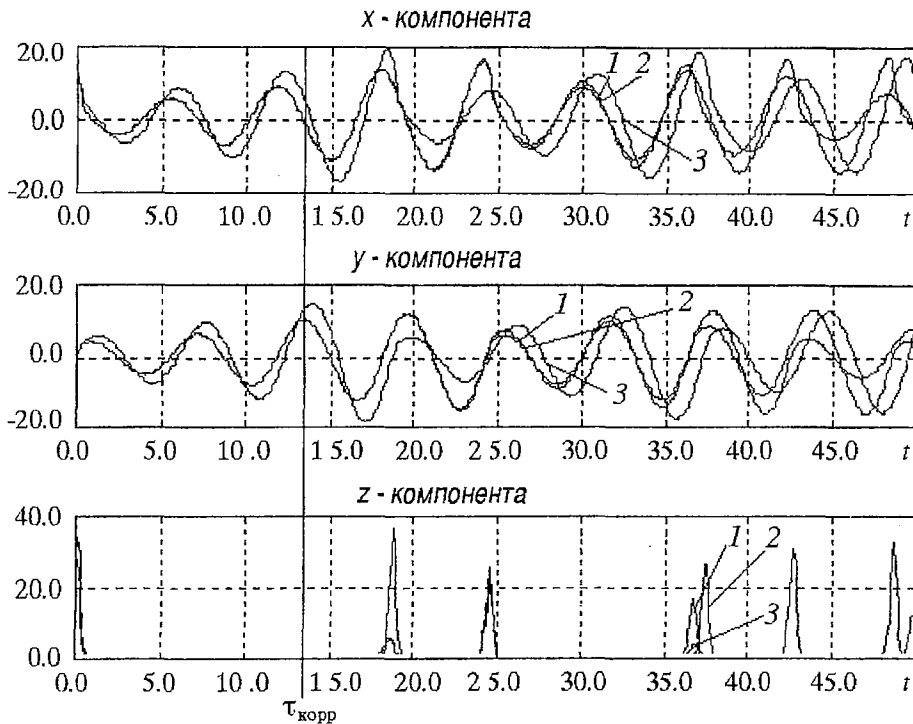


Рис. 2. Исходная незашумленная (1) и восстановленная (2) компоненты аттрактора Рёсслера при $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10.0$ и уровне шумов 10^{-2} . Система восстанавливалась по зашумленной компоненте (3)

параметрами $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10.0$, при среднеквадратичном уровне шума 10^{-2} по реализации $\{z_i\}$. В результате параметризации первоначальной модели, содержащей производные до третьего порядка и все нелинейные комбинации до третьей степени включительно, фактически было получено уравнение (14). Остальные коэффициенты в полном уравнении (8) оказались близкими к нулю и были отброшены в силу их статистической незначимости. Затем, преобразованием данного уравнения в систему дифференциальных уравнений первого порядка получаем систему (13) со значениями $a=0.149$, $b=0.229$ и $c=9.904$. Время предсказуемости рёсслеровского аттрактора на основе восстановленных уравнений по наблюдаемой x -компоненте оказалось достаточно большим: оно в 3.5 раза превышало интервал корреляции $\tau_{\text{корр}}$, который составлял примерно 12 единиц безразмерного времени.

Приведенный выше пример восстановления всех трех компонент рёсслеровского процесса $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ показан на рис. 2. Восстановленные компоненты, обозначенные на рисунке цифрой 2, неплохо описывают реально наблюдаемые осцилляции исходных незашумленных реализаций процесса примерно до 35-го отсчета безразмерного времени.

Восстановленные значения процесса $z(t) \equiv z_0(t)$ и его производных $z_1 \equiv dz_0/dt$ и $z_2 \equiv dz_1/dt$ позволяют реконструировать трехмерный фазовый портрет аттрактора Рёсслера. Восстановленный портрет (рис. 3, а) качественно совпадает с исходным портретом (рис. 3, б).

Разнообразные иные примеры восстановления приведены в публикациях [6–17]. В частности, пример восстановления аттрактора Лоренца на основе «оптимального» базиса описан в работе [11], а также в работах [28,57].

В большинстве публикаций описано восстановление процессов, которые генерировались компьютером в присутствии шумов. В этих условиях «наблюдаемый» процесс $y(t)$ описывался уравнениями заведомо невысокого порядка, что и гарантировало успех восстановления.

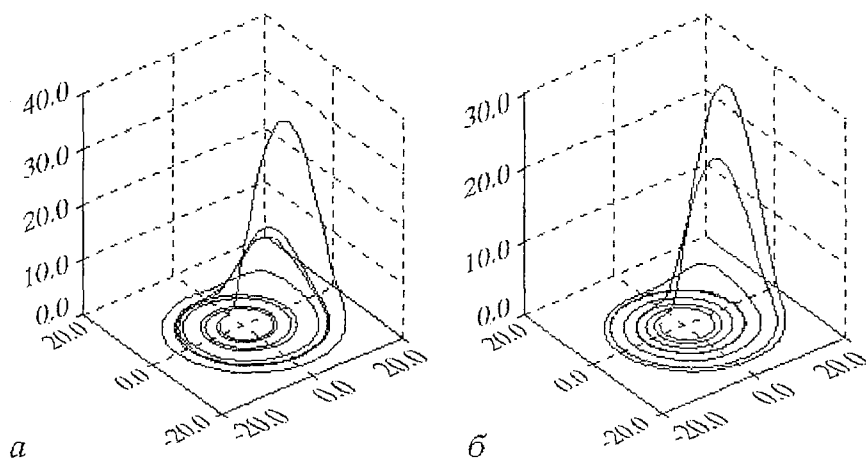


Рис. 3. Исходный (а) и восстановленный (б) фазовый портрет аттрактора Рёсслера при $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10.0$ и уровне шумов 10^{-2}

Гораздо более трудную проблему представляет восстановление уравнений для реальных процессов, в первую очередь, для медико–биологических объектов. Попытки такого рода были предприняты, в частности, сотрудниками кафедры радиофизики Саратовского государственного университета [19–21,29,67] под руководством профессора В.С.Анищенко. Анализ полученных результатов, проведенный в обзорной работе [18], показал, что процедуры восстановления в состоянии выявить «основную», «устойчивую» часть математической модели, тогда как многие детали остаются не раскрытыми. В конечном итоге главная трудность состоит в том, что исследуемые медико–биологические процессы, как правило, имеют более сложную природу, чем это заложено в моделях: более высокая размерность, нестационарность, неавтономность и др. Разумеется, эти препятствия не должны порождать у исследователя чувство обиды: в конце концов, выявление сложной природы процессов и составляет предмет науки.

