



ВИДЫ СИММЕТРИИ ЦИКЛОВ В СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

Е.П. Селезнев, А.С. Дудова

Рассматриваются виды симметрии различных циклов в связанных системах с удвоением периода и анализируется связь между видом симметрии цикла и характером его эволюции при изменении управляющих параметров. Полная симметрия циклов ведет к появлению нового, не имеющего места в парциальной подсистеме, сценария перехода к хаосу. Показано, что при вынужденном нарушении полной симметрии для некоторых циклов имеет место локальная симметрия, которая как и полная, ведет к рождению квазипериодических движений и переходу к хаосу через их разрушение.

Пути эволюции нелинейных динамических систем при изменении управляющих параметров во многом определяются их свойствами симметрии. Так, в неавтономных нелинейных осцилляторах с асимметричным потенциалом переход к хаосу, например, при последовательном увеличении амплитуды воздействия, происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода, которому в случае симметричного потенциала предшествует бифуркация потери симметрии (бифуркация вилки) [1–4]. В данных случаях симметрия систем проявляется в инвариантности решений к замене знака динамической переменной. Более общий подход на основе теории групп позволяет выделить различные группы симметрии циклов и связать их эволюцию с типом бифуркаций [5,6]. В данной работе проводится анализ связи между свойствами симметрии циклов и бифуркационным сценарием в уже ставшей классической системе, представляющей собой две диссипативно связанные идентичные подсистемы, демонстрирующие переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода [7,8].

Экспериментально исследуется система двух резистивно связанных идентичных RL -диод цепей с синфазным возбуждением (рис. 1), численно – система диссипативно связанных [7] квадратичных отображений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = \lambda_1 - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n) = \lambda_2 - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2), \end{cases} \quad (1)$$

где x_n, y_n – динамические переменные, $n=1,2,3,\dots$ – дискретное время, λ_1 и λ_2 – параметры нелинейности, k – параметр связи. Аналогом параметров λ и k в эксперименте были амплитуда внешнего воздействия V и проводимость резистора связи $G=1/R_{св}$. Анализ режимов проводился в численном эксперименте по фазовым портретам на плоскости (x_n, y_n) , в физическом – по стробоскопическим сечениям

проекций фазовых портретов на плоскость (U_1, U_2) , где U_1 и U_2 – напряжения на диодах D_1 и D_2 (см. рис. 1). Результаты численных и экспериментальных исследований в рамках разрешимости последних качественно соответствуют друг другу, поэтому в дальнейшем они будут преподноситься как единое целое.

Система (1) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ инвариантна по отношению к замене x_n на y_n , а с изменением параметра нелинейности демонстрирует множество различных периодических, квази-периодических и хаотических режимов. В [9] дана их классификация, в основе которой используется временной сдвиг между колебаниями подсистем.

Рассмотрим влияние свойств симметрии на эволюцию циклов системы (1) на примере циклов различного периода. Начнем с циклов периода 2, которых существует два типа: синфазный и несинфазный. Для всех синфазных циклов справедливо тождество $x_n = y_n$, соответственно, эти циклы инвариантны к замене переменных x_n на y_n , а их портрет располагается на диагонали фазовой плоскости. Такая симметрия цикла ведет к тому, что эволюция всей системы в целом эквивалентна эволюции отдельной подсистемы. Рассмотрим это с помощью мультипликаторов системы (1), которые можно найти из решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} \mu^2 - S\mu + J &= 0, \\ \mu_{1,2} &= [S \pm (S^2 - 4J)^{1/2}]/2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mu_{1,2}$ – мультипликаторы, S – след, а J – детерминант матрицы линеаризации системы (1). Для циклов периода 2

$$\begin{cases} J = 16x_1x_2y_1y_2[(1-k)^2 - k^2]^2, \\ S = 4[(1-k)^2x_1x_2 + k^2x_2y_1 + k^2x_1y_2 + (1-k)^2y_1y_2], \end{cases} \quad (3)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – решения системы (1), выражения для мультипликаторов имеют громоздкий вид. Однако используя свойство симметрии $x_n = y_n$, можно значительно их упростить:

