



## **«АТЛАС» КАРТ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ЭТАЛОННЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Н.С. Богданов, А.П. Кузнецов*

Одним из наиболее эффективных компьютерных методов исследования нелинейных систем является построение карт динамических режимов, на которых оттенками серого цвета обозначены различные режимы. В работе представлена коллекция карт для ряда отображений и дифференциальных систем с небольшими комментариями, которая может быть полезна при разработке компьютерных практикумов, лекционных курсов и в научной работе молодых исследователей в области нелинейной динамики.

В предлагаемой методической заметке мы представим несколько характерных карт популярных систем нелинейной динамики и радиофизики. Построение таких карт является очень удобным и весьма информативным методом. В его рамках на плоскости параметров определенным цветом или оттенками серого обозначают циклы различных периодов и области хаоса. Метод не требует больших затрат по времени. С другой стороны, исследователь оперативно получает глобальную картину бифуркаций и локализации областей периодических, квазипериодических и нерегулярных режимов. Любой фрагмент карты может быть увеличен, так что можно быстро просмотреть интересные фрагменты. Это очень важно при двухпараметрическом анализе, поскольку на плоскости параметров могут наблюдаться характеризующиеся тонкой и сложной организацией области накопления бифуркаций, так называемые критические линии и точки [1–4]. Традиционный бифуркационный анализ в подобных случаях не всегда выходит на первый план, поскольку вскрыть эту тонкую структуру с его помощью весьма непросто. То же самое можно сказать и о тонких деталях внутреннего устройства языков синхронизации.

Недостаток метода построения карт динамических режимов состоит в том, что мы «видим» только одну «сторону» сложной многолистной поверхности – плоскости параметров исследуемой системы. Используя различные способы сканирования плоскости параметров, однако, можно просмотреть и другие листы карты.

Конечно, в небольшом сообщении мы имели возможность представить лишь небольшую часть всех интересных и важных систем. Однако сам их отбор с позиций реализации характерных и типичных феноменов нелинейной динамики оказался методически интересной работой, результаты которой можно использовать при постановке компьютерных практикумов по нелинейной

динамике и в научной работе молодых исследователей. По этой причине мы включаем в представленный «список» основные классы динамических систем: одномерные отображения, двумерные отображения, потоки. Формальные модели мы дополняем и конкретными системами, причем предпочтение отдано радиофизическим системам. Для удобства читателя, который захочет воспользоваться нашей подборкой (или отдельными результатами) в учебных целях, мы даем небольшие комментарии по поводу каждой системы.

**Кубическое отображение.** Если в соотношении  $X_{n+1}=f(X_n)$ , задающем произвольное одномерное отображение, разложить в ряд Тейлора функцию  $f(X_n)$  и ограничиться квадратичными членами, то после замен переменных и параметров получается знаменитое логистическое отображение  $X_{n+1}=1-\lambda X_n^2$ . Как известно, оно является эталонной моделью нелинейной динамики, описывающей удвоения периода и возникающие на их основе хаос и сложные режимы. Если же теперь сохранить еще один член ряда, то после замен переменных и параметров мы приходим к кубическому отображению

$$X_{n+1} = 1 - aX_n + bX_n^3. \tag{1}$$

Это рассуждение говорит о фундаментальной роли кубического отображения по сравнению с логистическим; в отличие от последнего здесь два управляющих параметра, поэтому возможны бифуркации и их композиции, имеющие коразмерность два. Так, на полученной с помощью компьютера карте динамических режимов кубического отображения (рис. 1) область устойчивости 2-цикла имеет характерный вид с уходящими вверх пересекающимися «отростками». Такая конфигурация характерна для двухпараметрических систем; Мира с соавторами назвали ее *crossroad area* [1,2]. Она включает ряд бифуркационных линий разных типов и точку сборки; подробнее о бифуркационном портрете см. [1,2]. Карта насыщена подобными объектами на базе циклов всевозможных периодов, расположенными не только в области регулярной динамики, но и в области хаоса. Отметим, что исследование двухпараметрических бимодальных (то есть с двумя экстремумами) отображений позволило Мак-Кею и Ван-Зейтцу установить существенные свойства границы хаоса на плоскости параметров, используя изящную процедуру построения дерева сверхустойчивых орбит [3,4].

Возможен и **другой вариант кубического отображения**, отличающийся перед кубическим членом. Это отображение может иметь положительную производную Шварца, играющую важную роль в теории одномерных отображений [5]. В этом случае реализуется вторая характерная двухпараметрическая композиция бифуркаций, известная как *spring area*; соответствующую карту и обсуждение ее устройства можно найти в [6].

