

## ВВЕДЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫЙ ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

### Часть 1. Основные положения, численная реализация и модельные сигналы

*А.А. Короновский, А.Е. Храмов*

Делается попытка, опираясь на хорошо известные физические представления и примеры, объяснить механизм работы непрерывного вейвлетного преобразования и возможности его применения для исследования сложных режимов, порожденных нелинейными динамическими системами (как конечномерных, так и распределенной природы). В первой части рассматривается введение в вейвлетный анализ, математический аппарат, методика численной реализации вейвлетного преобразования, его применение к модельным сигналам. На ряде простых примеров иллюстрируются особенности вейвлет-преобразования, его сходства (и отличия) с классическим спектральным анализом. Приводится достаточно большое число иллюстраций, которые делают наглядным знакомство с вейвлетным анализом.

### Введение

Вейвлетный анализ, возникший сравнительно недавно, как оказалось, является мощным средством анализа динамики систем и привлекает в последнее время все большее внимание исследователей. Отражением этого факта служит большое число работ, ориентированных на начинающего исследователя, посвященных изложению основных понятий и сущности вейвлетного преобразования. Среди подобных работ читателю можно порекомендовать обзорные работы Н.М. Астафьевой [1, 2], статью, написанную Торренсом и Компо [3], вводные и обзорные курсы по вейвлетному анализу [4–11], а также многочисленные другие публикации по данной тематике (см. библиографию к приведенным работам). Тем не менее, мы не смогли удержаться, чтобы не пополнить этот ряд (приведенный выше в очень «усеченном» виде) еще одной работой. В своей работе мы старались, опираясь на хорошо известные физические представления и примеры, объяснить механизм работы вейвлетного преобразования и возможности его применения для анализа сложных режимов, порожденных нелинейными динамическими системами.

Следует сразу оговориться, что мы в полном соответствии с названием рассматриваем только непрерывный вейвлетный анализ. Наряду с непрерывным

вейвлетным анализом существует дискретное вейвлетное преобразование (см. работы [12–17]), на котором мы не останавливаемся.

Начнем наше рассмотрение с хорошо известного читателю спектрального анализа, отталкиваясь от него как от основы, являющейся, в какой-то мере, базой вейвлетного анализа. Первым вопросом, на котором следует остановиться, является основной вопрос: «А для чего нужен вейвлетный анализ?». Существует ведь хорошо себя зарекомендовавший эффективный и привычный аппарат спектрального анализа [19], использующий ряды и/или интегралы Фурье. В то же самое время, реализация вейвлетного анализа несколько более сложна, чем реализация преобразования Фурье. Тем не менее оказывается, что привычный спектральный анализ не всегда помогает понять, как устроен анализируемый сигнал.

Рассмотрим в качестве простого примера сигнал, являющийся суммой двух гармонических сигналов с разными частотами

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t). \quad (1)$$

В этом случае в фурье-спектре будут присутствовать два пика (рис. 1), на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ <sup>1</sup>. Когда обе частоты присутствуют в сигнале постоянно, спектральный подход четко выделяет существующие в сигнале частоты, предоставляя исследователю полную информацию об «устройстве» исследуемого сигнала. Если же частоты в сигнале появляются или исчезают с течением времени, спектральный анализ (см. рис. 2) не дает полной информации

$$f(t) = (1-H(t))\cos(\omega_1 t) + H(t)\cos(\omega_2 t), \quad (2)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда. Глядя на спектр сигнала, ничего нельзя сказать о том, какие частоты присутствовали в сигнале в тот или иной момент времени. Из вида спектра совершенно неясно, был ли исследуемый сигнал суммой двух гармонических сигналов, как в первом случае (см. рис. 1), или же в сигнале частоты существовали отдельно в разные моменты времени (рис. 2). Информацию об этом из вида спектрального представления сигнала получить невозможно.

Из рассмотренного простого примера следует, что спектральный анализ, позволяющий выделить присутствующие в сигнале гармоники, является эффективным средством анализа временных реализаций, частотный состав которых не

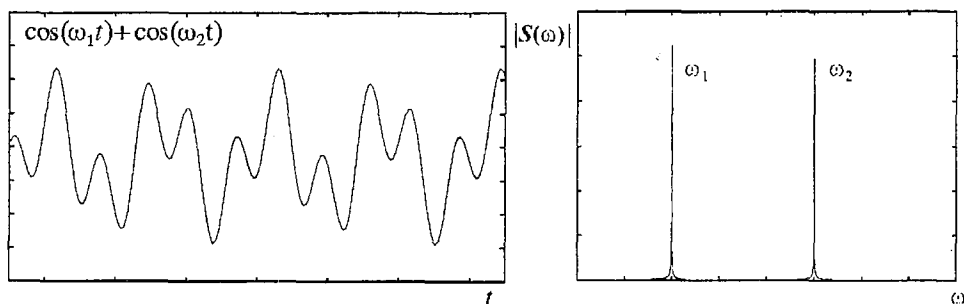


Рис. 1. Сигнал, представляющий собой суперпозицию двух гармонических сигналов с частотами  $\omega_2 = 2.5\omega_1$ , и его спектр. Шкала нелогарифмическая

<sup>1</sup> Следует оговорить, что в дальнейшем рассматривается диапазон положительных значений частот – отрицательный диапазон, по сути дела, является зеркальным отражением положительного и не несет никакой дополнительной смысловой нагрузки.

изменяется с течением времени. В тех же случаях, когда (как, например, в случае, описываемом соотношением (2)) в сигнале возникают (или исчезают) гармоники, или частота гармоник плавно изменяется с течением времени (рис. 3), необходим иной (хотя, может быть, в чем-то похожий на спектральный) метод анализа.

Невозможность отследить появление (исчезновение) или изменение частотных составляющих сигнала кроется в самом механизме спектрального анализа, а именно: при преобразовании Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

интегрирование проводится по всей длине временной реализации (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), и каждая гармоника, присутствующая во временной реализации в тот или иной интервал времени, накладывает свой «отпечаток» на общий вид спектра.

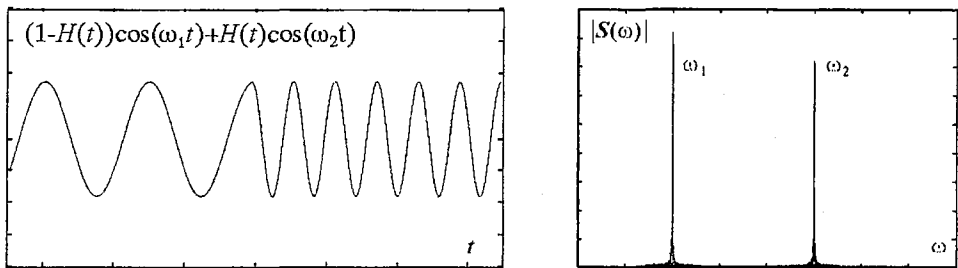


Рис. 2. Гармонический сигнал, у которого резко изменяется частота с величины  $\omega_1$  на  $\omega_2=2.5\omega_1$  и его спектр. По виду спектра нельзя отличить данный случай от предыдущего, когда рассматриваемый сигнал представлял собой сумму двух гармонических сигналов (см. рис. 1.)

Следовательно, если возникает задача определять, как менялся частотный состав сигнала с течением времени, необходимо отказаться от интегрирования по всему временному интервалу  $(-\infty, +\infty)$  и рассматривать некоторый диапазон длительностью  $2T$   $[t_0-T; t_0+T]$ , где  $t_0$  – интересующий нас момент времени, в который мы хотим локально определить частотные составляющие, присутствующие в сигнале,

$$S(\omega, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4)$$

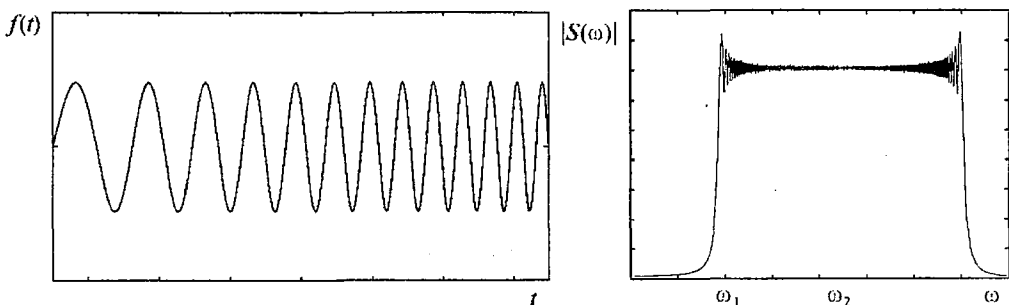


Рис. 3. Сигнал, частота которого линейно возрастает с течением времени:  $\omega=\omega_1+a(\omega_2-\omega_1)t$  и его спектр. Глядя на сплошной спектр, можно предполагать, что в сигнале присутствуют все частоты, попадающие в диапазон  $[\omega_1; 2\omega_2-\omega_1]$ . Шкала нелогарифмическая

Для того, чтобы составить представление о всем сигнале, необходимо сдвигать «окно», длительностью  $2T$ , вдоль временной реализации. В этом случае, в зависимости от выбора  $t_0$  получается «свой» спектр, изменяющийся по мере того, как «окно» фурье-преобразования перемещается вдоль реализации (рис. 4). Фактически  $t_0$  является переменной величиной, и возникает необходимость рассматривать поверхность  $S(\omega, t_0)$ .