$$\begin{cases} \mu_1 = 4x_1x_2, \\ \mu_2 = 4x_1x_2(1-2k)^2. \end{cases}$$

Первый мультипликатор μ_1 равен мультипликатору цикла того же периода изолированной подсистемы и при $0 < k < 1$ с увеличением параметра λ характер бифуркаций будет определяться именно им, так как второй мультипликатор будет всегда меньше: $\mu_1 > \mu_2$. Для синфазного цикла периода N мультипликаторы равны:

$$\begin{cases} \mu_1 = (-2)^N x_1 x_2 \dots x_N, \\ \mu_2 = (-2)^N (1-2k)^N x_1 x_2 \dots x_N, \end{cases} \quad (4)$$

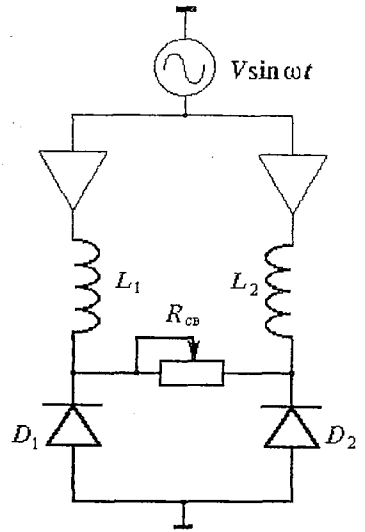


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

а система (1) при задании синфазных начальных условий с ростом параметра λ демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, подобно изолированной подсистеме. Таким образом поведение связанной системы тождественно поведению изолированной подсистемы.

Несинфазный цикл периода 2 (номер 2_1 в соответствии с системой обозначений [9]) также обладает свойствами симметрии, которые можно представить в виде системы равенств

$$\begin{cases} x_1 = y_2, \\ x_2 = y_1. \end{cases} \quad (5)$$

При этом реализации подсистем сдвинуты относительно друг друга на половину периода цикла (в данном случае на 1), а сам цикл симметричен относительно диагонали фазовой плоскости (x_n, y_n) . Подстановка (5) в (3) и (2) позволяет получить следующее выражение для мультипликаторов цикла 2_1 :

$$\mu_{1,2} = 2[2(1-k)^2 x_1 x_2 + k^2(x_1^2 + x_2^2)] \pm k(x_1 + x_2)[4(1-k)^2 x_1 x_2 + k^2(x_1 - x_2)^2]^{1/2}, \quad (6)$$

где x_1, x_2 – решения системы (1). Для цикла 2_1 (1) представляет собой систему двух уравнений четвертого порядка и в общем случае решается в радикалах, однако (5) позволяет упростить (1) и аналитически решить ее. В итоге выражения для мультипликаторов цикла 2_1 получаются достаточно громоздкими:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} = & \{2(1-k)^2[8k + 4 - 4\lambda(1-2k)^2] + k^2[6 + 8k^2 - 4\lambda(1-2k)^2] \pm \\ & \pm [(1-k)^2[8k + 4 - 4\lambda(1-2k)^2] + k^2\{(1-2k)^2 + 4 - 4\lambda(1-2k)^2\}]^{1/2}\}/(1-2k)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ (9) показывает, что существует диапазон значений параметров λ и k , при которых мультипликаторы становятся комплексно сопряженными. Полагая модуль мультипликаторов равным 1 и решая систему (7), можно получить зависимость $\lambda(k)$, а на плоскости параметров линию, соответствующую бифуркации Хопфа [10]. Таким образом условие симметрии несинфазного цикла позволяет аналитически решить систему (1) и определить бифуркационные значения управляющих параметров, при которых происходит рождение тора, а в целом комплексность мультипликаторов и рождение тора следует из условия симметрии.