**Квартичное отображение.**

Если продолжить процедуру наращивания разложения Тейлора в соотношении  $X_{n+1}=f(X_n)$ , то следующим объектом становится трехпараметрическое отображение вида

$$X_{n+1} = 1 - cX_n - aX_n^2 + bX_n^4, \tag{2}$$

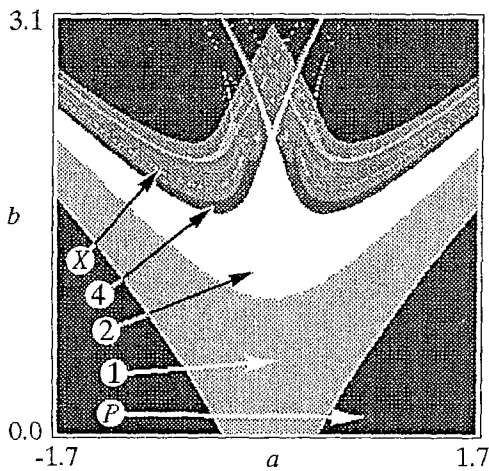


Рис. 1. Карта динамических режимов кубического отображения. Оттенками серого обозначены циклы, период которых указан цифрами. Черный цвет отвечает убеганию траекторий на бесконечность (P). Область хаоса (X) также показана оттенком серого. Точка сборки 2-цикла имеет координаты  $a=0, b=2$

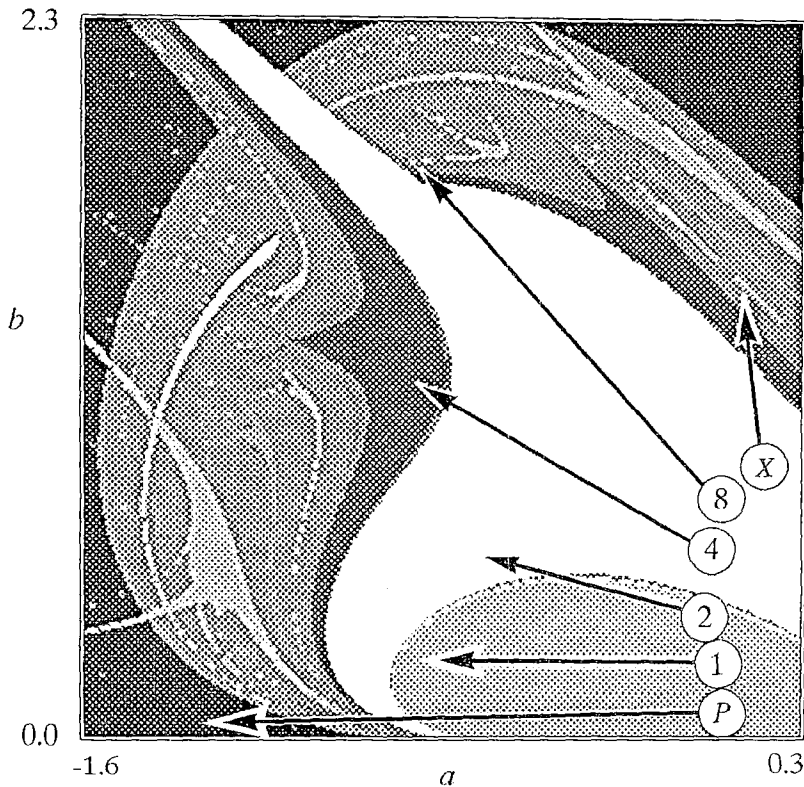


Рис. 2. Карта динамических режимов кватричного отображения

которое можно привлечь для исследования бифуркаций [7] и сценариев перехода к хаосу [8,9] коразмерности три.

В «симметричном» случае ( $c=0$ ) отображение (2) известно как «кватричное». В нелинейной динамике его роль состояла в том, что именно при его исследовании Чанг, Вортис и Райт обнаружили, что фейгенбаумовские линии перехода к хаосу на плоскости параметров могут обрываться в некоторых изолированных точках, названных ими трикритическими [10]. Одна из трикритических точек имеет координаты  $a=-0.9704$ ,  $b=1.3767$  и расположена в центре рис. 2. В ее окрестности структура плоскости параметров имеет очень тонкую самоподобную организацию, которую можно изучать, выделяя все более мелкие фрагменты. Подробности можно найти в [2,10].

**Отображение Эно (Хенон).** Это отображение было предложено французским астрофизиком Мишелем Эно (в другой транскрипции – Хенон) в 1976 году. После знакомства с работой Лоренца он решил придумать простой пример системы, демонстрирующей фрактальную структуру аттрактора, поскольку система Лоренца в этом смысле не наглядна из-за очень сильного сжатия фазового пространства. Опираясь на идеи Пуанкаре (сечение Пуанкаре) и Смейла (подкова Смейла), Эно сконструировал простое отображение, демонстрирующее сжимаемость и складывание

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - aX_n^2 - bY_n, \\ Y_{n+1} &= X_n. \end{aligned} \quad (3)$$

В своей работе Эно указывает, что его отображение может быть получено путем замен переменных и параметров из двумерного квадратичного отображения общего вида при условии постоянства якобиана [11]. Отображение Эно стало