Однако подобный подход, называемый оконным преобразованием Фурье, тоже не очень хорош (см., например, [8]). Все дело в том, что при преобразовании Фурье гармонического сигнала спектр имеет вид  $\delta$ -функции только в том случае, если этот сигнал постоянной частоты имеет бесконечную длительность (то есть начинается в момент времени  $t=-\infty$  и заканчивается в  $t=+\infty$ ), и интегрирование проводится по этому же бесконечному интервалу времени. В случае конечной длительности сигнала (или, что почти то же самое, интегрирования по конечному интервалу времени) его спектральный образ имеет конечную ширину, и чем

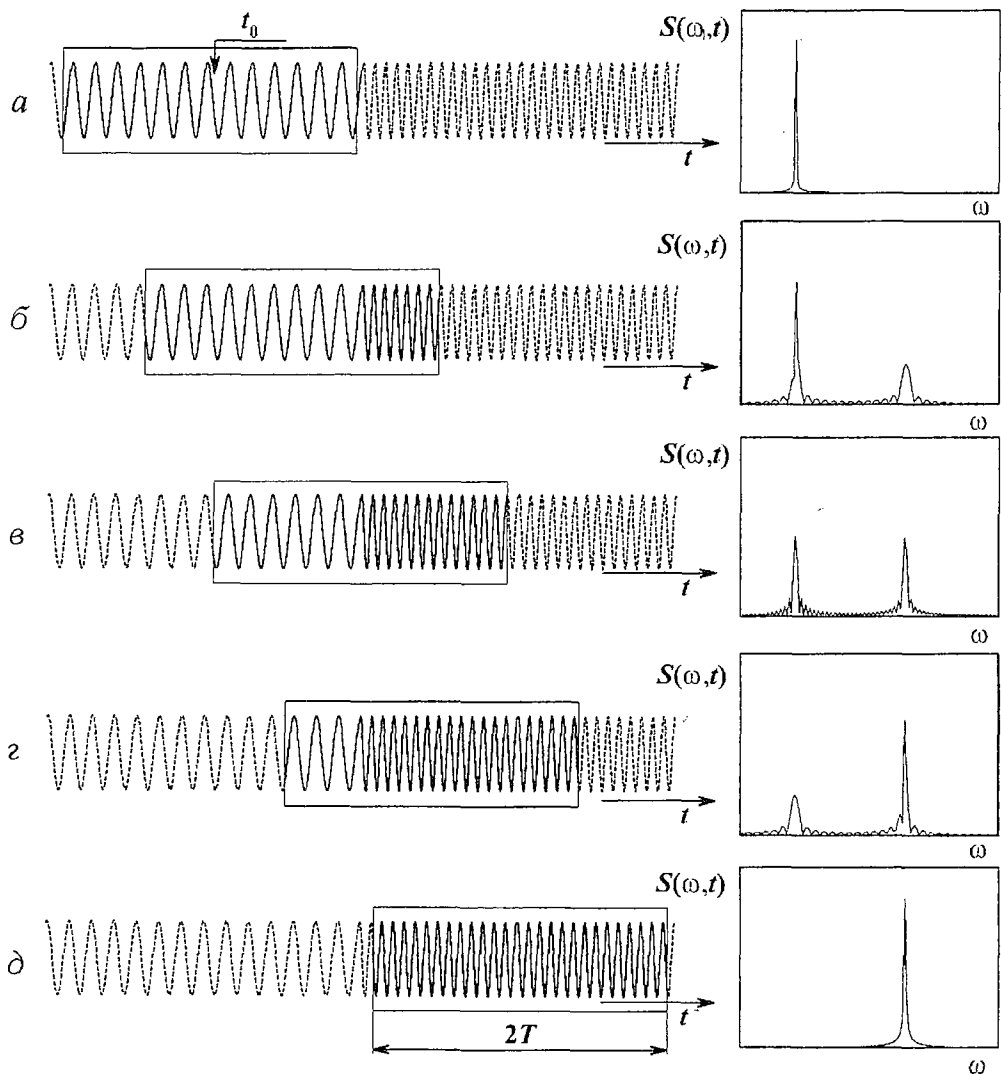


Рис. 4. Оконное преобразование Фурье временного сигнала (2), представляющего собой два последовательных участка гармонических сигналов с разными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Окно преобразования сдвигается вдоль временной реализации, что приводит к трансформации спектра (нижняя часть рисунка). Шкала нелогарифмическая

меньше длительность сигнала, тем большую ширину в пространстве частот имеет его фурье-образ. Таким образом, при применении оконного преобразования Фурье: с одной стороны, необходимо выбирать ширину окна  $2T$  как можно меньше, чтобы четко выявить момент времени появления или исчезновения той или иной частотной составляющей сигнала; с другой стороны, при этом падает разрешение метода в частотном диапазоне. Иначе говоря, более или менее точно определяя момент появления какой-либо частоты, мы в то же самое время ничего не можем сказать о значении этой частотной компоненты: возникла ли эта частотная составляющая одна, или же одновременно возникло несколько составляющих, близких по частотам. Попытка же улучшить разрешение метода в частотном диапазоне приводит к ухудшению временного разрешения – идеальным случаем, с точки зрения выявления частот, является само преобразование Фурье (3), но, как мы уже видели, с точки зрения анализа временной динамики частотных составляющих, оно является малоэффективным.

Рис. 5 иллюстрирует сказанное. Анализируемый сигнал представляет из себя четыре синусоидальных сигнала с разными частотами, последовательно сменяющими друг друга. На рисунках *а*, *б* и *в* показана поверхность  $S(\omega, t)$  для различной ширины окна  $2T$ . Отчетливо видно, что не удастся одновременно четко определить характер сигнала и в частотном, и во временном диапазонах. Следовательно, оконное преобразование Фурье, при всей его оригинальности,

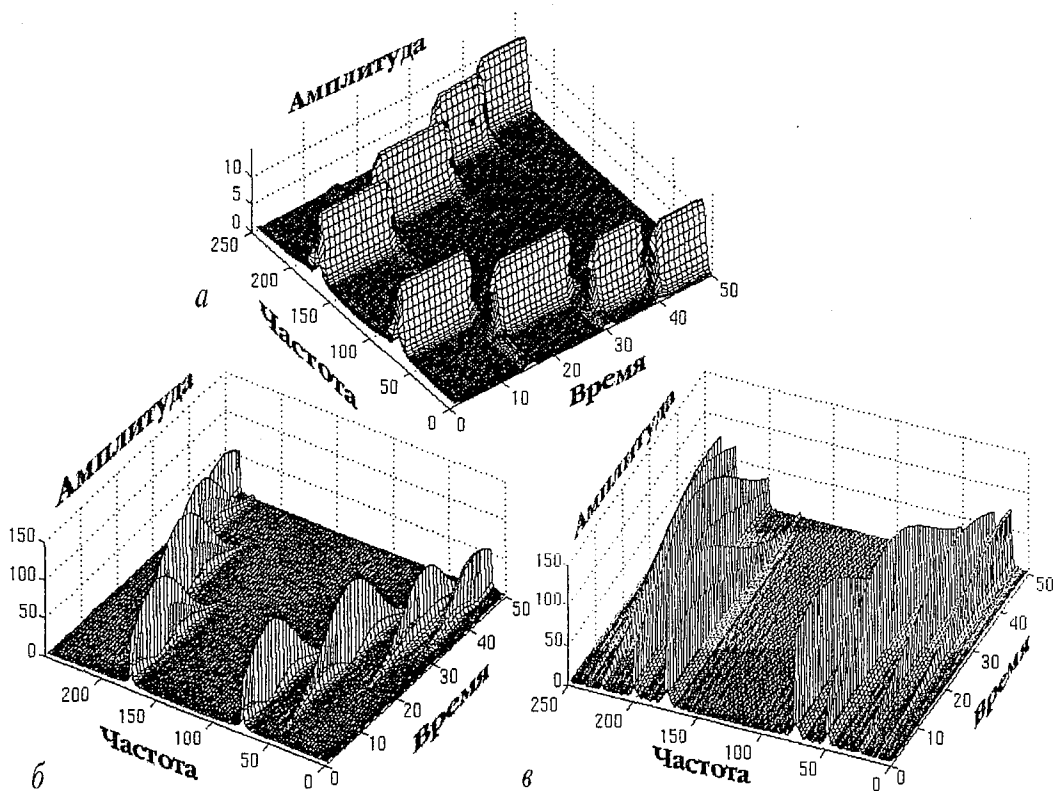


Рис. 5. Сигнал, представляющий из себя «набор» четырех синусоид, существовавших в различные интервалы времени (в интервал времени от 0 до 250 мс частота  $f$  синусоидального сигнала составляла 300 Гц, затем от 250 до 500 мс – 200 Гц, от 500 до 750 мс – 100 Гц и от 750 до 1000 мс – 50 Гц) был подвергнут оконному преобразованию Фурье. Рисунки соответствуют различной ширине окна. Отчетливо видно, что чем лучше локализована частота сигнала, тем менее четко удается выделить момент времени, когда эта частотная составляющая появилась в сигнале, и наоборот. Рисунок заимствован из работы [7]

является не слишком эффективным средством для анализа сигналов, частотные составляющие которых меняются с течением времени.