Поучительные примеры и аспекты восстановления динамики имеются также в работах [67–71,80].

3. Динамические критерии различения случайных и динамических процессов

Один из главных вопросов, которые возникают при выявлении динамики непосредственно из временных рядов, состоит в выработке критериев различения случайных и детерминированных (динамических) процессов. Новый подход к решению этой проблемы, предложенный в работах [72,73], предполагает введение понятия степени предсказуемости наблюдаемого процесса $y(t)$ на основе модели $z(t)$. Степень предсказуемости определяется как нормированная корреляционная функция наблюдения $y(t)$ и прогноза $z(t)$

$$D(\tau) = \langle y(t)z(t) \rangle / [\langle y^2(t) \rangle \langle z^2(t) \rangle]^{1/2}. \quad (15)$$

Здесь $\tau=t-t^0$ представляет собой время, протекшее после начала наблюдения t^0 . Статистическое усреднение в (15) производится по совокупности начальных моментов t^0 , которые «открывают» выборки из временного ряда $y(t)$. Начальные значения модельного процесса $z(t^0)$ «подгоняются» к $y(t^0)$ в начале каждой такой выборки, так что в результате усреднения в (15) сохраняется только зависимость от разности $\tau=t-t^0$.

При $\tau=0$ (в (15) это соответствует моменту времени $t=t^0$) степень предсказуемости обращается в единицу в силу принятого условия $z(t^0)=y(t^0)$. Напротив, при достаточно больших интервалах τ степень предсказуемости падает до малых значений в силу рассогласования временного хода прогноза $z(t)$ и наблюдения $y(t)$. Общий характер зависимости $D(\tau)$ показан на рис. 4. Характерное время, отвечающее уменьшению $D(\tau)$ до уровня 0.5, может служить удобной оценкой времени предсказуемости процесса $y(t)$ на основе модели $z(t)$. Для хаотической системы время предсказуемости оценивается как [72,73]

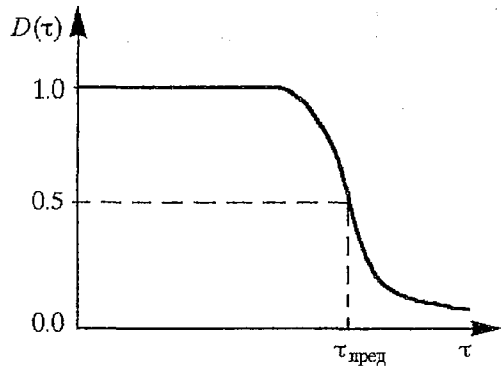


Рис. 4. Зависимость степени предсказуемости D от времени $\tau=t-t^0$, прошедшего после начала испытания. Время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ отвечает спаданию D до уровня 0.5

$$\tau_{\text{пред}} = [1/(2\lambda_+)] \ln[A^2/(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{\text{мод}}^2)], \quad (16)$$

где A – размер аттрактора, σ_r^2 – уровень шумов в самой физической системе, σ_v^2 – вклад шумов измерительного прибора, а $\sigma_{\text{мод}}^2$ характеризует неточность выбранной модели (это слагаемое иногда называют «шумом незнания»). Важно, что время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ может превышать время корреляции $\tau_{\text{корр}}$ и тем больше, чем меньше уровни шумов σ_v^2 , σ_r^2 и неточность модели $\sigma_{\text{мод}}^2$.

Очевидно, чем больше время предсказуемости, тем лучше предсказательная сила модели. Исходя из этого, мы предлагаем принять отношение

$$\gamma = \tau_{\text{пред}}/\tau_{\text{корр}} \quad (17)$$

в качестве *меры эффективности* восстановления динамических уравнений. Если для восстановленной модели отношение $\gamma = \tau_{\text{пред}}/\tau_{\text{корр}}$ не превышает единицы, $\gamma \leq 1$, то попытку восстановления динамических уравнений следует признать неудачной. В этом случае динамический прогноз обеспечивает такое же время предсказания, как и простейший «консервативный» прогноз по правилу $z(t^0+\tau)=y(t^0)$, то есть по правилу «завтра, как сегодня». Такой прогноз, очевидно, никоим образом не учитывает динамические свойства прогнозируемого процесса.

Существует убеждение, что некоторое улучшение прогноза по сравнению с консервативной моделью могут дать авторегрессионные модели, но, как показано в работе [74], такие модели принципиально не могут преодолеть барьер $\tau_{\text{пред}} \sim \tau_{\text{корр}}$. Таким образом, при $\gamma \leq 1$ динамические связи в наблюдаемом процессе $y(t)$, даже если они и существуют, не вскрываются, а сам процесс квалифицируется как случайный. Разумеется, утверждение о случайности наблюдаемого процесса $y(t)$ при $\gamma \leq 1$ справедливо, строго говоря, по отношению только к тем классам моделей, которые подвергались испытаниям. Здесь мы сталкиваемся с типичной для естествознания ситуацией, когда неудачные попытки вскрыть динамические закономерности в наблюдаемом явлении при помощи данной модели вовсе не исключают возможности успеха при помощи иных моделей, скажем, неполиномиальных, неавтономных и др. Грубо говоря, речь идет о подборе «интеллектуальных отмычек» к исследуемому процессу, что эквивалентно выявлению кода, при помощи которого зашифрованы данные.

Очевидно, чем сложнее исследуемый процесс, тем труднее его дешифровка, и тем ценнее представляется положительный результат дешифровки, характеризуемый неравенством $\gamma > 1$, когда время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ хотя бы

ненамного превышает время корреляции. В этом случае уже можно говорить о выявлении следов динамической природы исследуемого процесса. Наконец, при $\gamma \gg 1$ динамическую природу процесса несомненно следует считать выявленной.