Рассмотрим структуру области пространства управляющих параметров, в которой эволюционирует цикл 2_1 . В общем случае ее удобно представить в виде листов [9]. Рис. 2, а иллюстрирует бифуркационные линии цикла 2_1 (и ряда последующих режимов) полученные в результате численных исследований системы (1). Цифрами на рис. 2 отмечен период циклов, жирной линией обозначена граница области (листа) где эволюционирует цикл 2_1 , светлые области соответствуют периодическим режимам, различной штриховкой отмечены области квазипериодических и хаотических колебаний. Сопоставление результатов численного и аналитического расчетов для бифуркации Хопфа указывает на их совпадение с машинной точностью. Численные исследования показывают [9], что циклы, для которых временной сдвиг между динамическими переменными равен половине периода с изменением управляющих параметров, демонстрируют бифуркацию Андронова – Хопфа.

В области существования квазипериодических движений наблюдаются резонансные циклы на торе. Период этих циклов четный, а области их существования – клювы синхронизации – имеют подобную структуру. На рис. 2, б приведен увеличенный фрагмент рис. 2, а, иллюстрирующий структуру клюва, где эволюционирует резонансный цикл периода 22. Этот цикл является симметричным и с изменением параметров демонстрирует бифуркацию Хопфа, в результате

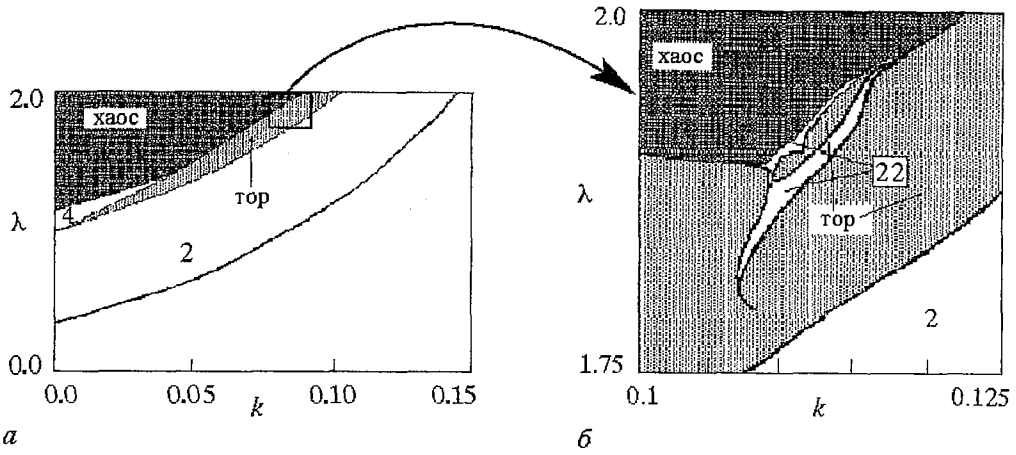


Рис. 2. *a* – область существования и эволюции цикла 2_1 ; *б* – структура выделенного фрагмента

которой происходит рождение тора из резонансного цикла. Рис. 3 иллюстрирует фазовые портреты цикла 2_1 , тора, резонансного цикла и тора, родившегося из резонансного цикла (вторичный тор). Внутри области существования вторичного тора существует множество резонансных областей. В частности, сравнительно широкая область, в которой сосуществуют два резонансных асимметричных (но симметричных друг другу) цикла периода 22. Эти циклы с изменением параметров демонстрируют последовательность удвоения периода, завершающуюся переходом к хаосу. В некотором смысле синхронизацию на вторичном торе можно рассматривать как бифуркацию нарушения симметрии в данной системе, аналогично потере симметрии циклом в осцилляторе с симметричным потенциалом. И в том, и в другом случае исходное симметричное множество становится неустойчивым, а в его окрестности рождается пара асимметричных, но симметричных друг другу циклов. В свою очередь, бифуркацию Хопфа можно