Таким образом, необходимо как-то модифицировать оконное преобразование Фурье (4), чтобы осталась возможность отслеживать изменения, происходящие во времени, но, по-возможности, уменьшить недостатки, связанные с неточностью определения частот. Безусловно, читатель понимает, что теперь, по логике вещей, авторы должны ввести определение вейвлетного преобразования и показать, что оно (преобразование) лучше справляется с поставленными задачами, нежели оконное преобразование Фурье. Тем не менее, мы позволим себе еще на некоторое время отодвинуть момент, когда появится формальное определение вейвлетного преобразования, и постараемся «плавно» подвести к нему читателя. Подумаем немного над тем, как можно было бы, используя оконное преобразование Фурье (4), получить более или менее полную информацию о динамике частотных составляющих в исследуемом сигнале. Обратим внимание на то, что хотя оконное преобразование Фурье, выполненное один раз, не дает полной информации о сигнале, совокупность подобных преобразований одного и того же сигнала, выполненных с различной шириной окна  $2T$ , оказывается гораздо более информативной (см. рис. 5, а – в). Можно использовать результаты оконного преобразования с малой шириной окна для определения моментов времени изменения спектрального состава сигнала, а преобразования с большой шириной окна – для выделения соответствующих спектральных компонент. Другое дело, что подобный подход неудобен. Фактически у нас возникает необходимость рассматривать функцию не двух переменных  $S(\omega, t_0)$  (4), а трех –  $S(\omega, t_0, T)$ , которая требует представления в четырехмерном пространстве, что ведет к вполне понятным сложностям.

Для уменьшения числа переменных, можно «связать» каким-либо образом частоту  $\omega$  с длительностью «окна»  $T$ , например, для каждого временного масштаба  $T$  положить  $\omega = 2\pi n/T$  ( $n \in \mathbb{R}$ ). Тогда преобразование Фурье (4) будет иметь вид

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) e^{-i2\pi n t/T} dt. \quad (5)$$

Фактически в трехмерном пространстве  $(\omega, t_0, T)$ , на котором определена функция  $S(\omega, t_0, T)$ , выделяется некоторая поверхность  $\sigma$ , в точках которой и рассматривается вышеописанная функция. Понятно, что часть информации в этом случае теряется, но «оставшейся части» вполне достаточно, чтобы составить представление об особенностях рассматриваемой временной реализации  $f(t)$ , поскольку введенная в рассмотрение поверхность  $\sigma$  «охватывает» как весь частотный, так и временной диапазоны (рис. 6).

Более того, размер окна, которое должно «выделять» различные гармоники, оказывается «завязан» на соответствующий временной масштаб, а именно: для выявления низкочастотных гармоник необходимо проанализировать

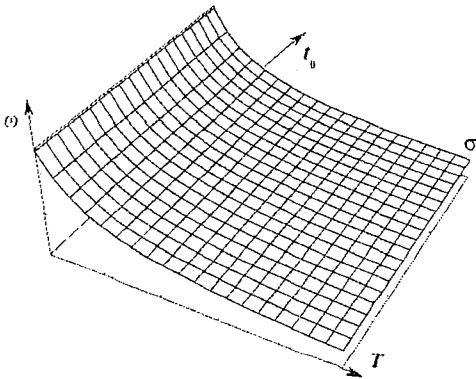


Рис. 6. Поверхность  $\sigma$ , определенная в трехмерном пространстве «частота – время – ширина окна»

большой отрезок временной реализации по сравнению с тем случаем, когда анализируются высокочастотные гармоники. Соотношение  $\omega=2\pi n/T$  как раз и обеспечивает разумное соотношение анализируемой частоты  $\omega$  и ширины анализирующего окна  $T$ .

Рассмотрим результат преобразования (5) для временной реализации  $f(t)=\sin(\omega t)$ . В этом случае несложные, но достаточно громоздкие выкладки дают

$$S(T, t_0) = 2T \sin(\omega T) / (\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2) [\omega T \sin(\omega t_0) - i 2\pi n \cos(\omega t_0)] e^{-i 2\pi n t_0 / T}. \quad (6)$$

Точно также, как и при спектральном анализе, результат преобразования имеет как действительную, так и мнимую части. По аналогии с преобразованием Фурье имеет смысл рассматривать квадрат модуля величины  $S$

$$|S(T, t_0)|^2 = 4T^2 \sin^2(\omega T) / (\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2)^2 [\omega^2 T^2 \sin^2(\omega t_0) + 4\pi^2 n^2 \cos^2(\omega t_0)]. \quad (7)$$

Можно убедиться, что в рассматриваемом случае  $|S(T, t_0)|^2$  принимает максимальное значение при  $T \rightarrow 2\pi n / \omega$ , равное  $n^2 / \omega^2$  (рис. 7). Таким образом, в рассматриваемом случае, аналогично фурье-анализу, происходит выделение временного масштаба  $T$ , соответствующего частоте сигнала. Следует обратить внимание на несколько важных моментов.

*Во-первых*, для одного и того же сигнала  $f(t)=\sin(\omega t)$  при разных значениях параметра  $n$  (характеризующего число полных периодов анализирующей синусоиды, «укладывающихся» в окне шириной  $T$ ) значение ширины окна, при котором величина  $|S(T, t_0)|^2$  является максимальной, оказывается различной (см. рис. 7, а, б). Этот факт становится вполне понятным, если обратить внимание на то, что величина  $|S(T, t_0)|^2$  является максимальной для такой ширины окна, при которой гармоническое заполнение этого окна имеет ту же самую частоту  $\omega$ , что и анализируемый сигнал  $f(t)$  (рис. 8). Иными словами, величина  $|S(T, t_0)|^2$  максимальна, когда  $T=2\pi n / \omega$ , где  $\omega$  – частота анализируемого сигнала  $f(t)$ . Фактически то же самое происходит и при спектральном анализе, однако значение переменной, при котором исследуемая функция имеет максимум, зависит от того, каким образом «устроено» анализирующее окно, и не всегда совпадает с соответствующим временным масштабом, присутствующим в сигнале. Следует также заметить, что чем большее число периодов укладывается в окне интегрирования (чем больше величина  $n$ ), тем отчетливее выражено наличие данной гармоники в  $|S(T, t_0)|^2$  (см. рис. 7, а). Однако, как следствие этого, ширина окна, при котором  $|S(T, t_0)|^2$  принимает максимальное значение, также увеличивается (см., опять-таки, рис. 7), что, как было указано выше, ведет к

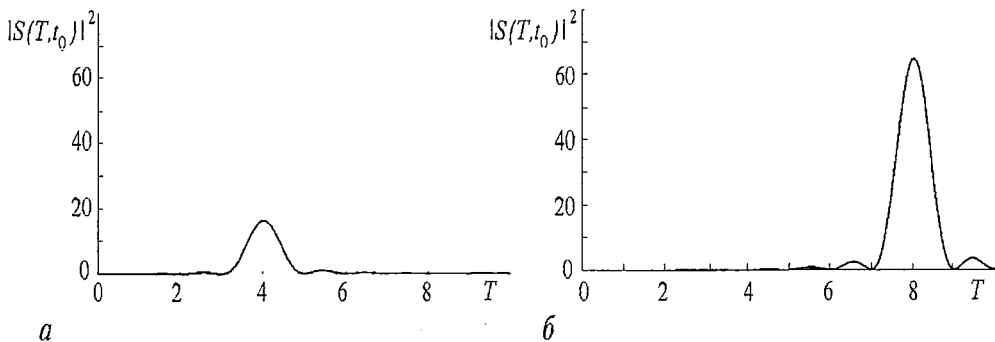


Рис. 7. Результат преобразования (5) для одной и той же временной реализации  $f(t)=\sin(\omega t)$ ,  $\omega=\pi$ ,  $t_0=0$  для различных  $n$ : а – 2, б – 4

ухудшению разрешающих свойств преобразования во временном диапазоне (в то время как разрешение в частотном диапазоне улучшается).

Во-вторых, следует помнить, что получающаяся в результате преобразования (5) величина  $S(T, t_0)$  является функцией двух переменных  $-T$  и  $t_0$ . Величина  $T$  определяет временной диапазон, по которому осуществляется интегрирование в (5), и одновременно частоту анализирующего заполнения. Таким образом, частота анализирующего заполнения оказывается жестко связана с шириной окна  $T$ . В то же время переменная  $t_0$  определяет момент времени, в который осуществляется описываемое преобразование; фактически  $t_0$  определяет сдвиг окна интегрирования вдоль оси времени. Но когда окно интегрирования сдвигается, анализирующее гармоническое заполнение «остаётся на месте» (см. рис. 8, з, д), иными словами, фаза заполнения все время непрерывно изменяется по мере сдвига окна вдоль оси времени. Оказывается удобным зафиксировать фазу заполнения