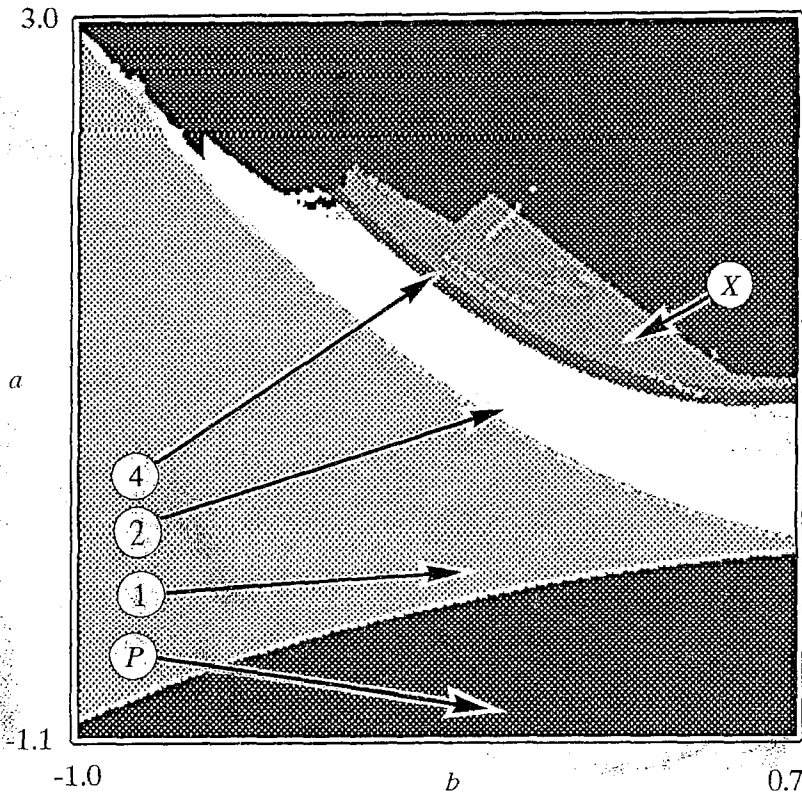


Рис. 3. Карта динамических режимов отображения Эно

канонической моделью нелинейной динамики – все монографии по хаосу уделяют ему определенное внимание. Его можно рассматривать как пример двумерного обратимого отображения, демонстрирующего удвоения периода. В области хаоса на его карте имеются также характерные конфигурации crossroad area (рис. 3.). Наибольший размер имеет такая структура, относящаяся к циклу периода 7. Отображение Эно диссипативно при  $|b| < 1$  и консервативно при  $|b| = 1$ . Поэтому оно популярно и в теории консервативного хаоса, в частности, демонстрирует консервативный вариант удвоений периода [5,12], а также является интересным объектом для изучения превращения диссипативных систем в консервативные. Отображение Эно можно мыслить как двумерное обобщение логистического отображения. Поэтому можно построить семейство отображений типа Эно с использованием кубического отображения, кватерничного и т.д. [13,14]. В рамках такого подхода можно исследовать проблему «выживания» различных феноменов нелинейной динамики (бифуркации, сценарии перехода к хаосу) при переходе от одномерных необратимых к двумерным обратимым отображениям [9,13].

**Универсальное двумерное отображение.** Отображение Эно имеет постоянный якобиан и, как следствие, не демонстрирует целый ряд важных бифуркаций. Этого недостатка лишено представленное здесь оригинальное двумерное отображение.

$$X_{n+1} = SX_n - Y_n - (Y_n^2 + X_n^2), \quad Y_{n+1} = JX_n - 1/5(Y_n^2 + X_n^2). \quad (4)$$

Мотивация его построения состоит в следующем: Томсон и Стюарт в своей монографии [15] обратили внимание на то, что линейную устойчивость двумерных отображений удобно исследовать на плоскости: след  $S$  – якобиан  $J$  его линеаризованной матрицы. Ими были указано, что область устойчивости на плоскости  $(S, J)$  образует характерный треугольник и изучены все возможные «сценарии» линейной потери устойчивости вблизи его сторон и вершин. Предлагаемое отображение содержит линейную часть