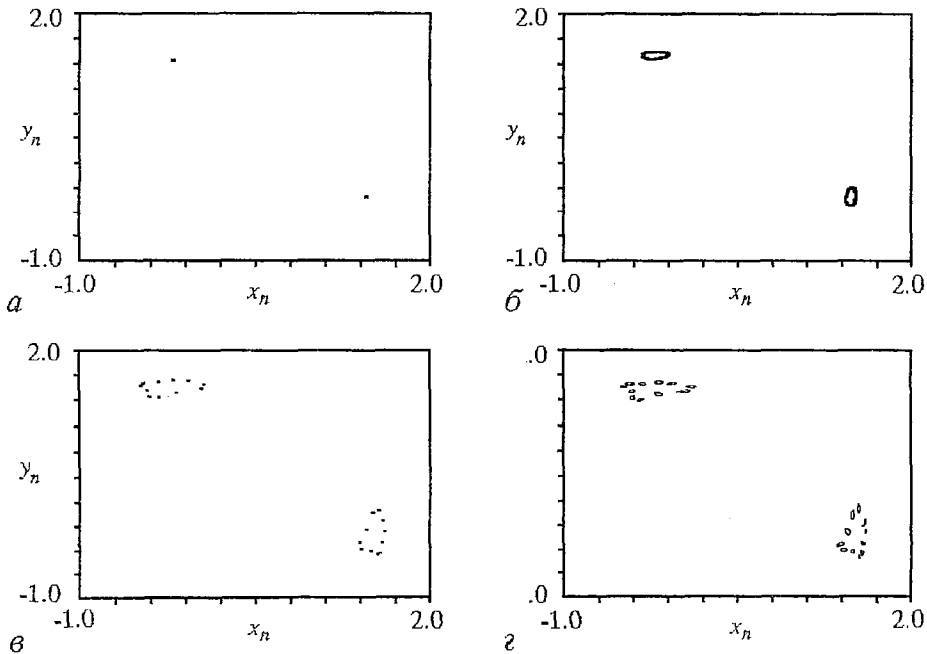


Рис. 3. Фазовые портреты: *a* – цикл 2_1 ; *б* – тор; *в* – резонансный цикл на торе периода 22; *г* – тор, родившийся из резонансного цикла

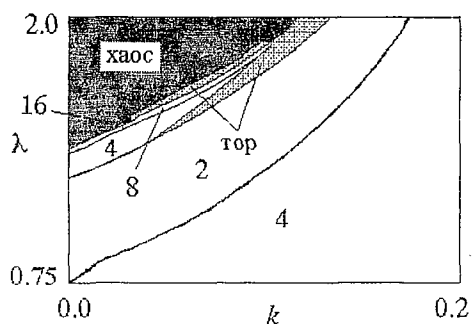


Рис. 4. Структура плоскости параметров (λ, k) при $\delta=0.97$

длинную последовательность переходов типа «резонансный цикл – тор» [11–13]. Является ли эта последовательность переходов конечной или бесконечной, доказать не представляется возможным. Но опираясь на тот факт, что период резонансных циклов четный, то существуют циклы, у которых переменные x_n, y_n сдвинуты относительно друг друга на половину периода, а они симметричны относительно диагонали $x_n=y_n$ и демонстрируют бифуркацию Хопфа. Можно предположить, что данная последовательность переходов является бесконечной и в конечном итоге приводит к формированию фрактального множества и, соответственно, – разрушению тора. В итоге рассмотренный вид симметрии цикла привносит качественно новый вид поведения, не наблюдаемый в изолированной системе.