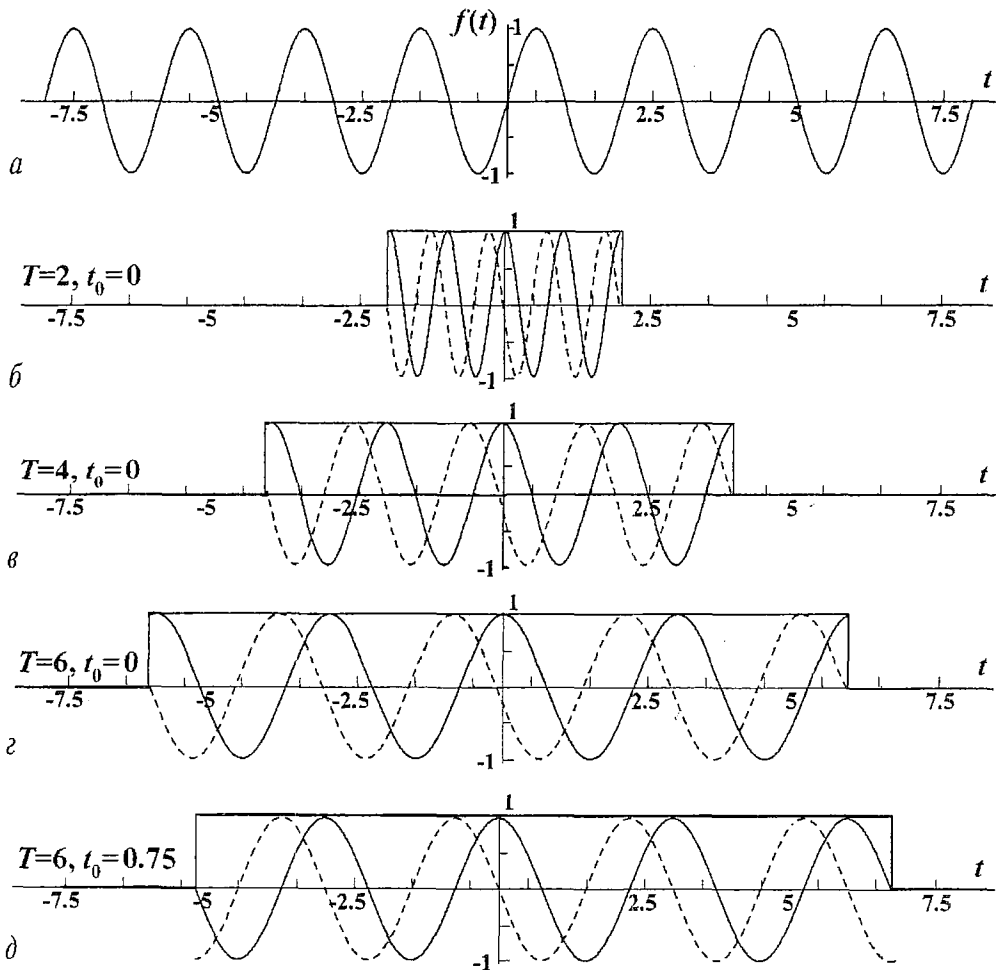


Рис. 8. а - временная реализация  $f(t)=\sin(\omega t)$ ,  $\omega=\pi$ ; б-д - несколько окон интегрирования различной ширины  $2T$  с анализирующим заполнением  $\exp(-i2\pi t/T)$ . Действительная часть заполнения показана сплошной линией, мнимая - пунктирной. Максимальное значение (ср. с рис. 7, а)  $|S(T, t_0)|^2$  достигается при  $T=4$  (в), когда частота заполнения  $\exp(-i2\pi t/T)$  совпадает с частотой сигнала  $f(t)$ . Рис. (з) и (д) иллюстрируют сдвиг окна интегрирования шириной  $2T$  на величину, определяемую второй переменной  $t_0$



относительно анализирующего окна, для чего следует модифицировать соотношение (5)

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) e^{-i2\pi n(t-t_0)/T} dt. \quad (8)$$

Изменение фазы заполнения не оказывает влияния на величину  $|S(T, t_0)|^2$ , поскольку влияет только на аргумент комплексной функции  $S(T, t_0)$ . Для гармонического сигнала  $f(t) = \sin(\omega t)$  соотношение (8) дает

$$S(T, t_0) = 2T \sin(\omega T) / (\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2) [\omega T \sin(\omega t_0) - i2\pi n \cos(\omega t_0)]. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что все различие между соотношениями (6) и (9) состоит лишь в множителе  $\exp(-i2\pi n t_0/T)$ .

*В-третьих*, необходимо обратить внимание на тот факт, что две гармоники исходного сигнала с различными частотами, но с одинаковой амплитудой, выделяются преобразованием (8) в виде двух максимумов различной высоты (рис. 9). Квадраты этих максимумов  $S_1$  и  $S_2$  соотносятся как

$$S_1^2/S_2^2 = (\omega_2/\omega_1)^2, \quad (10)$$

что следует из (7). Иными словами, чем больше частота гармоники, тем менее она заметна по сравнению с гармониками меньших частот. Из вышесказанного следует, что если в анализируемом сигнале присутствуют две гармоники с сильно различающимися частотами, то гармонику с большей частотой при анализе с помощью (8) можно просто не заметить, если не предпринять соответствующих мер.

Фактически преобразование (8) уже является вейвлетным преобразованием (с некоторыми поправками), к которому был осуществлен «плавный» переход от спектрального анализа. Заметим, что выражение (8) можно переписать в виде

$$S(T, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*((t-t_0)/T) dt, \quad (11)$$

где  $\psi(\xi)$  – анализирующая функция (рис. 10)

$$\psi(\xi) = [H(\xi+1) - H(\xi-1)] e^{i2\pi\xi}, \quad (12)$$

содержащая в себе все вышеописанные свойства (звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение).

Преобразование (11) осуществляется растяжением и сдвигом функции  $\psi(\xi)$  так, как это было описано выше и показано на рис. 8. В этом случае величина  $T$  описывает растяжение, а  $t_0$  – сдвиг анализирующей функции. Функция (12) является, с точностью до нормировочного коэффициента, «материнским вейвлетом» (mother wavelet), из которого получают все остальные вейвлеты других масштабов  $\psi((t-t_0)/T)$  путем сдвига и расширения. Для удобства на материнский вейвлет накладывается условие единичной нормы в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$

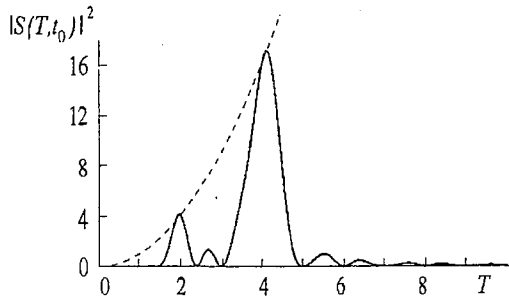


Рис. 9. Преобразование (8) для сигнала  $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$ ,  $\omega_1 = \pi$ ,  $\omega_2 = 2\pi$ . Пунктирной линией нанесена парабола  $T^2$ , характеризующая положение максимумов гармоник соответствующих частот и единичной амплитуды

$$\|\psi\|_{L^2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \psi^*(\xi) d\xi \right)^{1/2} = 1. \quad (13)$$

С учетом соотношения (13) рассматриваемый материнский вейвлет (будем обозначать его как  $\psi_0$ ) имеет вид

$$\psi_0(\xi) = [H(\xi+1) - H(\xi-1)] e^{i2\pi\xi/2^{1/2}}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что вейвлетные функции для других масштабов  $\psi_0((t-t_0)/T)$ , полученные «растяжением» и сдвигом материнского вейвлета  $\psi_0$ , не удовлетворяют соотношению (13). Для того, чтобы оно выполнялось, необходимо на соответствующем временном масштабе  $T$  ввести корректирующий коэффициент, зависящий от этого масштаба. Тогда и в преобразовании (11) следует использовать не просто «растянутую» и «сдвинутую» функцию  $\psi_0((t-t_0)/T)$ , а с учетом масштабирующего коэффициента  $T^{-1/2}$

$$\psi_{T,t_0}(t) = (1/T^{1/2}) \psi_0((t-t_0)/T). \quad (15)$$

Тогда преобразование (11) примет вид

$$S(T, t_0) = (1/T^{1/2}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*((t-t_0)/T) dt. \quad (16)$$

Это соотношение и есть настоящее вейвлетное преобразование, как оно вводится в литературе (см., например, [4]). Единственное, что еще следует отметить, это обозначения. Поскольку изначальной отправной точкой было преобразование Фурье, то и вейвлетное преобразование, полученное с помощью плавного перехода и качественных рассуждений, также содержит те же самые обозначения. Но для вейвлетного преобразования традиционно принято обозначать временной масштаб через  $s$  (то есть  $T \equiv s$ ), а само преобразование через  $W(s, t_0)$  (хотя, справедливости ради, следует отметить, что встречаются и другие обозначения)

$$W(s, t_0) = (1/s^{1/2}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*((t-t_0)/s) dt. \quad (17)$$

Таким образом, нам удалось осуществить плавный переход от преобразования Фурье к вейвлетному преобразованию так, чтобы была понятна суть и основная идея последнего. Фактически при вейвлетном преобразовании происходит разложение по другому функциональному базису, нежели функции  $\sin$  и  $\cos$ . В качестве базисных функций выступают вейвлеты  $\psi_{s,t_0}$ , получающиеся растяжением и сдвигом материнского вейвлета  $\psi_0$ . Материнский вейвлет (14),

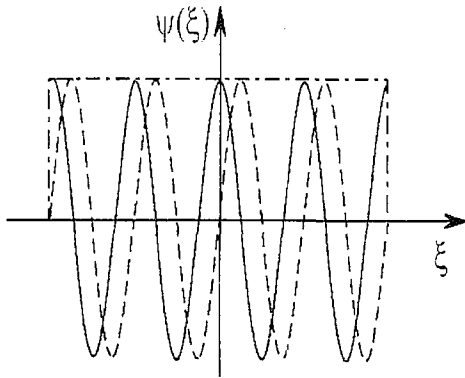


Рис. 10. Sin-вейвлет

полученный плавным переходом от фурье-преобразования, показан на рис. 10. Будем называть эту вейвлетную функцию Sin-вейвлетом. Этот вейвлет не имеет широкого применения на практике, и мы ввели его исключительно из методологических соображений. Однако важной отличительной чертой вейвлетного преобразования является тот факт, что в качестве материнского вейвлета может быть выбрана любая функция, удовлетворяющая определенным условиям, о которых речь пойдет ниже.