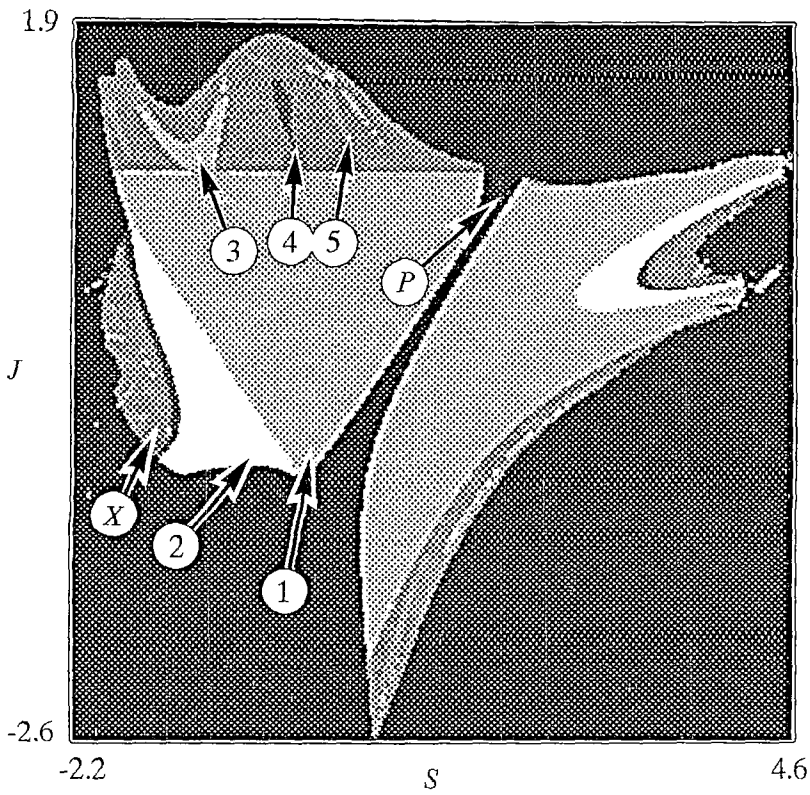


Рис. 4. Карта динамических режимов универсального модельного отображения

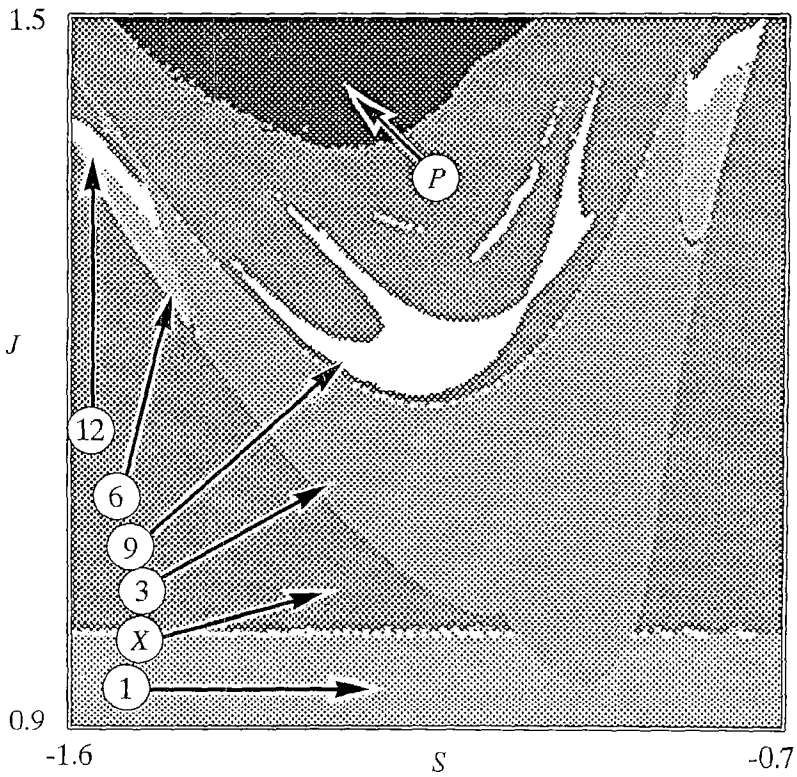


Рис. 5. Увеличенный фрагмент карты динамических режимов универсального модельного отображения