Рассмотрим несимметричные циклы. Таких циклов периода 4 существует два вида: 4_1 и 4_3 (в соответствии с системой обозначений [9]), реализации subsystem для каждого из них сдвинуты относительно друг друга на 1 и на 3, соответственно, а сами циклы с ростом параметра λ демонстрируют последовательность удвоений периода, завершающуюся переходом к хаосу. В результате последовательности бифуркаций удвоения периода устойчивых и неустойчивых циклов количество циклов в системе увеличивается. В частности, из 4_1 и 4_3 рождаются асимметричные циклы $8_1, 8_5, 8_3, 8_7$, демонстрирующие с изменением параметров удвоение периода. Рассмотрим, как влияет асимметрия системы на эволюцию симметричных и асимметричных циклов.

При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ нарушается глобальная симметрия системы (1). Положим $\lambda_1 = \lambda$, а $\lambda_2 = \delta\lambda$, где δ – параметр асимметрии. Рис. 4 иллюстрирует структуру листа цикла 2_1 при $\delta=0.97$. Введение асимметрии приводит к сужению области существования тора, родившегося из цикла 2_1 , то есть нарушение полной симметрии приводит к подавлению квазипериодических движений. Однако на этом листе появляется дополнительная область квазипериодических движений, родившихся из несинфазного цикла 8_7 . Следуя от оси λ вдоль линии бифуркации удвоения периода цикла 8_7 , легко обнаружить точку на плоскости параметров, где эта линия расщепляется на две – линию рождения тора и резонанса на торе. Проанализируем влияние параметра асимметрии на сам цикл 8_7 и на его эволюцию при изменении параметров. Рис. 5, а–в иллюстрируют изменения фазового портрета цикла 8_7 , наблюдаемые при движении вдоль линии бифуркации удвоения периода, а рис. 5, г – тор, родившийся из этого цикла. Из анализа фазовых портретов видно, что точки 1 и 4 на фазовом портрете стремятся расположиться симметрично относительно прямой, параллельной диагонали фазовой плоскости и проходящей через середину отрезка, соединяющего эти точки, рис. 5, в получен вблизи точки расщепления. Введем замену переменных:

рассматривать как индикатор симметрии устойчивого множества. Численные исследования показывают, что структура резонансных областей не является тривиальной. Например, имеется область резонанса, в которой сосуществуют два асимметричных цикла периода 154. С изменением параметров в пределах области один из них демонстрирует захват симметрии [5]. В свою очередь, симметричный цикл демонстрирует рождение тора. Таким образом, двигаясь в пространстве параметров по некоторой сложной траектории, можно наблюдать