## 1.1. Базовые понятия и определения

Непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt \quad (1.1)$$

анализируемой функции  $f(t)$  с двухпараметрической вейвлетной функцией  $\psi_{s, t_0}(t)$ , которая получается из материнского вейвлета  $\psi_0(t)$ ,

$$\psi_{s, t_0}(t) = (1/s^{1/2})\psi_0((t-t_0)/s). \quad (1.2)$$

Параметр  $s$ , называемый масштабом вейвлетного преобразования ( $s \in \mathbb{R}^+$ ), отвечает за ширину вейвлета, а  $t_0 \in \mathbb{R}$  – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси  $t$ . Множитель  $1/s^{1/2}$  в соотношении (1.2) введен для того, чтобы все вейвлетные функции  $\psi_{s, t_0}$  имели постоянную (единичную) норму в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$

$$\|\psi_{s, t_0}\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} = 1, \quad (1.3)$$

где норма пространства  $L^2(\mathbb{R})$  определяется как

$$\|f\|_{L^2} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f^*(x) dx \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Отметим, что выполнение условия (1.3), в силу теоремы Парсеваля, приводит к

$$1/(2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) \hat{\psi}^*(\omega) d\omega = 1, \quad (1.5)$$

где  $\hat{\psi}(\omega)$  – фурье-образ вейвлетной функции.

Материнский вейвлет может быть выбран достаточно произвольно (например, так, как это было сделано во введении), однако при этом он должен удовлетворять ряду условий [1].

**Условие локализации.** Базисная вейвлетная функция (материнский вейвлет)  $\psi_0$  должна быть локализована как во временном, так и в частотном представлении. Для этого необходимо, чтобы  $\psi_0$  была задана на конечном интервале и обладала достаточной регулярностью.

**Условие допустимости.** Материнский вейвлет должен быть выбран таким образом, чтобы его фурье-образ  $\hat{\psi}_0(\omega)$  удовлетворял условию

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [|\hat{\psi}_0(\omega)|^2 / |\omega|] d\omega < \infty. \quad (1.6)$$

Отметим, что для практического применения часто достаточно рассмотрения только положительных частот (следствие разумного условия  $s > 0$ ), поэтому материнский вейвлет должен удовлетворять соотношению

$$C_\psi = 2 \cdot 2\pi \int_0^{+\infty} [|\hat{\psi}_0(\omega)|^2 / \omega] d\omega = 2 \cdot 2\pi \int_0^{+\infty} [|\hat{\psi}_0(-\omega)|^2 / \omega] d\omega < \infty. \quad (1.7)$$

Подчеркнем также, что для всех практических целей условие (1.6) эквивалентно требованию нулевого среднего

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(t) dt = 0 \quad (1.8)$$

или

$$\hat{\psi}_0(\omega) = 0, \quad (1.9)$$

что следует из соотношения (1.6).

Иногда бывает необходимым, чтобы не только нулевой момент (1.8) обращался в ноль, но и все первые  $m$  моментов были равны нулю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \psi_0(t) dt = 0. \quad (1.10)$$

Такие вейвлеты (вейвлеты  $m$ -го порядка) позволяют анализировать мелко-масштабные флуктуации и особенности высокого порядка, игнорируя при этом наиболее регулярные (полиномиальные) составляющие сигнала. В этом случае коэффициенты вейвлетного преобразования будут малы в областях, где функция имеет гладкость до порядка обращающихся в ноль моментов, и вейвлетное преобразование будет реагировать только на изменения функции высокого порядка. Действительно, раскладывая в вейвлетном преобразовании (17) функцию  $f(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_0$ , получим

$$W(s, t_0) = 1/s^{1/2} [f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*((t-t_0)/s) dt + f'(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0) \psi_0^*((t-t_0)/s) dt + \dots + f^{(n)}(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} (t-t_0)^n \psi_0^*((t-t_0)/s) dt + \dots] \quad (1.11)$$

В этом случае первые  $m$  слагаемых соотношения (1.11) в силу (1.10) обращаются в ноль, и существенное влияние оказывают изменения высоких порядков. Заметим, что для практических целей иногда оказывается достаточным, чтобы условие (1.10) выполнялось приблизительно.

Наконец, следует упомянуть еще **условие ограниченности**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.12)$$

В качестве оценки хорошей локализации и ограниченности могут служить соотношения  $|\psi_0(t)| < 1/(1+|t|^n)$  или  $|\hat{\psi}_0(\omega)| < 1/(1+|\omega-\omega_0|^n)$ , где  $\omega_0$  — доминантная частота вейвлета, а величина параметра  $n$  должна быть как можно больше [1].

В том случае, если условие допустимости (1.6) выполняется, существует обратное вейвлетное преобразование

$$f(t) = (1/C_\psi) \int_0^{+\infty} (1/s^{5/2}) ds \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0((t-t_0)/s) W(s, t_0) dt_0. \quad (1.13)$$

Конкретный выбор анализирующего материнского вейвлета определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждая базовая вейвлетная функция характеризуется различными свойствами, что позволяет, используя разные вейвлетные функции, выявить все особенности анализируемого сигнала  $f(t)$ .

Одним из наиболее часто используемых комплексных материнских вейвлетов является морлет-вейвлет [20]

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \exp(j\omega_0 \eta) \exp(-\eta^2/2), \quad (1.14)$$

где  $\omega_0$  — параметр вейвлета. Обычно рассматривается морлет-вейвлет с параметром  $\omega_0=6$ . Он обладает базисом, хорошо локализованным в реальном пространстве и фурье-пространстве. Причем с увеличением  $\omega_0$  растет разрешение

в фурье–пространстве, но ухудшается локализация во времени. Морлет–вейвлет фактически является аналогом Sin–вейвлета, рассмотренного во введении. Морлет–вейвлет представляет собой синусоидальную функцию, модулированную функцией Гаусса, а Sin–вейвлет – прямоугольным импульсом.

Другим комплексным вейвлетом является вейвлет Паула [21]

$$\psi_0(\eta) = \{2^m j^m m! / [\pi(2m!)]^{1/2}\} (1-j\eta)^{-m+1}, \quad (1.15)$$

где  $m$  – порядок вейвлета. В данной работе мы будем часто обращаться к вейвлету Паула порядка  $m=4$ .

В качестве действительных базовых вейвлетных функций широко используется семейство DOG–вейвлетов [22], которые конструируются на базе производных функции Гаусса,

$$\psi_0(\eta) = (-1)^{m+1} / [\Gamma(m+1/2)]^{1/2} d^m/d\eta^m \exp(-\eta^2/2). \quad (1.16)$$

Материнский вейвлет, соответствующий  $m=1$ , называется WAVE–вейвлетом;  $m=2$  – МНАТ–вейвлетом (Mexican Hat – «Мексиканская шляпа»).

Существуют и другие базовые вейвлетные функции, которые применяются для различных приложений. В работах [23–26] представлены другие примеры материнских вейвлетов, а также способы их конструирования.

По аналогии со спектром мощности Фурье преобразования  $P(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$  можно ввести в рассмотрение мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (1.17)$$

и интегральное распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0. \quad (1.18)$$

Интегральное распределение энергии по масштабам для вейвлетного преобразования связано с фурье–спектром мощности соотношением вида

$$\langle E(s) \rangle \sim s \int P(\omega) |\hat{\psi}_0(s\omega)|^2 d\omega. \quad (1.19)$$

Из соотношения (1.19) следует, что распределение энергии по масштабам  $\langle E(s) \rangle$  представляет собой сглаженный спектр мощности фурье–преобразования, причем характер сглаживания определяется фурье–образом материнского вейвлета  $\psi_0$ .