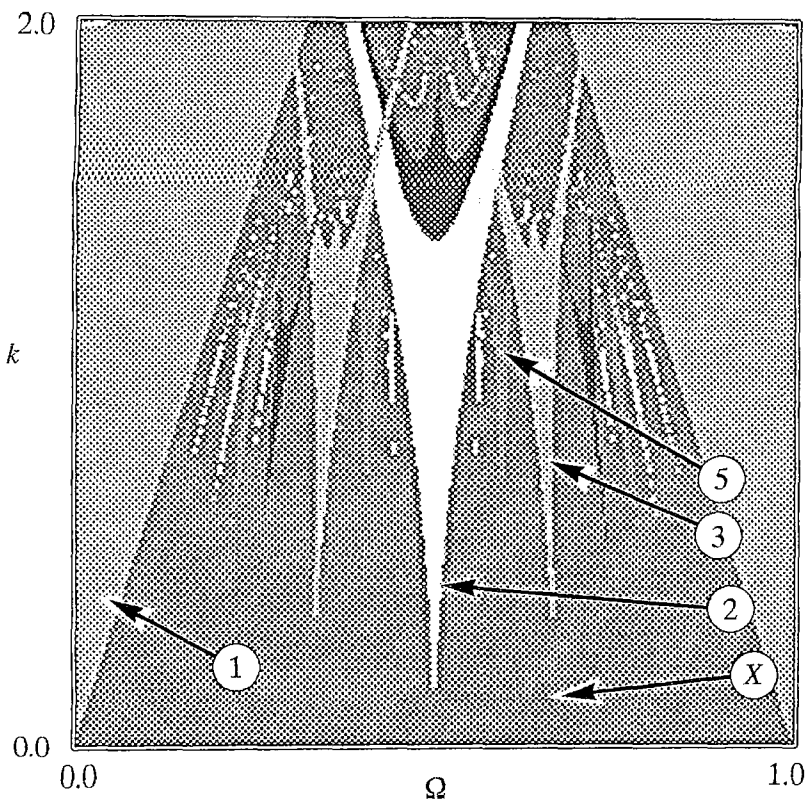


Рис. 6. Карта динамических режимов отображения окружности

$$X_{n+1} = SX_n - Y_n, \quad Y_{n+1} = JX_n, \quad (5)$$

которая сконструирована так, что два параметра  $S$  и  $J$  являются следом и якобианом отображения, а также квадратичную нелинейную добавку. На карте (рис. 4.) можно видеть область «треугольника устойчивости» Томпсона и Стюарта. Переход через его левую сторону связан с бифуркацией удвоения (мультипликатор  $-1$ ), через правую — с касательной бифуркацией (мультипликатор  $+1$ ), а через верхнюю — с бифуркацией Неймарка рождения инвариантной кривой или, по другой терминологии, бифуркацией рождения тора (модуль мультипликаторов  $1$ ). Видна характерная структура языков синхронизации, примыкающая к верхней границе треугольника. Вершины треугольника отвечают точкам, в которых пара мультипликаторов обращается, соответственно, в  $(-1, +1)$ ,  $(-1, -1)$  и  $(+1, +1)$ . Таким образом, предлагаемое отображение демонстрирует основные бифуркации, не имеющие аналога в одномерном случае, и является в этом смысле универсальным. На рис. 5. показан в увеличенном виде язык синхронизации с числом вращения  $1/3$ , отвечающий «сильному» резонансу по терминологии Арнольда. Можно видеть, что он характеризуется нестандартным внутренним устройством (сравните с рис. 6).

#### Отображение окружности. Отображение окружности

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Omega - k \sin(2\pi\Theta_n)/(2\pi), \quad (\Theta_n, \text{mod } 1) \quad (6)$$

было изучено выдающимся российским математиком В.И.Арнольдом еще в его дипломной работе. Эта работа не была своевременно опубликована, и затем ряд результатов был переосмыслен Леоном Глассом [16] и другими исследователями. Сейчас это каноническая модель нелинейной динамики, вошедшая во все монографии. На карте (см. рис. 6.) можно видеть характерную для отображения окружности структуру языков синхронизации. Известно, что линия  $k=1$  играет

особую роль. Как показали Иенсен, Бак, Бор [17], на этой линии чертова лестница чисел вращения полна или, иными словами, языки синхронизации смыкаются своими краями. Поэтому отображение окружности – один из основных объектов исследования феноменов, связанных с исчезновением квазипериодических режимов на пороге хаоса. Отметим, что внутри языков синхронизации (см. рис. 6.) наблюдаются все характерные для двухпараметрических мультимодальных отображений явления – ситуации crossroad area, трикритические точки и др. – на что указали, в частности, Шелл, Фразер и Капрал [18]. Отображение окружности служит также базовым объектом для изучения ситуации воздействия шума и сигнала с несоизмеримой частотой на системы с квазипериодическими режимами [19].

**Отображение кольца.** Особенность отображения окружности – его одномерность. Поэтому оно не демонстрирует как таковую инвариантную кривую, а описывает лишь динамику угловой координаты вдоль нее. Отображение кольца

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Omega - k \sin(2\pi\Theta_n) / (2\pi) + b r_n, \quad r_{n+1} = b r_n - k \sin(2\pi\Theta_n) / (2\pi), \quad (\Theta_n, \text{mod } 1) \quad (7)$$

можно рассматривать как двумерное обобщение отображения окружности. (Отметим, что к отображению кольца с помощью замен переменных приводится и известное отображение Заславского, которое в консервативном случае ( $b=1$ ) служит популярной моделью теории стохастических явлений [20].) В определенной мере отображения окружности и кольца находятся в таком же методологическом соотношении, как логистическое отображение и отображение Эно. Для отображения кольца уже можно в полной мере говорить о сценарии разрушения инвариантной кривой – второго, после последовательности бифуркаций удвоения периода, базового сценария возникновения хаоса в нелинейных системах. Форма языков синхронизации искажается по мере роста параметра  $b$  (рис. 7) по сравнению со стандартной. Внутреннее устройство языков, однако, испытывает