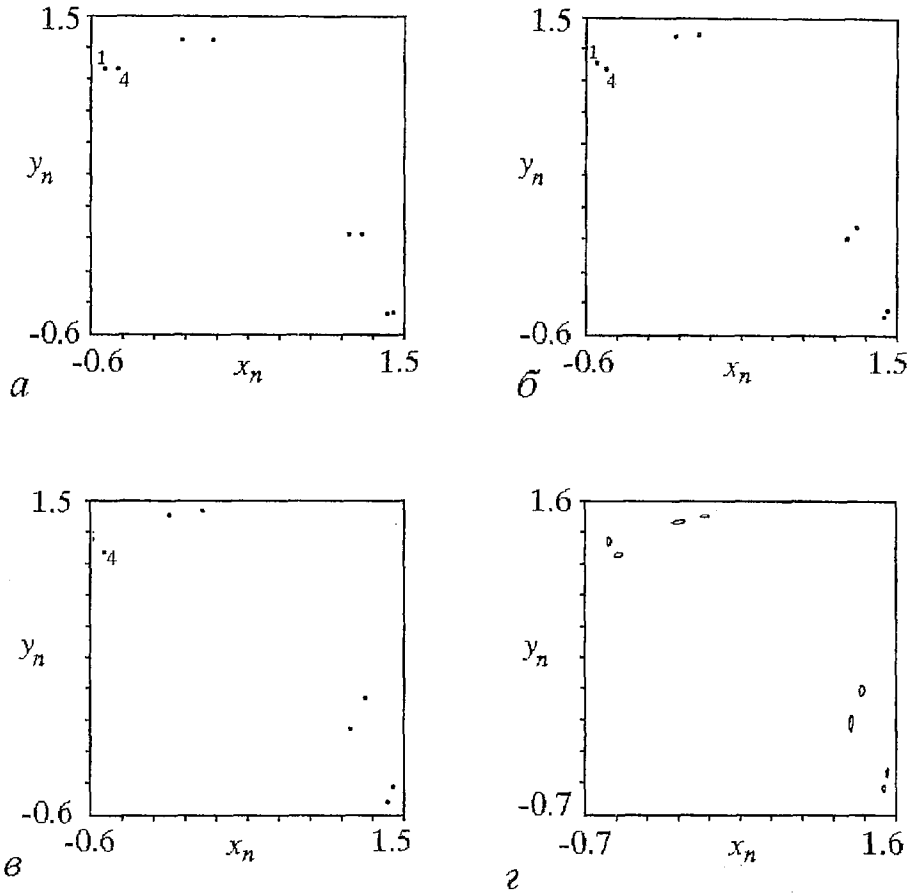


Рис. 5. Фазовые портреты цикла 8_7 при значениях управляющих параметров: а - $\lambda=1.39, k=0$; б - $\lambda=1.46, k=0.02$; в - $\lambda=1.54, k=0.0304$ и г - тора при $\lambda=1.61, k=0.05$

$$v_n = x_n - (x_1 + x_4)/2,$$

$$\vartheta_n = y_n - (y_1 + y_4)/2.$$

Данная замена переменных соответствует переносу начала координат плоскости (x_n, y_n) в середину отрезка, соединяющего точки (x_1, y_1) и (x_4, y_4) . Таким образом уменьшение параметра δ приводит к тому, что точки (v_1, ϑ_1) и (v_4, ϑ_4) стремятся расположиться симметрично относительно диагонали фазовой плоскости. В новых переменных система (1) будет иметь вид:

$$v_{n+1} = g(v_n, \vartheta_n),$$

$$\vartheta_{n+1} = \psi(v_n, \vartheta_n),$$

где функции $g(v_n, \vartheta_n)$ и $\psi(v_n, \vartheta_n)$ выражаются через $f(x_n, y_n)$ и $\phi(x_n, y_n)$. Учитывая, что (v_1, ϑ_1) и (v_4, ϑ_4) связаны соотношением

$$v_4 = g(g(g(g(v_1, \vartheta_1))))), \tag{8}$$

$$\vartheta_4 = \psi(\psi(\psi(\psi(v_1, \vartheta_1))))),$$

а условие инвариантности имеет вид

$$\vartheta_4 = \nu_1, \quad (9)$$

$$\nu_4 = \vartheta_1,$$

то в итоге система (8) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= g(g(g(g(\nu_1, \vartheta_1))),), \\ \nu_1 &= \psi(\psi(\psi(\psi(\nu_1, \vartheta_1))). \end{aligned} \quad (10)$$

В общем случае система (10) аналитически не решается, но решение существует и его можно найти численно. Таким образом можно утверждать, что для исходной системы отображений (1) при нарушении глобальной симметрии для локальной области некоторых несимметричных устойчивых множеств можно найти инвариантное преобразование. В данном конкретном примере таким устойчивым множеством является цикл 8_7 , и для локальной области этого цикла (пара решений (x_1, y_1) , (x_4, y_4)) или в новых переменных (ϑ_1, ν_1) , (ϑ_4, ν_4)) существует инвариантное преобразование, связанной с заменой переменных. Данный вид инвариантности можно назвать локальной симметрией, так как в данном случае весь цикл асимметричен, а найденное преобразование применимо лишь к локальной его области.