Как нами обсуждалось во введении, для получения точной информации о высокочастотных гармониках исследуемого сигнала с высокой разрешающей способностью во времени нам необходимо извлекать ее из коротких временных интервалов, а не из всего сигнала, в то время как, информацию о низкочастотной части спектра необходимо получать, анализируя достаточно длительные интервалы времени. На рис. 1.1 иллюстрируются возможности частотно–временной локализации различных преобразований. На рис. 1.1, а показана схема разбиения фазового пространства  $(t, \omega)$  для выборки дискретных значений сигнала, где в качестве базисной функции служит  $\delta$ –функция (преобразование Шеннона). В этом случае получаем, что сигнал оказывается хорошо локализован во времени и совершенно не разрешен по частоте. Из рис. 1.1, б, соответствующего преобразованию Фурье, видно, что мы имеем хорошее разрешение по частоте и не имеем локализации во времени. Рис. 1.1, в соответствует оконному преобразованию Фурье. Из рисунка понятно, что в данном случае временное

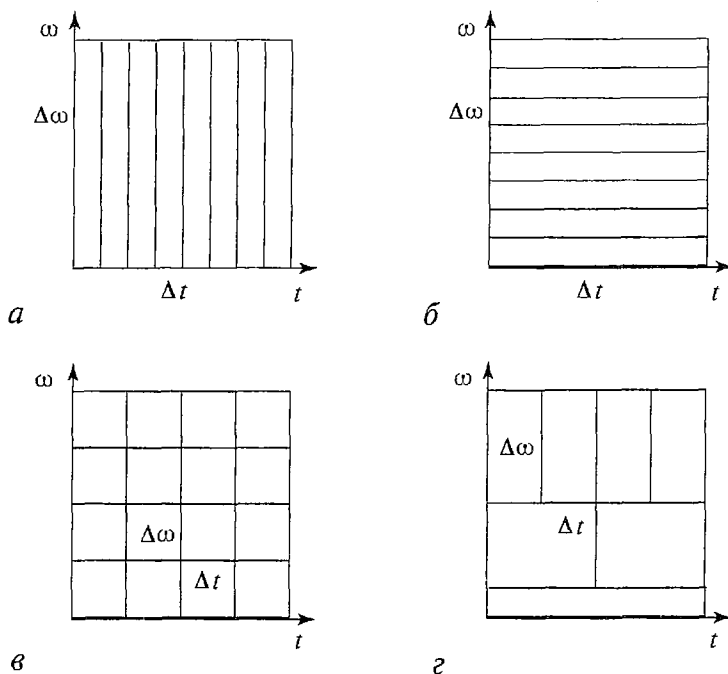


Рис. 1.1. Частотно–временная локализация в фазовом пространстве  $(t, \omega)$  для различных преобразований: *a* – дискретная выборка (преобразование Шенона), *б* – преобразование Фурье, *в* – оконное фурье–преобразование, *г* – вейвлетное преобразование

разрешение на больших и малых масштабах постоянно и определяется размером окна. В случае же вейвлетного преобразования базисные функции имеют уменьшающееся с увеличением масштаба  $s$  временное разрешение (определяемое шириной вейвлетной функции  $\psi(t/s)$ ) и увеличивающееся с масштабом разрешение по частоте (определяемое шириной фурье–образа вейвлетной функции  $\hat{\psi}(s\omega)$ ), что дает хорошую временную локализацию на малых масштабах и хорошее частотное разрешение при больших масштабах (рис. 1.1, г).

Основным свойством вейвлетного преобразования, принципиальным для анализа сложных нестационарных процессов, является способность сохранять локальность представления сигнала и, как следствие, локально реконструировать сигнал. Существует возможность выделить вклад определенного масштаба в тот или иной момент времени или реконструировать только часть сигнала. Фактически имеет место связь между локальным поведением сигнала и локальным поведением его вейвлет–коэффициентов. Под локальностью понимается то, что для реконструкции части сигнала необходимо рассматривать вейвлет–коэффициенты, относящиеся только к подобласти вейвлетного пространства (рис. 1.2, а), так называемого угла влияния. Заметим, что, в свою очередь, коэффициент  $W(s, t_0)$  в точке  $(t'_0, s')$  зависит от значений ряда из определяемого тем же углом влияния временного диапазона около значения  $t'_0$  (рис. 1.2, б). Диапазон этот тем больше, чем больше анализируемый масштаб  $s'$ , то есть высокочастотная (или, что то же самое, мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых по длительности отрезков сигнала, а низкочастотная – больших.

Например, если функция  $f(x)$  локально гладкая, то соответствующие вейвлет–коэффициенты остаются малыми. Если же  $f(x)$  содержит сингулярность, тогда в ее окрестности амплитуда вейвлет–коэффициентов существенно

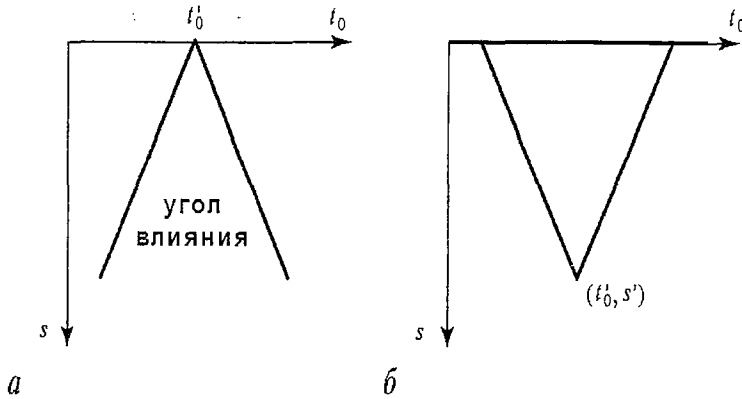


Рис. 1.2. Угол влияния вейвлетного преобразования

возрастает. Если вейвлет–коэффициенты подвержены случайным ошибкам, то они будут действовать на реконструируемый сигнал только локально вблизи возмущения, в то время как преобразование Фурье будет распространять ошибки по всему реконструируемому сигналу.

## 1.2. Численная реализация вейвлетного преобразования

Рассмотрим теперь численную реализацию процедуры вейвлетного преобразования какой-либо величины, ведущей себя нестационарным образом во времени. При численном анализе мы имеем дело с временной реализацией интересующей нас величины, заданной в дискретные моменты времени. Будем рассматривать случай, когда значения величины заданы через равные интервалы времени<sup>2</sup>. Тогда для проведения вейвлетного анализа мы располагаем временным рядом величины  $\{x\}$ , где каждое из значений  $x_n$  задано с одинаковым временным интервалом  $\Delta t$ ,  $n=0, \dots, N-1$ ,  $N$  – число отсчетов в нашем ряду.

Непрерывное вейвлетное преобразование некоторой дискретной последовательности  $\{x\}$  определяется как свертка этой последовательности  $\{x\}$  и базисной вейвлетной функции  $\psi(\eta)$  (1.1), которая соответствующим образом перенормируется с масштабом  $s$  и сдвигается по временной шкале на интервал  $n\Delta t$ ,

$$W(n,s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \psi^*((n'-n)\Delta t/s). \quad (1.20)$$

Тогда, изменяя масштабный коэффициент  $s$  и величину сдвига во времени вейвлетной функции  $n\Delta t$ , можно восстановить и локализовать динамику любых особенностей процесса  $\{x\}$  в пространстве масштабов  $s$ , то есть определить как мгновенную амплитуду колебаний на данном временном масштабе, так и особенности динамики каждого из масштабов с течением времени.

<sup>2</sup> Это наиболее типичный случай, встречающийся при анализе данных в приложениях теории колебаний и волн. Вместе с тем можно предположить ситуацию, когда данные могут задаваться в «случайные» моменты времени. Например, временная реализация, составленная из цен продажи акций на бирже с учетом не усредненных цен, а непосредственно стоимости каждой сделки, будет именно таким рядом, так как время совершения операции купли–продажи произвольно. Для таких рядов развитый здесь метод не может быть применен, и в этом случае необходимо пользоваться расчетом вейвлетного преобразования непосредственно, исходя из определения (см. формулу (1.1)).

Расчет вейвлетного преобразования с непосредственным использованием соотношения (1.20) не является оптимальным за исключением случая, упоминаемого в сноске 2. Процесс расчета может быть существенно ускорен (то есть может быть уменьшено число машинных операций, которые необходимо выполнить), если перейти от представления вейвлетного преобразования (1.20) к выражению его через фурье-образы исходного сигнала  $\hat{x}_k$  и вейвлетной функции  $\hat{\psi}$  [3,18].

Для записи непрерывного вейвлетного преобразования в фурье-пространстве процедура (1.20) должна быть проделана  $N$  раз для каждого значения масштаба  $s$ , где  $N$  – число точек временной реализации. Если предположить, что  $\{x\}$  – комплексная последовательность, а вейвлетная функция заранее вычислена во всем интересующем нас диапазоне значений<sup>3</sup>, то в этом случае требуется совершить  $\mathcal{L} \cdot 8N^3 + O(N)$  арифметических операций, здесь  $\mathcal{L}$  – число масштабов  $s$ , на которых осуществляется расчет выражения (1.20). Действительно, в каждой точке дискретного пространства  $(n,s)$ , размерность которого  $N \cdot \mathcal{L}$ , требуется в соответствии с (1.20) совершить  $N$  комплексных умножений (по 6 арифметических операций) и  $N-1$  комплексное сложение (2 арифметические операции).

Теорема о свертке позволяет нам при данном масштабе  $s$  одновременно найти все значения  $W(n,s)$  в фурье-представлении ( $0 < n < N-1$ ), используя дискретное преобразование Фурье. Для последовательности  $x_n$  дискретное преобразование Фурье выражается как

$$\hat{x}_k = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi jkn/N}, \quad (1.21)$$

где  $k \cdot \Delta t^{-1} = (0, \dots, (N-1)\Delta t^{-1})$  образует последовательность частот исходного сигнала  $x_n$ , заданного последовательностью  $N$  значений с временным интервалом  $\Delta t$ . Очевидно, что в пределе при использовании непрерывного фурье-преобразования функция  $\psi(t/s)$  будет иметь фурье-образ вида

$$\hat{\psi}(s\omega) = 1/(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t/s) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.22)$$

то есть перенормировка вейвлетной функции в фурье-пространстве учитывается умножением частоты на масштабный множитель  $s$ . Аналогичное выражение можно записать, применяя дискретное фурье-преобразование

$$\hat{\psi}(ks) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} \psi(n/s) e^{-2\pi jkn/N}, \quad (1.23)$$

но в случае, когда фурье-образ вейвлетной функции может быть найден аналитически, более естественна запись в виде (1.22).