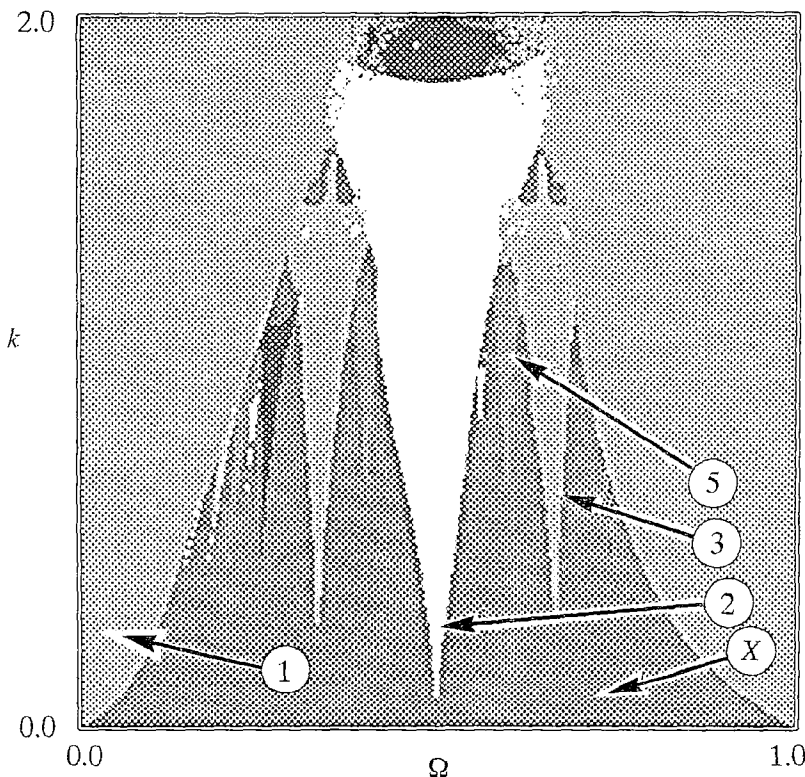


Рис. 7. Карта динамических режимов отображения кольца при значении параметра  $b=0.8$

модификацию лишь на ГЛУБОКИХ уровнях структуры, а «на глаз» не меняется, в отличие от РАССМОТРЕННОГО выше универсального отображения. В нелинейной динамике исследованы и исследуются различные ситуации, связанные с отображением кольца, например, рождение странного аттрактора под квазипериодическим воздействием [21], разрушение консервативных торов в соответствии с теорией Колмогорова – Арнольда – Мозера и др.

**Система Ресслера.** В 1976–1980 годах Ресслер с различными соавторами предложил множество систем с хаотической динамикой [22]. Большинство из них наследуют форму уравнений химической кинетики. Они сконструированы по аналогии с законом действующих масс, согласно которому скорость химической реакции пропорциональна степени концентрации, равной коэффициенту, с которым это вещество входит в химическую формулу. В нелинейной динамике «сохранился» один вариант системы Ресслера [23]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -Y - Z, \\ \dot{Y} &= X + aY, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{Z} = b + Z(X - c),$$

который стал весьма популярным. Система Ресслера содержит три существенных параметра. На рис. 8 представлена карта на плоскости  $(b, c)$  при значении параметра  $a=0.223$ . Эта система является дифференциальной, поэтому для построения карты было предварительно получено сечение Пуанкаре с помощью метода Эно [24]. Отличительная черта системы Ресслера – сильное сжатие фазового объема, так что в сечениях Пуанкаре оно очень хорошо описывается

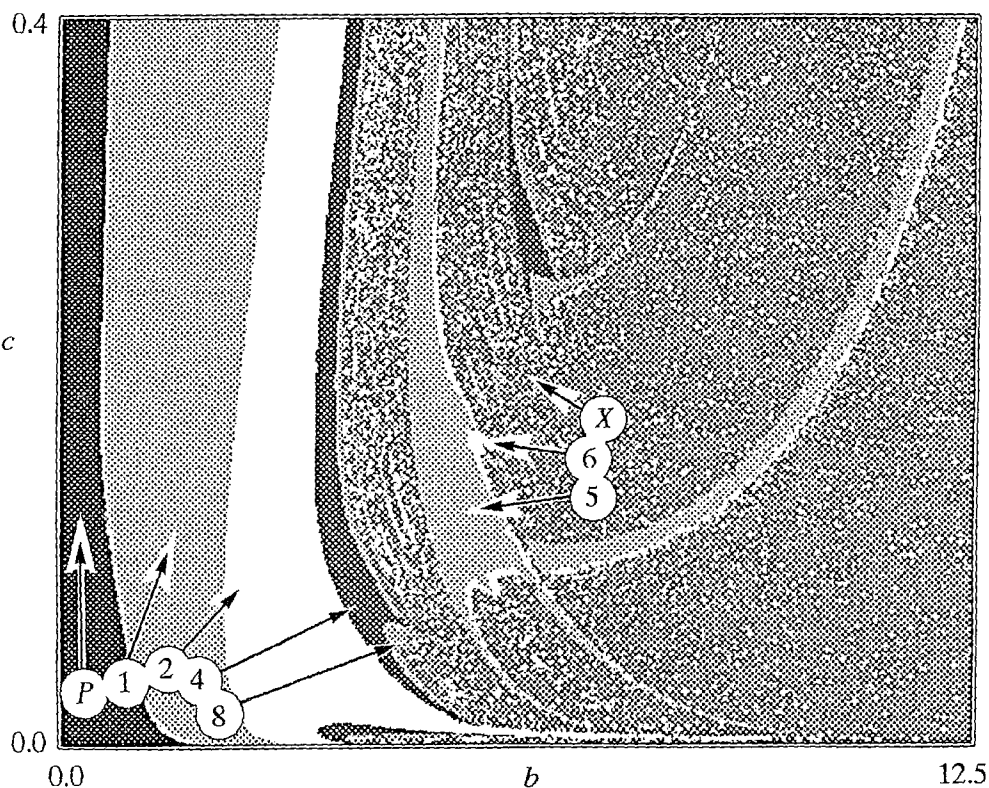


Рис. 8. Сечение пространства параметров системы Ресслера при значении параметра  $a=0.223$



одномерным отображением. Благодаря своим свойствам, система Ресслера используется как эталонный объект при апробации множества новых идей и технологий в нелинейной динамике. Так изучались и изучаются связанные системы Ресслера [25], странные нехаотические аттракторы в неавтономной системе, проблема аппроксимации аттракторов циклами и т.д.