В отличие от времени корреляции $\tau_{\text{корр}}$, которое всегда можно измерить по стандартной процедуре, время предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ заранее не известно. Оно определяется в процессе подгонки дифференциального уравнения к временному ряду и существенно зависит как от уровня шумов, так и от вида модели. Скажем, в случае системы с «негладкой» нелинейностью типа $|x|$ модельное уравнение с полиномиальной нелинейностью имеет меньше шансов на успех, чем уравнение с кусочно-линейной аппроксимацией нелинейных функций. Оценивая время предсказуемости для различных испытуемых моделей, мы можем приблизиться к оптимальной модели, руководствуясь указанным выше критерием максимизации времени предсказуемости

$$\tau_{\text{пред}} = \max. \quad (18)$$

Если разные модели обеспечивают одно и то же время предсказуемости, то их следует признать эквивалентными, как бы сильно ни отличались они по внешнему виду. Сама по себе задача восстановления динамического уравнения не имеет однозначного решения: в пределах заданной погрешности к одному и тому же временному ряду можно подогнать много (и даже бесконечно много) уравнений. Однако при наличии нескольких эквивалентных (в указанном выше смысле) моделей допустимо говорить о полном решении задачи восстановления, поскольку различные эквивалентные модели обеспечивают одинаковое качество предсказания. Дальнейшая селекция моделей возможна лишь при привлечении «физической» информации о наблюдаемом процессе.

4. Оптимальная длина выборки и ограничения на количество восстанавливаемых коэффициентов

Как известно, точность определения параметров обычных (то есть нехаотических) сигналов повышается при увеличении длины выборки n . В случае же сигналов хаотической природы эта закономерность нарушается: увеличение длины выборки сверх определенного оптимального значения $n_{\text{опт}}$ не только не улучшает, но даже ухудшает точность восстановления параметров. Объясняется это свойством локальной неустойчивости хаотических систем: малые флуктуации, которые всегда присутствуют в реальных физических системах, при $\Delta t > \tau_{\text{пред}}$ нарастают до размеров аттрактора и тем самым существенно искажают сигнал $y(t)$. Очевидно, коэффициенты A_m , «извлекаемые» из искаженной реализации процесса $y(t)$, также будут подвергаться искажениям, что нежелательно.

Оптимальную длину выборки можно оценивать как отношение времени предсказуемости $\tau_{\text{пред}}$ к длительности интервала дискретизации Δ

$$n_{\text{опт}} = \tau_{\text{пред}} / \Delta. \quad (19)$$

Как более короткие, так и более длинные по сравнению с $n_{\text{опт}}$ выборки лишь увеличивают погрешность определения коэффициентов.

Оценка (19) важна потому, что она ограничивает число коэффициентов M , которые можно надежно найти при подгонке модельного уравнения к временному ряду. Согласно (9) $M \sim n_{\text{опт}} - 2N$.

Поскольку интервал между отсчетами Δ выбирается равным $(0.2 \div 0.3)\tau_{\text{корр}}$, оптимальная длина выборки в $3 \div 5$ раз превышает отношение $\gamma = \tau_{\text{пред}} / \tau_{\text{корр}}$, то есть

$$n_{\text{опт}} \sim (3 \div 5)\gamma.$$

При $\gamma=(5\div 7)$, что отвечает относительному уровню погрешностей 10^{-3} , для $n_{\text{опт}}$ получаем оценку: $n_{\text{опт}} \leq (15\div 35)$. Таким образом, даже при оптимальной длительности выборки можно рассчитывать на определение не более чем двух или трех десятков коэффициентов A_m . Это требование налагает принципиальные ограничения на сложность моделей, используемых для подгонки к временным рядам. Насколько известно авторам, ограничения вида (19) до сих пор не принимались во внимание.

5. Дискриминантная процедура

Дискриминантная процедура, разработанная в статистическом анализе, направлена на выявление нестационарности в наблюдаемом случайном процессе путем сравнения (дискриминации) статистических характеристик процесса в двух смежных временных окнах $[t-T, t]$ и $[t, t+T]$, каждое из которых имеет длительность T . Модификация минимаксной процедуры, предложенная в работах [60, 75–77], заключается в использовании компонент модельного уравнения наблюдаемого процесса в качестве признаков дискриминантной функции $d(t)$. Важно, чтобы дискриминантная функция была линейна относительно входящих в модельное уравнение коэффициентов. Например, при восстановлении системы Рёсслера или выявлении изменений управляющего параметра в качестве $d(t)$ выступало расширенное уравнение типа (14)

$$d(t) = A_1 \ddot{z} + \dots + A_l z^2 + \dots + A_n = 0.$$

Входящие сюда коэффициенты A_m определялись из минимаксного условия: разность средних значений дискриминантных функций в двух временных окнах $d(t)$ и $d(t+T)$ должна быть максимальной, а сумма квадратов дисперсий минимальна. Минимаксный критерий сводит задачу нахождения коэффициентов A_m к задаче на собственные значения взаимно-ковариационной матрицы дискриминантных функций и позволяет создать алгоритм для решения задач восстановления, работающий в реальном времени. Кроме того, данный критерий, вычисляемый на обновляющейся последовательности, оказался наиболее чувствительным при обнаружении нестационарностей [60].

Таким образом, в результате применения дискриминантной процедуры удается не только восстанавливать разностные или дифференциальные уравнения системы, но и выявлять изменения коэффициентов A_m во времени.

В качестве примера на рис. 5, а представлена реализация последовательности, подчиняющейся логистическому отображению

$$y_{n+1} = r_n y_n (1 - y_n) \quad (20)$$

с переменным управляющим параметром r_n . В данном случае параметр r_n (рис. 5, б) скачком меняет свою величину от значения 3.80 до значения 3.82, а затем возвращается к первоначальному значению 3.80. Такие изменения не удается выявить ни визуально, ни путем анализа последовательности y_n при помощи статистического критерия Фишера

$$H = (M_1 - M_2)^2 / (S_1^2 + S_2^2), \quad (21)$$

где M_1 и M_2 – средние значения y_n в первом и втором окнах, а S_1^2 и S_2^2 – дисперсии y_n в этих окнах. Иными словами, методы, разработанные в статистическом анализе, не позволили вскрыть изменения в динамике хаотической последовательности y_n .

Между тем, если в качестве дискриминантной функции взять не саму последовательность y_n , а функцию $d_n = y_{n+1} - r_n y_n (1 - y_n)$, которая в отсутствие шумов в силу (20) обращается в нуль, то критерий Фишера (21) продемонстрирует легко

обнаружимые всплески в моменты скачкообразного увеличения или уменьшения управляющего параметра r_n (ср. рис. 5, в и г). Увеличение интенсивности шума с 0.1% до 1% уменьшает величину всплеска примерно до единицы (рис. 5, д), что в данном случае не воспрепятствовало дискриминации скачков управляющего параметра r_n .