Тогда в фурье-пространстве вейвлетное преобразование записывается как простое умножение фурье-образа сигнала  $\hat{x}$  на комплексно сопряженный фурье-образ вейвлетной функции  $\hat{\psi}^*$ , а выражение для вейвлетного преобразования  $W(n,s)$  может быть получено с помощью обратного фурье-преобразования

$$W(n,s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{\psi}^*(s\omega_k) e^{j\omega_k n \Delta t}, \quad (1.24)$$

<sup>3</sup> Предварительное вычисление вейвлетной функции уменьшает время расчета, что является важным, учитывая сложный вид вейвлетной функции. Но это одновременно, во-первых, требует интерполяции значений функции  $\psi$ , что снижает точность вычислений и также требует затрат машинного времени, и во-вторых, увеличивает объем необходимой машинной памяти.



где частота  $\omega_k$  дается выражением вида

$$\omega_k = \begin{cases} 2\pi k/(N\Delta t), & \text{при } k \leq N/2, \\ -2\pi k/(N\Delta t), & \text{при } k > N/2. \end{cases} \quad (1.25)$$

Тогда, учитывая выражение (1.24), можно одновременно для всех значений  $n$  найти непрерывное вейвлетное преобразование  $W(n,s)$  при данном масштабе  $s$ , применяя для нахождения сумм в уравнениях (1.21), (1.24) процедуру быстрого преобразования Фурье (БПФ). Как хорошо известно [27], применение процедуры БПФ требует для расчета сумм вида (1.21) или (1.24) всего  $N \log_2 N$  операций. Тогда для расчета вейвлетного преобразования  $W(n,s)$  по всем рассматриваемым

масштабам  $s$ , если не учитывать затраты на нахождение фурье-образа сигнала  $\hat{x}$  (его, очевидно, достаточно найти только один раз), требуется только  $\mathcal{L} \cdot N \log_2 N$  операций, что при больших  $N$  существенно меньше, чем при реализации вейвлетного преобразования непосредственно с использованием определения (1.20).

Вместе с тем, использование для вычисления вейвлетного преобразования представление сигнала и вейвлетной функции в фурье-пространстве, и, в частности, использование для ускорения расчетов процедуры БПФ, накладывает ряд требований на реализацию процедуры расчета. Рассмотрим эти требования более подробно.

**1.2.1. Нормировка вейвлетной функции.** Для корректного сравнения и анализа результатов вейвлетного преобразования временных реализаций различных сигналов и даже одного сигнала на различных масштабах  $s$  при использовании спектрального представления сигнала  $\hat{x}$  и базисной вейвлетной функции  $\hat{\psi}$  требуется осуществление процедуры нормализации функции  $\psi$  на каждом из масштабов  $s$ . Данная процедура сводится к получению единичной энергии на каждом масштабе

$$\hat{\psi}(s\omega_k) = [2\pi s/\Delta t]^{1/2} \hat{\psi}_0(s\omega_k). \quad (1.26)$$

Представление различных базовых вейвлетных функций  $\psi_0(\eta)$ , их фурье-образы и ряд других характеристик приведены в табл. 1.1 и, соответственно, на рис. 1.3. Постоянный множитель каждой из базисных вейвлетных функций выбран так, чтобы обеспечить выполнение условия нормировки, то есть получения единичной энергии,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_0(\omega)|^2 d\omega = 1. \quad (1.27)$$

Используя такую нормировку, на каждой шкале  $s$ , если учесть выражения (1.25) и (1.26), получаем

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\psi}(s\omega_k)|^2 = N, \quad (1.28)$$

где  $N$  – число отсчетов временной организации. Отсюда видно, что вейвлетное преобразование определяется амплитудой фурье-гармоник  $\hat{x}_k$ , и не зависит от соответствующих фурье-коэффициентов базисной вейвлетной функции.

При использовании для вычисления вейвлетного преобразования непосредственно выражения (1.20), учитывая определение фурье-преобразования и сравнивая с (1.26), нормализация вейвлетной функции для различных масштабов запишется как

$$\psi((n'-n)\Delta t/s) = (\Delta t/s)^{1/2} \hat{\psi}_0((n'-n)\Delta t/s), \quad (1.29)$$

где  $\psi_0(\eta)$  – вейвлетная функция, норма которой

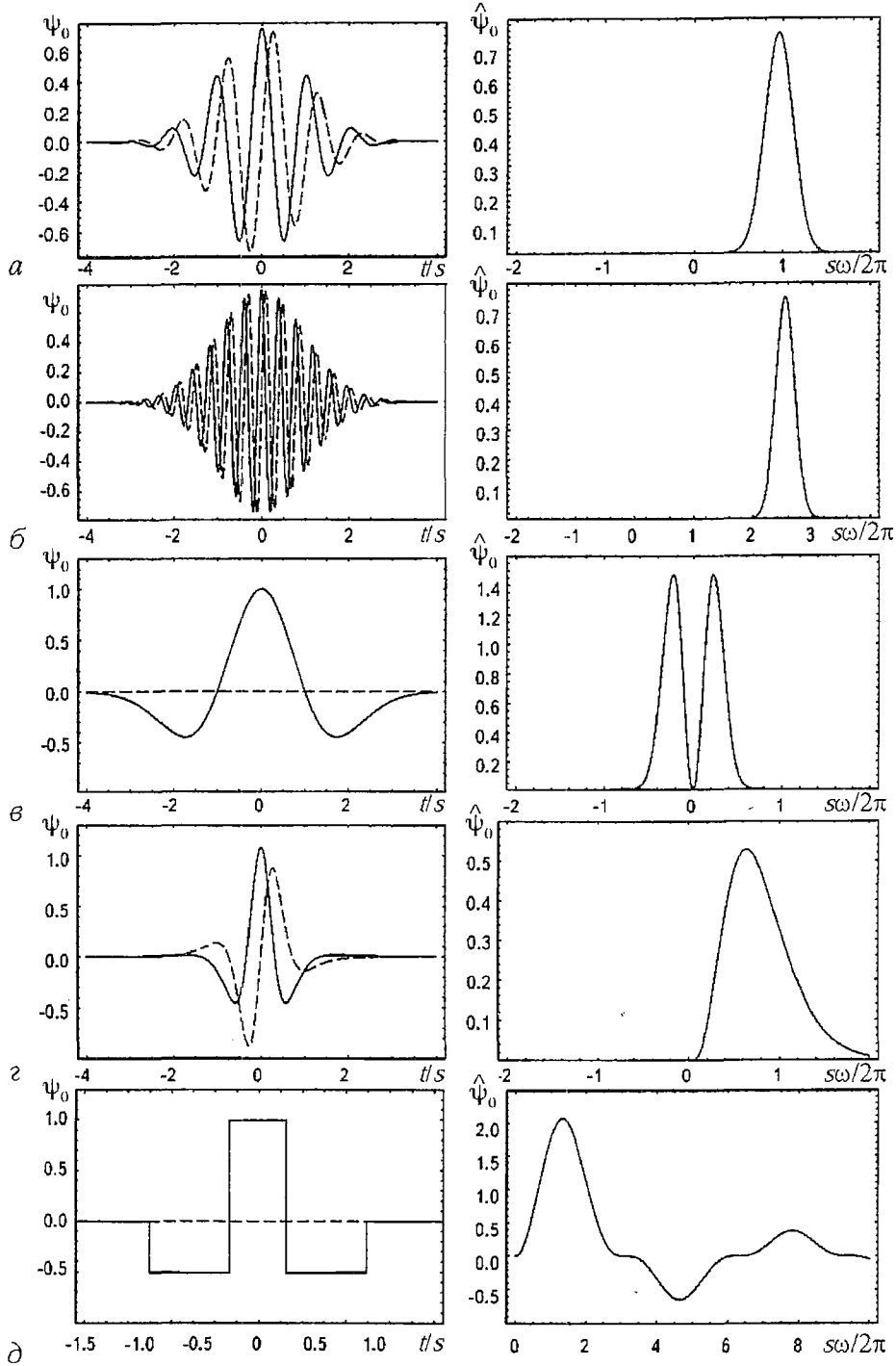


рис. 1.5. типы оазисных вейвлетных функции. на рисунке представлены действительные (сплошная линия) и мнимые (штриховая линия) части базисных вейвлетных функций (левый столбец) и их фурье-образы (правый столбец): а – морлет-вейвлет с  $\omega_0=6$ ; б – морлет-вейвлет с  $\omega_0=16$ ; в – МНАТ-вейвлет (DOG-вейвлет с  $m=2$ ); г – вейвлет Паула с  $m=4$ ; д – ФНАТ-вейвлет

Некоторые вейвлетные базисные функции и их свойства

Вейвлет	$\psi_0(\eta)$	$\hat{\psi}_0(s\omega)$	$\tau_s$	$\Lambda$
Морлет	$\pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$	$\pi^{-1/4} H(\omega) e^{(s\omega - \omega_0)^2/2}$	$2^{1/2} s$	$\frac{4\pi s}{\omega_0 + (2 + \omega_0^2)^{1/2}}$
DOG	$\frac{(-1)^{m+1}}{[\Gamma(m+1/2)]^{1/2}} \frac{d^m e^{-\eta^2/2}}{d\eta^m}$	$\frac{j^m}{[\Gamma(m+1/2)]^{1/2}} (s\omega)^m e^{-(s\omega)^2/2}$	$2^{1/2} s$	$\frac{2\pi s}{(m+1/2)^{1/2}}$
Паул	$\frac{2^m j^m m!}{[\pi(2m!)]^{1/2}} (1-j\eta)^{-(m+1)}$	$\frac{2^m}{[m(2m-1)]^{1/2}} H(\omega) (s\omega)^m e^{-s\omega}$	$2^{-1/2} s$	$\frac{4\pi s}{(2m+1)}$
НАТ	$1, \quad  \eta  < 1/3,$ $1/2, \quad 1/3 <  \eta  \leq 1,$ $0, \quad  \eta  > 1,$	$3H(s\omega) \left[ \frac{\sin s\omega}{s\omega} - \frac{\sin 3s\omega}{3s\omega} \right]$		$1.33s$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(\eta)|^2 d\eta = 1, \quad (1.30)$$

то есть вейвлетная функция  $\psi_0$  имеет единичную энергию.