**Генератор с инерционной нелинейностью.** Генератор с инерционной нелинейностью предложен В.С. Анищенко и В.В. Астаховым и представляет в определенной мере модификацию классического варианта генератора Теодорчика. Отличие состоит во введении специальной цепи обратной связи с усилителем и инерционным элементом [24]. В результате получается система, описываемая

тремя дифференциальными уравнениями и демонстрирующая множество интересных феноменов нелинейной динамики [24].

$$\dot{X} = MX + Y - XZ,$$

$$\dot{Y} = -X,$$

$$\dot{Z} = g(-Z + \Phi(X)),$$

$$\text{где } \Phi(x) = \begin{cases} 0, & X \leq 0, \\ X, & X > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Генератор с инерционной нелинейностью допускает не только теоретическое, но и детальное экспериментальное исследование. Система характеризуется двумя параметрами, так что карта динамических режимов (рис. 9) дает достаточно полную информацию о динамике автономного генератора. Эта система послужила «базой» для целого ряда интересных обобщений и радиофизических экспериментов.

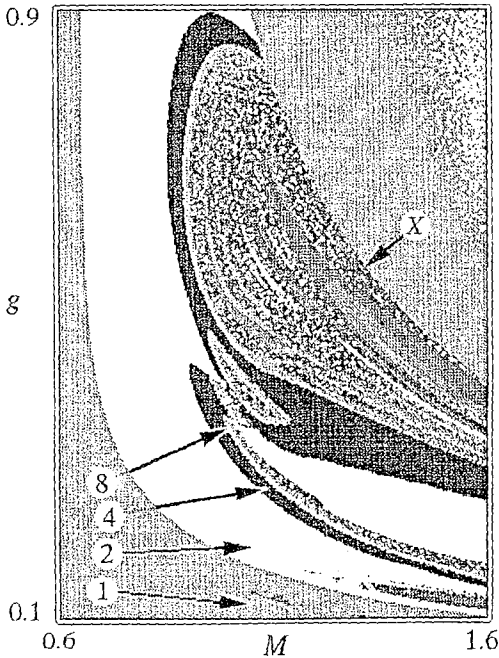


Рис. 9. Карта динамических режимов генератора с инерционной нелинейностью

**Генератор Кислова – Дмитриева.** Эта система представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелинейного усилителя, RLC-фильтра и инерционного звена первого порядка. При определенных предположениях о свойствах усилителя она описывается в безразмерном виде системой трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{X} = (F(Z) - X)/T,$$

$$\dot{Y} = X - Z, \quad (10)$$

$$\dot{Z} = Y - Z/Q,$$

где  $F(Z) = MZ \exp(-Z^2)$ . Такой генератор также допускает теоретическое и экспериментальное исследование. Его динамические свойства (и свойства систем, представляющих его развитие) описаны в монографии [26]. Мы представляем здесь карту динамических режимов генератора на плоскости безразмерных параметров: время задержки  $T$  – коэффициент усиления  $M$  (рис. 10), полученную с использованием сечений Пуанкаре и метода Эно. Добротность контура  $Q=10$ . На карте можно видеть удвоения периода и множество областей хаотической и регулярной динамики.

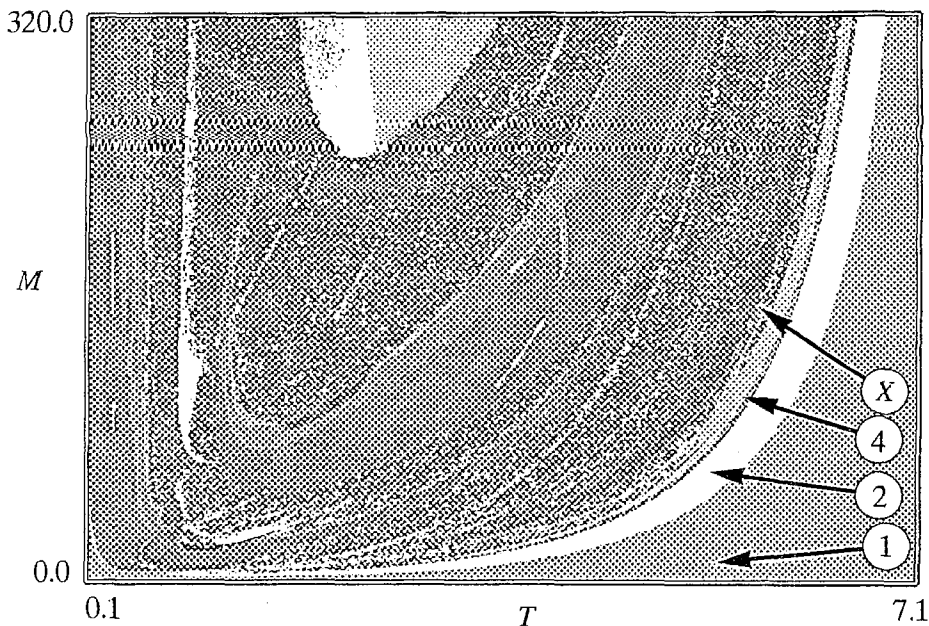


Рис. 10. Карта динамических режимов генератора Кислова – Дмитриева при значении параметра  $Q=10$

Авторы выражают благодарность С.П. Кузнецову и И.Р. Сатаеву за полезное обсуждение.