Другие примеры эффективности дискриминантной процедуры имеются в работах [76] (синусоидальное изменение управляющего параметра в логистическом отображении) и [66,77] (система Рёслера с переменным параметром).

6. Передача сигналов с использованием процедур восстановления динамических уравнений

Если структура динамической системы известна, а неизвестными являются переменные во времени величины нескольких коэффициентов, то алгоритмы восстановления динамики в состоянии выявить модуляцию параметров системы и тем самым реализовать канал связи с использованием хаотических процессов. Выявление модуляции параметров можно осуществить двумя способами: при помощи дискриминантной процедуры, как это показано на рис. 5 (см. также работы [60,75–77]), так и путем прямого восстановления динамических уравнений, как это было реализовано в недавних работах Анищенко и Павлова [78] и Анищенко, Павлова и Янсон [59]. В последних работах, а также в монографии [80] описанный выше принцип передачи сигналов был эффектно продемонстрирован на примере системы, преобразующей изображение в последовательность чисел на передающем конце и восстанавливающей изображение на приемном конце на основе решения обратной задачи нелинейной динамики. Такая система скрытой связи допускает как одноканальную передачу информации (модуляции и

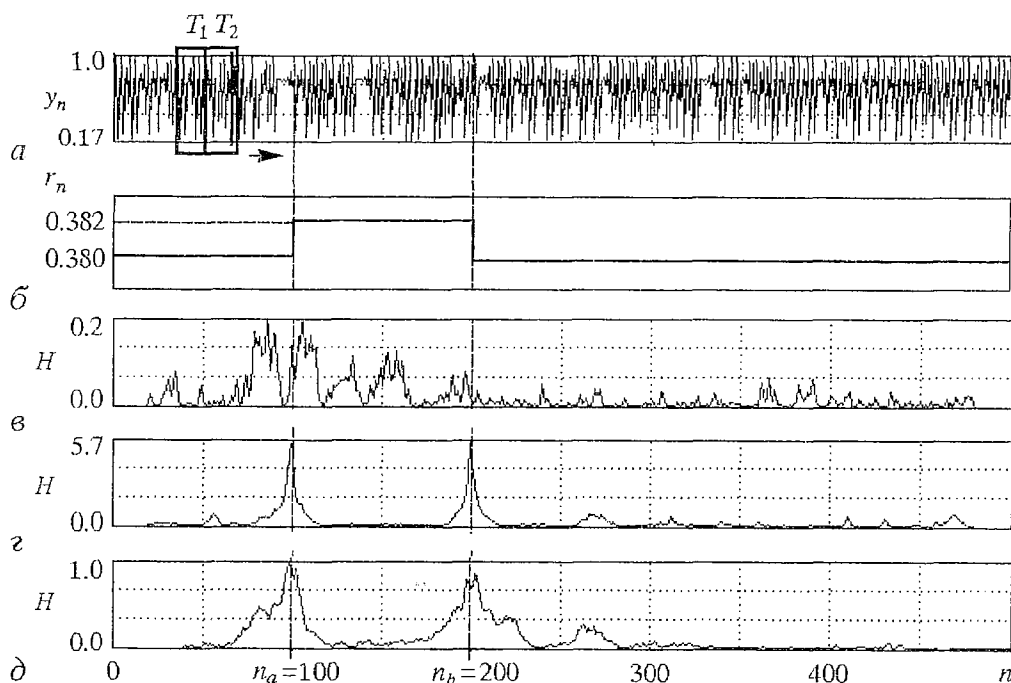


Рис. 5. Выявление нестационарностей при помощи дискриминантной (двухоконной) процедуры на примере логистического отображения: а – реализация логистического отображения (19) с управляющим параметром r_n , закон изменения которого представлен на рис. б; в – изменение средней невязки для авторегрессионной модели; г и д – изменение критерия Фишера (20) при уровне шумов соответственно 0.1% и 1%

демодуляции подвергается только один параметр), так и многоканальную передачу (путем модуляции и демодуляции нескольких параметров).

Стоит отметить, что потенциальные характеристики каналов связи с использованием хаотических сигналов (помехоустойчивость, предельная пропускная способность, уровень межканальных помех и т.д.) нуждаются в систематическом изучении

7. Использование малоразмерных моделей для анализа систем высокой размерности

Малоразмерные модели, обладающие сами по себе свойством локальной неустойчивости, могут демонстрировать высокую чувствительность к различным возмущениям в высокоразмерных системах. Эта особенность малоразмерных моделей делает перспективным их применение для анализа изменений в сложных реальных системах. В работах [77,79] было продемонстрировано, что коэффициенты низкоразмерной модели сердечных ритмов, восстановленной на основе временных рядов для так называемых RR-интервалов (интервалов между соседними пиками на электрокардиограмме), зависят от нагрузки на сердечную мышцу (реализуемой велоэргометром) и позволяют выявлять аэробно-анаэробный переход непосредственно из анализа RR-интервала, не прибегая к сложной процедуре газового анализа, как это принято в настоящее время.

Другим перспективным направлением применения малоразмерных моделей в соединении с дискриминантной процедурой может явиться анализ климатических изменений на основе временных рядов для среднегодовой температуры. Хотя размерность N временного температурного ряда очень высока (оценки дают для N значения до $20 \div 30$), малоразмерные модели могут претендовать на выявление трендов в климатической системе на уровне динамического описания. Авторы данной работы были бы заинтересованы в установлении делового партнерства с научными группами, работающими в области климатических изменений, с целью совместного анализа проблемы с привлечением малоразмерных моделей.

8. Области применения процедур восстановления динамических уравнений

Описанные выше методы восстановления динамических уравнений из хаотических временных рядов могут оказаться полезными для решения широкого круга задач, в том числе:

- для идентификации хаотических систем;
- для предсказания поведения хаотических систем;
- для выявления нестационарностей в хаотических системах при помощи дискриминантной процедуры, в том числе с использованием малоразмерных динамических моделей;
- для облегчения решения задач управления хаосом при помощи подходящего внешнего воздействия;
- для скрытой передачи сигналов с использованием хаотической несущей;
- для подавления шумоподобного сигнала динамической природы (путем восстановления модели и последующего вычитания такого «шума» из сигнала);
- для выявления потенциальных бифуркаций в модели исследуемой системы путем анализа восстановленных динамических уравнений.