Таким образом, выделены три типа симметрии* циклов:

- в случае тождественного поведения subsystem динамике связанной системы тождественна динамике изолированной subsystemы;
- в случае полной симметрии появляется новый тип (по сравнению с изолированной subsystemой) поведения и сценарии перехода к хаосу;
- асимметричные циклы демонстрируют такой же сценарий перехода к хаосу, как и в случае тождественного поведения subsystem;
- нарушение симметрии системы приводит к появлению в определенных диапазонах значений управляющих параметров и для некоторых циклов локальной симметрии, которая также приводит к появлению нового типа поведения и сценария перехода к хаосу (через разрушение тора).

Авторы выражают благодарность профессору Б.П. Безручко за плодотворное обсуждение работы и критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 99–02–17735 и ФЦП «Интеграция», грант № 696.3.

Библиографический список

1. Holmes P. A nonlinear oscillator with strange attractor // *Phylos. Trans.* 1979. Vol. 292. P. 419.
2. Sato S., Sano M., Sawada Y. Universal scaling property in bifurcation structure of Duffing's and generalized Duffing's equation // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 28, № 3. P. 1654.
3. Parlitz U., Lauterborn W. Superstructure in bifurcation set of the Duffing's equation // *Phys. Lett.* 1985. Vol.107A, №8. P.351.
4. Englisch V., Lauterborn W. Regular window structure of a double-well Duffing's oscillator // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol. 44, № 2. P. 916.
5. Krupa M., Roberts M. Symmetry breaking and symmetry locking in equivariant circle maps // *Physica.* 1992. Vol. 57D. P.417.
6. Bressloff P.C., Coombes S. Symmetry and phase-locking in a ring of pulse-coupled oscillators with distributed delays // *Physica.* 1999. Vol. 126D. P. 99.

* В данном случае сознательно используется термин «тип симметрии», а не «группа симметрии», используемый в теории групп. Это связано с тем, что во всех случаях рассматривается одна и та же инвариантность циклов к замене динамических переменных. То есть, с позиции теории групп – группа симметрии во всех случаях одна и та же.

7. *Gu Y., Tung M., Yuan J.-M., Feng D.H., Narducci L.M.* Crisis and hysteresis in coupled logistic maps // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol.52, № 9. P.701.

8. *Кузнецов С.П.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. 28. С.991.

9. *Селезнев Е.П., Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н.* Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // *ЖТФ.* 1990. Т. 60, вып. 10. С.19.

10. *Прохоров М.Д.* Виды колебаний диссипативно связанных систем с удвоением периода при сильной связи // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1996. Т. 4, № 4,5. С. 99.

11. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.И.* Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т. XXVIII, № 9. С. 1112.

12. *Анищенко В.С.* Разрушение квазипериодических колебаний и хаос в диссипативных системах // *ЖТФ.* 1986. Т. 56, вып. 2. С.225.

13. *Кипчатов А.А., Короновский А.А.* Тонкие эффекты самоподобного поведения в кусочно-линейной системе вблизи линии бифуркации рождения тора // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 2-3. С.17.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 31.01.2000

TYPES OF CYCLES SYMMETRY IN COUPLED PERIOD DOUBLING SYSTEMS

Ye.P. Seleznev, A.S. Dudova

Types of symmetry of various cycles and their evolution in coupled period doubling systems are discussed. Full symmetry leads to formation of new scenario transition to chaos. It is shown that at driven loss of full symmetry for several cycles local symmetry takes place. As well as full symmetry cycles the local one demonstrates quasiperiodic route to chaos.



Селезнев Евгений Петрович – родился в Саратове (1960). Окончил физический факультет Саратовского госуниверситета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1990). Старший научный сотрудник Саратовского отделения института радиотехники и электроники РАН, доцент факультета нелинейных процессов СГУ. Автор и соавтор более 50 научных работ. Область научных интересов – экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах.



Дудова Анастасия Сергеевна – родилась в Саратове (1978). Студентка факультета нелинейных процессов СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика – исследование сценариев перехода к хаосу и видов симметрии циклов в системах связанных квадратичных отображений. Принимала участие в трех студенческих конференциях, в двух школах-конференциях и двух международных конференциях.