Работа поддержана грантами РФФИ № 97-02-16414 и Министерства общего и профессионального образования РФ № 97-0-8.3-88.

### Библиографический список

1. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* Crossroad area – spring area transition (1) Parameter plane representation // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1991. Vol. 1. P. 183.
2. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 2. Двухпараметрический переход к хаосу // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. № 3–4. С. 17.
3. *MacKay R.S., Van Zeijts J.B.* Period doubling for bimodal maps: A horseshoe for a renormalization operator // *Nonlinearity.* 1988. Vol. 1. P. 253.
4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Коразмерность и типичность в контексте проблемы описания перехода к хаосу // *Регулярная и хаотическая динамика.* 1997. Т. 2, № 3/4. С. 90.
5. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
6. *Кузнецов А.П.* Через экран компьютера – в мир нелинейной динамики // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1998. Т. 6, № 5. С. 89.
7. *Mira C., Carcasses J.* On the crossroad area – saddle area and spring area transition // *Int. J. Bifurc. Chaos.* 1991. Vol. 1, № 3. P. 641.
8. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Three-parameter scaling for one-dimensional maps // *Phys.Lett.* 1994. A 189. P. 367.
9. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos // *Physica D.* 1997. Vol. D 109. P. 91.
10. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // *Phys. Rev.* 1981. Vol. A24, № 5. P. 2669.

11. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
12. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
13. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R. From bimodal one-dimensional maps to Henon-like two-dimensional maps: does quantitative universality survive? // Phys.Lett. 1994. Vol. A164. P.413.
14. Holmes P.J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Philos. Trans. R. Soc. London. 1979. Vol. A292. P. 419.
15. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley and Sons, 1986. 376 p.
16. Glass L., Peres R. Fine structure of phase locking // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1772.
17. Jensen M.H., Bak P., Bohr T. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. I. Circle maps // Physical Review A. 1984. Vol. 30, № 4. P 1960.
18. Schell M., Fraser S., Kapral R. Subharmonic bifurcations in the sine map: an infinite of bifurcations // Phys. Rev. 1983. Vol. A28, № 1. P. 373.
19. Feigenbaum M.J., Hasslacher B. // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49. P. 605.
20. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
21. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В. Механизм рождения странного хаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 3. С. 34.
22. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические реакции. М.: Мир, 1986. 148 с.
23. Rösler O. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 57A. P. 397.
24. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
25. Mozekilde E. Topics in nonlinear dynamic. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1996. 380 p.
26. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
27. Hu B. A simple derivation of the stochastic eigenvalue equation in the transition from quasiperiodicity to chaos // Phys. Lett. 1983. Vol. 98A, № 10. P.79.
28. Feudel U., Grebogi G., Ott E. Phase-locking in quasiperiodically forced systems // Phys. Reports. 1997. Vol. 290. P. 11.

Саратовский государственный  
университет  
СО ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 7.09.99  
после доработки 28.12.99

## MAP «ATLAS» OF DYNAMIC MODES FOR STANDARD MODELS OF NONLINEAR DYNAMICS AND OF RADIOPHYSIC SYSTEMS

*Bogdanov N.S., Kuznetsov A.P.*

One of the most effective computer methods of two-parametrical research of nonlinear systems is the construction of maps of dynamic modes. On maps the certain colours designate cycles of the various periods and areas of chaotic dynamics. The variety of nonlinear model and radiophysical systems has required to create some kind of «atlas» of maps for most known of them. Most of basic classes of dynamic systems are submitted: one-dimensional irreversible maps, two-dimensional convertible maps, flows and nonautonomous systems.



*Богданов Николай Сергеевич* – родился в 1977 году в Саратове. В 1995 году окончил техникум им. Яблочкова по специальности радиоаппаратостроение. С 1994 года учится в СГУ в Колледже Прикладных Наук. Под руководством А.П. Кузнецова занимается исследованием нелинейных динамических систем (в основном, компьютерное моделирование). Участвовал в нескольких научных конференциях. E-mail: BogdanovNS@info.sgu.ru



*Кузнецов Александр Петрович* – родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского отделения Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета, заведующий базовой кафедрой динамических систем СГУ в СО ИРЭ РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу применительно к многопараметрическим модельным и физическим нелинейным системам. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соросовский доцент (1998), научный руководитель молодежного научного центра «Нелинейная динамика и сложные структуры» СО ИРЭ РАН и студенческой лаборатории «Теоретическая нелинейная динамика» СГУ и

СО ИРЭ РАН. Автор нескольких оригинальных учебных курсов для Высшего колледжа прикладных наук СГУ и двух популярных книг. E-mail: kuz@spkuz.saratov.su