В заключение авторы выражают признательность участникам школы ХАОС' 98 за плодотворные обсуждения проблемы, а также рецензентам данной статьи за взыскательную критику.

Работа поддержана программами ИНТАС (грант 96-0305), РФФИ (грант 99-02-16625) и ФЦП «Интеграция» (грант А-0030).

Библиографический список

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер.с англ. под ред. Я.З. Цыпкина. М.: Наука, 1991. 432 с.
2. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. М.: Техника. 1995. 312 с.
3. *Современные методы идентификации систем / Под ред. П.Эйкхоффа.* М.: Мир, 1983.
4. *Балакришнан А.В.* Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988.
5. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я. и Кравцов Ю.А.* Восстановление хаотических систем из временных рядов: достижения и ограничения // V Международная школа «Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС' 98)», Саратов, Россия, 6–10 октября 1998. Тезисы докладов. Саратов, 1998. С. 16.
6. *Cremers J., Hubler A.* Construction of differential equations from experimental data // *Z.Naturforschung.* 1987. Vol. 42 (A), № 4. P. 897.
7. *Gruchfield J.P., McNamara B.S.* Equations of motion from a data series// *Complex Systems.* 1987. Vol. 1, № 2. P. 417.
8. *Breedon J., Hubler A.* Reconstructing equations of motion from experimental data with unobserved variables// *Phys.Rev.A.* 1990. Vol. 42, № 10. P. 5817.
9. *Gouesbet G.* Reconstruction of the vector fields of continuous dynamical systems from numerical scalar time series // *Phys.Rev.A.* 1991. Vol. 43, № 10. P. 5321.
10. *Brush J.S., Kadtke J.B.* Nonlinear signal processing using empirical global dynamical equations // *Proc. ICASSP-92.* San-Francisco, 1992. P. 321.
11. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы из временных рядов // *РЭ.* 1994. Т. 39, № 2. С. 241.
12. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление дифференциальных уравнений автостохастических систем по временной реализации одной динамической переменной процесса//*ЖТФ.* 1994. Т. 64, № 3. С. 1.
13. *Gribkov D.A., Gribkova V.V., Kravtsov Yu.A., Kuznetsov Yu.I., Rzhanov A.G., Anosov O.L., Butkovskii O.Ya.* Dynamic equation reconstruction from the observed one dimensional time series// *Dynamical Systems and Chaos (Proc.Internat.Conf. Tokyo, May 23–27, 1994).* Singapore: World Scientific, 1995. Vol. 2. P. 378.
14. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D.* Predictable nonlinear dynamics: advances and limitations // *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing/ Ed. R.A.Katz. AIP Conf.Proc. N.Y.: AIP Press, 1995. Vol. 375. P. 71.*
15. *Mees A.I., Judd K.* Parsimony in dynamical modelling // *Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 123.
16. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A.* Strategy and algorithms for dynamical forecasting// *Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 105.
17. *Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996.
18. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б.* Применение метода восстановления математической модели к анализу электрокардиограмм// *Изв.вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 1. С. 93.
19. *Anishchenko V.S., Smirnova N.B.* Analysis and synthesis of dynamical systems from experimental data // *SPIE.* 1993. Vol. 2098. P. 137.
20. *Janson N.B., Anishchenko V.S.* Modelling the dynamical systems on experimental data // *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing/ Ed. R.A.Katz. AIP Conf. Proc. N.Y.: AIP Press, 1995. Vol. 375. P. 688.*
21. *Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по

- экспериментальным рядам // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 112.
22. *Packard N.M., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series//Phys.Rev.Lett. 1980. Vol. 45. P. 712.
 23. *Takens F.* Detecting strange attractor in turbulence // Warwick, 1980. Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics/Eds Rang, L.S.Young. Berlin: Springer, 1981. P. 366.
 24. *Noakes L.* The Takens embedding theorem // Int.J.Bifurc.Chaos. 1991. Vol. 1, № 1. P. 867.
 25. *Casdagli M.* Nonlinear prediction of chaotic time series // Physica D. 1989. Vol. 35. P. 335.
 26. *Farmer J.D., Sidorowich J.J.* Predicting chaotic time series // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. P. 845.
 27. *Breeden J.L., Packard N.H.* A learning algorithm for optimal representation of experimental data // Int. J. Bifurc. Chaos. 1994. Vol. 4, № 2. P. 311.
 28. *Gousbet G., Letellier C.* Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 4955.
 29. *Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Баланов А.Г., Анищенко В.С.* Задача реконструкции математической модели применительно к электрокардиограмме// Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 16. С. 57.
 30. *Breeden J.L., Packard N.H.* Nonlinear analysis of data sampled nonuniformly in time//Physica D. 1992. Vol. 58. P. 273.
 31. *Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н.* Об одном методе восстановления неоднородных аттракторов//Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 7. С. 1.
 32. *Frazer A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates from mutual information// Phys. Rev.A. 1986. Vol. 33. P. 1134.
 33. *Bransater A., Swinney H.L.* Strange attractor in weakly turbulent Couette-Taylor flow // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. P. 2207.
 34. *Liebert W., Shuster H.G.* Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series//Phys. Rev. A. 1989. Vol. 42. P. 107.
 35. *Шустер Г.* Детерминированный хаос: введение / Пер с англ. М.: Мир, 1988. 240 с.
 36. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 311 с.
 37. *Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A.* Dimension of chaotic attractors//Physica D. 1983. Vol. 7. P. 153.
 38. *Frederickson P., Kaplan J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of strange attractors//J. Diff. Eqs. 1983. Vol. 49. P. 185.
 39. *Wolf A., Swift J.* Progress in computing Lyapunov exponents from experimental data//Statistical physics and chaos in fusion plasmas/ Eds C.W.Horton Jr., L.E.Reichl. NY.: Wiley, 1984. P. 111.
 40. *Pawelski K., Shuster H.G.* Generalized dimensions and entropies from a measured time series//Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35, № 1. P. 48.
 41. *Havstad J.W., Ehlers C.L.* Attractor dimension of nonstationary dynamical systems from small data sets//Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 845.
 42. *Theiler J.* Estimating fractal dimension//J. Opt. Soc. Am. A. 1990. Vol. 7, № 6. P. 105.
 43. *Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* Embedology//J. Stat. Phys. 1991. Vol. 65, № 3,4. P. 579.
 44. *Mane R.* On the dimension of the compact invariant set of certain nonlinear maps//Warwick. 1980. Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics/ Eds D.A. Rang, L.S.Young. Berlin: Springer, 1981. P. 230.
 45. *Theiler J.* Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time series data//Phys.Rev.A. 1986. Vol. 34. P. 2427.
 46. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Об одном методе оценки размерности вложения аттрактора по результатам эксперимента//ЖТФ. 1989. Т. 59, № 1. С. 13.
 47. *Nerenberg M.A.H., Essex C.* Correlation dimension and systematic geometric effects//Phys. Rev. A. 1990. Vol. 43. P. 7065.

48. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, № 5. P. 346.
49. *Broomhead D.S., King G.P.* Extracting qualitative dynamics from experimental data//Physica D. 1986. Vol. 20, № 2. P. 217.
50. *Schwarz G.* Estimating the dimension of a model // Annals of Statistics. 1978. Vol. 6. P. 461.
51. *Baake E., Baake M., Bock H.G., Briggs K.M.* Fitting ordinary differential equations to chaotic data // Phys.Rev. 1992. Vol. 45, № 8. P. 5524.
52. *Mees A.I.* Modelling complex systems // Dynamics of Complex Interconnected Biological Systems/ Eds A.I.Mees, T.Vincent, L.S.Jennings. Boston: Birkhauser, 1990.
53. *Mees A.I.* Dynamical systems and tessellation: detecting determinism in data // Int. J.Bifurc. Chaos. 1991. Vol. 1. P. 777.
54. *Mees A.I.* Parsimonious dynamical reconstruction // Int. J. Bifurc. Chaos. 1993. Vol. 3. P. 669.
55. *Mees A.I.* Nonlinear dynamical systems from data // Probability, Statistics and Optimization / Ed. F.P.Kelly. Chichester (UK): Wiley, 1994. P. 225.
56. *Mees A.I.* Reconstructing chaotic systems in the presence of noise // Towards the Harnessing of Chaos / Ed. M.Yamaguti. Tolyo: Elsevier, 1994. P. 305.
57. *Brown R., Rulkov N.F., Tracy E.R.* Modelling and synchronizing chaotic systems from time-series data//Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49, № 5. P. 3784.
58. *Glover J., Mees A.I.* Reconstructing the dynamics of Chua's circuit // J.Circuits, Systems and Computers. 1992. Vol. 3, № 2. P. 201.
59. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N., Janson N.B.* Global reconstruction in the presence of apriory information//Chaos, Solitons&Fractals. 1998. Vol. 8, № 8. P. 1267.
60. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Исакевич В.В., Крацов Ю.А.* Выявление нестационарностей из случайно-подобных сигналов динамической природы // РЭ. 1995. Т. 40, № 2. С. 255.
61. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кузнецов Ю.И.* Восстановление внешнего воздействия по реализации одной переменной автостохастической системы // Вестник МГУ. Сер. Физ. Астрон. 1995. Т. 36, № 1. С. 76.
62. *Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Д.А.* Реконструкция уравнений неавтономного нелинейного осциллятора по временному ряду: модели, эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7, № 1. С. 49.
63. *Stark J., Broomhead D.S., Davies M.E., Huke J.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods&Applications. 1997. Vol. 30, № 8. P. 5303 (Proc. 2nd Congress of Nonlinear Analysis).
64. *Teodorescu D.* Time series decomposition and forecasting // Int.J.Control. 1989.Vol. 50, № 5. P. 1577.
65. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
66. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Крацов Ю.А.* Минимальная процедура идентификации хаотических систем по наблюдаемой временной последовательности // РЭ. 1997. Т. 42, № 3. С. 1.
67. *Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 8. С. 1.
68. *Arbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B.* Predicting in chaotic nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. P. 1782.
69. *Smith L.A.* Identification and prediction of low-dimensional dynamics // Physica D. 1992. Vol. 58, № 1. P. 50.
70. *Kadtke J., Kremliovsky M.* Signal classification using global dynamical models // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. Mystic, CT, USA. July 1995/Ed. R.A.Katz. AIP Conf. Proc. N.Y.: AIP Press, 1996. Vol. 375. P. 189.
71. *Brush J.S.* Classifying transient signals with nonlinear dynamic filter banks // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing. Mystic, CT, USA, July 1995 // Ed. R.A.Katz. AIP Conf. Proc. N.Y.: AIP Press, 1996. Vol. 375. P. 189.
72. *Крацов Ю.А.* Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН. 1989. Т. 158, № 1. С.93.

73. *Кравцов Ю.А.* Фундаментальные и практические пределы предсказуемости // *Пределы предсказуемости/ Под ред. Ю.А.Кравцова. М.: Центрком, 1997. С. 170.*

74. *Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А.* Пределы предсказуемости для линейных авторегрессионных моделей // *РЭ. 1995. Т. 40, № 12. С. 1866.*

75. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Gribkov D.A., Gribkova V.V., Kravtsov Yu.A., Kuznetsov Yu.I., Rzhanov A.G.* Discriminant analysis as applied to revealing of non-stationarity in chaotic systems // *Dynamical Systems and Chaos (Proc.Internat.Conf., Tokyo, May 23–27, 1994). Singapore: World Scientific, 1995. Vol. 2. P. 370.*

76. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya.* A discriminant procedure for the solution of inverse problem for nonstationary systems // *Predictability of Complex Dynamical Systems/ Eds Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1996. P. 67.*

77. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A.* Nonlinear chaotic systems identification from observed time series // *Math.Models and Methods in Appl.Sciences. 1997. Vol. 7, № 1. P. 49.*

78. *Anishchenko V.S., Pavlov A.N.* Global reconstruction in application to multi-channel communication // *Phys.Rev E. 1998. Vol. 57, № 2. P. 2455.*

79. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kadtke J.B., Kravtsov Yu.A., Protopopescu V.V.* Low dimensional model of heart rhythm dynamics as a tool for diagnosing the anaerobic threshold // *Int. Conf. on Applied Nonlinear Dynamics near the Millenium (ANDM'97), San Diego, CA, USA (July 7–11, 1997).*

80. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1999. 368 с.

*Владимировский областной кардиоцентр
Владимировский государственный
университет*

*Институт космических исследований РАН
Center Badan' Kozmicznych Polskiej Akad. Nauk*

*Поступила в редакцию 21.12.98
после переработки 30.11.99*

RECONSTRUCTION OF DYNAMICAL SYSTEMS FROM CHAOTIC TIME SERIES: SHORT REVIEW

O.L. Anosov, O.Ya. Butkovskii, Yu.A. Kravtsov

The brief survey of problems accompanying the reconstruction of dynamical equations from chaotic time series is presented. The most frequently used procedures of reconstruction are described, including estimate for the dimension of a system, choice of the equation type, determination of parameters of nonlinear functions by means of differential equation fitting to time series, deleting of unreliable coefficients, testing of global stability of the reconstructed system. Several examples of reconstruction are presented.

New effective criterium for distinguishing dynamical and random processes is suggested, based on the notion of degree of predictability. Principal limitations are pointed out imposed by the properties of instability in presence of noise on time-interval of predictable behaviour («horizon of predictability»), on the length of a sample, on amount of coefficient to be determined. So named «discriminant» (two window) approach is outlined, which allows to reveal nonstationarity in dynamical system, and important role of low dimensional models for retrieval of nonstationarities in systems of higher dimension is discussed. In conclusion prospective areas of applicability of reconstruction procedures are pointed out.



Аносов Олег Львович – родился в Вязниках Владимирской области (1957). Окончил Владимирский политехнический институт (1980). После окончания ВПИ работал на Баксанской нейтринной обсерватории Института ядерных исследований РАН (RAGE-experiment). С 1993 года работает во Владимирском областном кардиоцентре. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Московском педагогическом государственном университете (1995) по радиофизике. Сфера интересов – обратные задачи нелинейной динамики, нелинейные явления в медико-биологических системах. Автор и соавтор более 30 научных работ. Стипендиат фонда Александра Гумбольдта (1997–1999).



Бутковский Олег Ярославович – родился в Магнитогорске (1949). Окончил Магнитогорский педагогический институт (1973). После окончания работал в лаборатории физико-химических исследований МПИ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Московском педагогическом государственном университете по радиофизике в области теории колебаний и волн (1987). С 1987 года работает во Владимирском государственном университете. Область научных интересов – нелинейная динамика, нелинейная акустика, моделирование нелинейных явлений в медико-биологических системах. Опубликовал более 40 научных статей. E-mail: oleg@vpti.vladimir.ru



Кравцов Юрий Александрович – родился в Москве (1937). Окончил Московский энергетический институт (1960). После окончания института работал в РТИ АН СССР (до 1972), в Московском государственном педагогическом институте (до 1979), в Институте общей физики АН (до 1993). В настоящее время заведует отделом Института космических исследований РАН и является консультантом Центра космических исследований Польской Академии Наук. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГПИ (1963) и доктора физико-математических наук в области асимптотических методов волновой теории (1968). Автор и соавтор монографий «Введение в статистическую радиофизику», «Параметрические генераторы и делители частоты», «Геометрическая оптика неоднородных сред», «Caustics, catastrophes and wave fields», «Пределы предсказуемости», «Predictability of complex dynamical systems». Опубликовал свыше 300 научных статей в области волновой теории, статистической радиофизики и нелинейной динамики. Лауреат Государственной премии СССР. Член редколлегии журналов «Известия вузов. Радиофизика», «Акустический журнал», «Космическая радиофизика». E-mail: kravtsov@asp.iki.rssi.ru

Статья О.Л. Аносова, О.Я. Бутковского, Ю.А. Кравцова «Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам» содержит ряд спорных положений, которые, в силу отсутствия строгих теоретических результатов, требуют, по мнению редакции, наших комментариев. В связи с этим мы публикуем мнение экспертов по одному из конкретных спорных положений работы, которое, как нам представляется, будет интересно специалистам, читателям нашего журнала.

Редакционная коллегия

Комментарий редакционной коллегии
к статье О.Л. Аносова, О.Я. Бутковского, Ю.А. Кравцова
«Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам»

В разделе 4 (абзац 4) данной работы утверждается, что интервал дискретизации экспериментальных данных Δ обычно выбирается исходя из соотношения

$$\Delta = (0.2 \div 0.3) \tau_{\text{корр}}, \quad (1^*)$$

где $\tau_{\text{корр}}$ – время корреляции сигнала. На базе этого соотношения устанавливается связь между оптимальной длиной выборки $n_{\text{опт}}$ и временем корреляции. Нам трудно согласиться с формулой (1*), поскольку известно, что при дискретизации экспериментальных реализаций экспериментаторы традиционно основываются на теореме Котельникова (Найквиста) [1,2], следствие из которой состоит в том, что шаг дискретизации должен быть не больше единицы, деленной на удвоенную максимальную значащую частоту в спектре. Несмотря на то, что свойства спектра мощности процесса и свойства его автокорреляционной функции связаны через теорему Винера – Хинчина, вопрос о соотношении частоты выборки и времени корреляции не имеет однозначного ответа. Рассмотрим два примера. На рис. 1

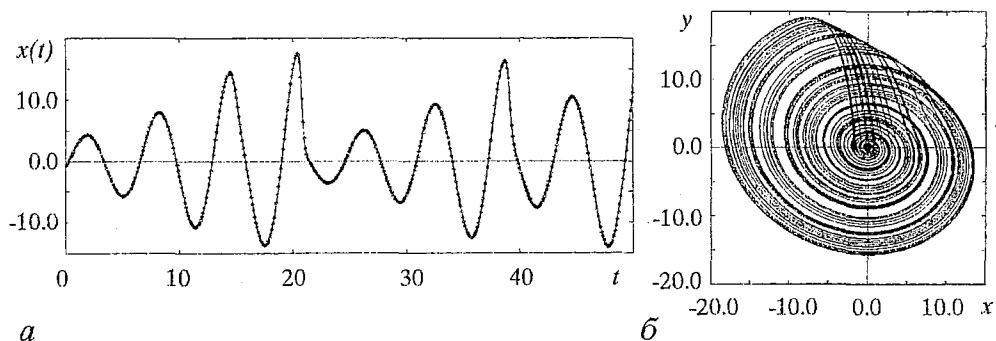


Рис. 1. Отрезок реализации $x(t)$ (а) и фазовый портрет (б) системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$. Точки соответствуют моментам выборки координаты $x(t)$ с шагом, определяемым теоремой Котельникова (Найквиста)

показаны реализация координаты $x(t)$ и проекция фазового портрета системы Рёсслера, которая была использована авторами обзора для иллюстрации работы алгоритма реконструкции, при значениях управляющих параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$. На рис. 2 показан спектр мощности, рассчитанный по реализации $x(t)$. Из него видно, что максимальной значащей частотой спектра можно считать $f_N=5$. По теореме Котельникова (Найквиста) максимально допустимый шаг выборки равен $\Delta=0.1$. На рис. 1, а точки соответствуют моментам выборки координаты $x(t)$ с шагом, определяемым теоремой.

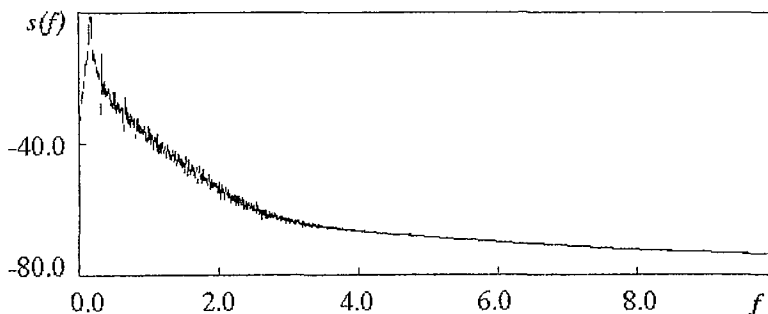


Рис. 2. Спектр мощности, рассчитанный по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$

На рис. 3 показан модуль автокорреляционной функции (АКФ), рассчитанной по той же реализации. Время корреляции можно определять разными способами, например, как время спадания огибающей АКФ в 2 раза, в $e \approx 2.718$ раз, в 10 раз; наконец, как

$$\tau_{\text{корр}} = 1/2 \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau, \quad (2^*)$$

где $\rho(\tau)$ есть огибающая АКФ, нормированной на дисперсию [3]. Воспользуемся наиболее распространенным, на наш взгляд, определением, согласно которому время корреляции – это время, за которое огибающая АКФ спадает в e раз. На рис. 3 прямая линия соответствует значению $1/e$. Таким образом, время корреляции

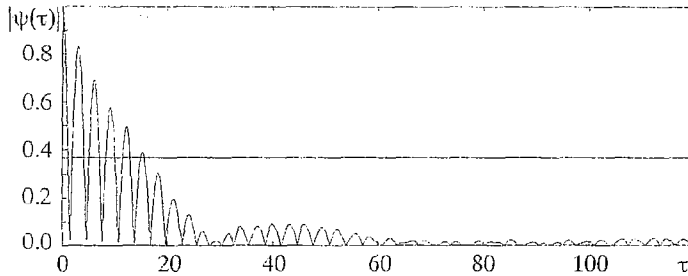


Рис. 3. Модуль автокорреляционной функции $\psi(\tau)$, рассчитанной по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$

можно считать приблизительно равным 16. Используем соотношение (1*) для определения шага дискретизации: $\Delta = 0.2\tau_{\text{корр}} = 0.2 \cdot 16 = 3.2$. На рис. 4, а показана прежняя реализация $x(t)$, на которую наложены точки, соответствующие шагу дискретизации 3.2. На рис. 4, б показан фазовый портрет, восстановленный методом задержки по данной реализации при значении задержки, совпадающем со значением шага выборки. Очевидно, что структура фазового портрета оказалась неразрешенной. Таким образом, этот шаг нельзя считать достаточным для анализа данного сигнала. Кроме того, возникает вопрос, как можно такие данные дифференцировать.

Приведем также модуль АКФ, рассчитанной по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров, используемых авторами работы (рис. 5). Заметим, что огибающая данной АКФ не спадает даже в два раза на приведенном участке времени наблюдения, а это означает, что время корреляции заведомо превышает 120, независимо от используемого определения. Очевидно, что выбор шага дискретизации в соответствии с (1*) в данном случае привел бы к абсурдному результату.

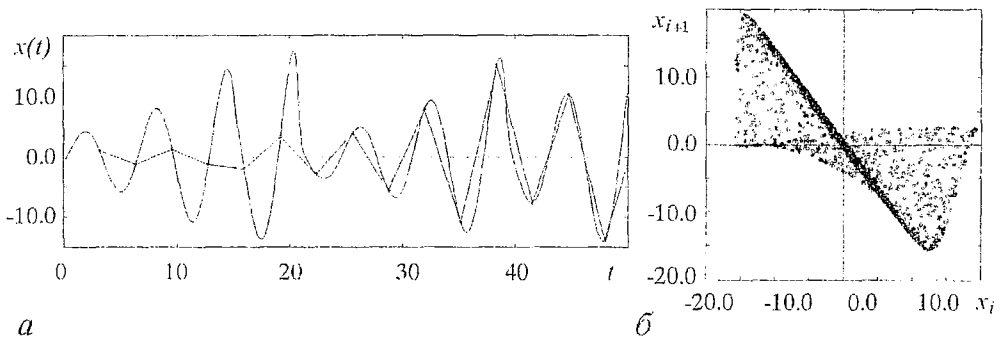


Рис. 4. а – отрезок реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.2$, $b=0.2$, $c=10$. Точки соответствуют моментам выборки координаты $x(t)$ с шагом, определяемым соотношением (1*); б – фазовый портрет, восстановленный методом задержки по реализации, показанной на рис. 4, а. Значение задержки $\Delta' = \Delta$. Точки фазового портрета не соединены линиями, так как каждые две последующие точки лежат в противоположных концах полученного множества

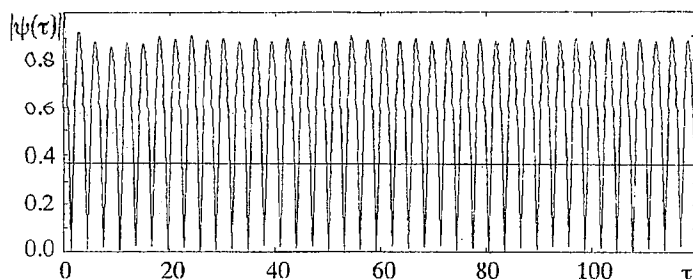


Рис. 5. Модуль автокорреляционной функции, рассчитанной по реализации $x(t)$ системы Рёсслера при значениях параметров $a=0.15$, $b=0.2$, $c=10$ (параметры, выбранные в обзоре)

Таким образом, мы считаем, что формула, следующая сразу за (19) в разделе 4, как следствие соотношения (1*), не является обоснованной.

1. Применение цифровой обработки сигналов / Под. ред. Э. Опенгейма. М.: Мир, 1980. 552 с.

2. Отнес Р., Энноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. М.: Мир, 1983.

3. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с. (с.76).