**1.2.2. Выбор набора временных масштабов, по которому производится вейвлетное преобразование.** Важным аспектом расчета вейвлетного преобразования является выбор набора временных масштабов  $\{s\}$ , используемого при расчете поверхности  $W(n,s)$  (1.24).

При использовании в качестве базисной вейвлетной функции ортогонального вейвлета выбор множества масштабов  $\{s\}$  ограничен фиксированным конечным дискретным набором шкал [3].

Для неортогональных вейвлетных базисных функций набор  $\{s\}$  может быть выбран произвольно из соображений получения более полной информации для анализа поверхности  $W(n,s)$ . Наиболее удобным является запись набора масштабов  $s_l$  как степеней двойки

$$s_l = s_0 2^{l\Delta s}, \quad l = 0, \dots, L, \quad L = \log_2(N\Delta t/s_0)/\Delta s. \quad (1.31)$$

Здесь  $s_0$  – минимальный разрешаемый при вейвлетном преобразовании временной масштаб;  $s_L$  – наибольший масштаб, на котором производится анализ;  $L$  – число масштабов, используемых при расчете вейвлетного спектра. Минимальный масштаб  $s_0$  должен быть выбран таким, чтобы эквивалентный этому масштабу фурье–период был порядка  $2\Delta t$  (см. ниже). Оптимальный выбор величины  $\Delta s$  определяется в первую очередь шириной  $\hat{\Delta\psi}$  фурье–образа базисной вейвлетной функции  $\hat{\psi}$ . При выборе величины  $\Delta s$  большей, чем ширина  $\hat{\psi}$  в фурье–пространстве мы получим плохое разрешение вейвлетного преобразования по масштабам: часть масштабов окажется исключенной из рассмотрения. И

наоборот, выбор величины  $\Delta s \leq \hat{\psi}$ , благодаря конечной ширине вейвлетной функции в фурье-пространстве, практически не повысит «разрешающей способности» вейвлетного преобразования, а лишь увеличит необходимое время счета.

Например, для уже обсуждаемого морлет-вейвлета с  $\omega_0 = 6$  максимальное значение  $(\Delta s)_{\max}$ , которое обеспечивает приемлемое для практических целей разрешение, примерно равно 0.5. Для других базисных вейвлетных функций (например, паул-вейвлета) максимальное значение  $\Delta s$  может быть увеличено,  $\Delta s \approx 1.0$ . Очевидно, что выбор величин  $\Delta s < (\Delta s)_{\max}$  будет приводить к улучшению разрешения по временным масштабам вейвлетного преобразования.

**1.2.3. Длина временной реализации.** Применение для расчета вейвлетного преобразования в соответствии с соотношениями (1.24) и (1.24) процедуры БПФ накладывает ограничения на длину  $N$  анализируемой временной реализации  $x_n$ . Величина  $N$  для удовлетворения условиям процедуры должна обязательно являться степенью 2,  $N = 2^p$ .

Обычно получить временную реализацию с числом отсчетов, удовлетворяющих этому требованию, не составляет особых сложностей. Однако возможны ситуации, когда число доступных отсчетов временной реализации фиксировано и не может быть легко увеличено (например, климатические или геологические данные). Если длина такой временной реализации порядка (но несколько меньше)  $2^p$ , то свойства вейвлетного преобразования позволяют достаточно эффективно провести анализ такой реализации не по длине  $2^{p-1}$ , а по длине  $2^p$  путем формирования суррогатной временной реализации, в которой первые и последние  $(2^p - N)/2$  отсчетов заполнены постоянными величинами,

например, средними значениями исходной временной реализации  $\bar{x} = \sum x_n / N$  или нулями. В этом случае при вейвлетном анализе мы лишь получим соответствующее расширение области влияния краевых эффектов на вейвлетный спектр на плоскости  $(n, s)$  (см. следующий пункт).

**1.2.4. Область влияния краевых условий.** Осуществление вейвлетного преобразования конечной временной реализации приводит к тому, что вблизи границ вейвлет-спектра по оси абсцисс  $n$  ( $n=0$  и  $n=N-1$ ) появляются ошибки в расчетах функции  $W(n, s)$ , так как использование фурье-преобразования (1.24) предполагает, что данные  $(x)$  периодичны и имеют период длиной  $N$ . Качественно наличие области, в которой результаты расчета вейвлет-спектра неверны, может быть объяснено тем, что вейвлетная функция  $\psi((n'-n)\Delta t/s)$  на данном конкретном масштабе  $s$  при приближении к границе начинает выходить за пределы рабочей области, и расчет значений  $W(n, s)$  вблизи границ становится некорректным. Отсюда очевидно, что область влияния краевых эффектов должна сужаться с уменьшением временных масштабов  $s$ .

Одним из решений данной проблемы<sup>4</sup> [3,18] является создание новой временной реализации  $x'_n$  длиной  $2N$ , в которой первые  $N$  отсчетов соответствуют исходному сигналу  $x_n$ , а следующие  $N$  позиций начиная с  $n=N$  заполняются нулями. Вейвлетное преобразование (1.24) производится над новой суррогатной временной реализацией  $x'_n$ . Так как  $N=2^p$ , то при расчете получающихся в результате фурье-преобразования сумм можно опять воспользоваться процедурой БПФ, но теперь уже для работы с рядом длиной  $2^{p+1}$ . Такая методика уменьшает влияние краевых

<sup>4</sup> Существуют и другие методы понижения влияния краевых эффектов (см., например, [28]).

эффектов и одновременно является достаточно быстрой благодаря возможности использовать технику БПФ<sup>5</sup>.

Использование заполненной на половину нулями суррогатной временной реализации  $x'_n$  при вейвлетном анализе приводит к появлению сильной неоднородности на границах исходного временного ряда  $x_n$ . Однако благодаря тому, что суррогатный временной ряд наполовину заполнен постоянной во времени величиной (нулями), возмущения, вносимые этой неоднородностью, лежат в области очень больших временных масштабов, в то время как спектр исходной неоднородности (которая формально существенно меньше внесенной) лежал бы в области масштабов анализируемого сигнала. Так что внесение такой неоднородности приводит к уменьшению амплитуды  $W$  около границ исходного ряда. Очевидно, чем больше будет длина той части суррогатного ряда, которая заполнена нулями, тем меньше влияние краевых эффектов. Использование для анализа ряда, в котором длина последовательности нулей равна длине исходного сигнала, видимо, является оптимальной в смысле баланса скорости вычислений, затрат машинной памяти и точности осуществления вейвлетного преобразования вблизи границ исходного временного ряда.

Под областью влияния краевых условий будем понимать область вейвлет-спектра  $W(n,s)$  на плоскости  $(n,s)$ , где краевые эффекты становятся важными и ими уже нельзя пренебречь. Следуя работе Christopher Torrence и Gilbert Compo [3], определим область влияния краевых эффектов через эффективную ширину  $\tau_s$  автокорреляционной функции, рассчитанной по мощности вейвлетного преобразования, на каждом из временных масштабов  $s$ . Величина  $\tau_s$  выбирается так, что она соответствует такому смещению относительно границы, что мощность вейвлетного преобразования ряда с краевой неоднородностью спадает в логарифмической шкале в 2 раза<sup>6</sup>. Такой выбор границы области влияния краевых эффектов гарантирует нам, что краевые эффекты пренебрежимо малы уже на временах  $(N-n)dt > \tau_s$  и  $ndt > \tau_s$  на соответствующих масштабах  $s$ .

Заметим также, что размер  $\tau_s$  области влияния краевых эффектов оценивает характерное время влияния на форму вейвлетного спектра мощности единичного, большой амплитуды выброса (пика) на временной реализации процесса. Исследуя характерную ширину пика в спектре мощности вейвлетного преобразования, можно отличить «быстрый», большой амплитуды выброс на временной реализации (появление которого может быть связано, например, со случайными шумовыми процессами в исследуемой системе) от постоянной гармонической компоненты с эквивалентным фурье-периодом.

**1.2.5. Соотношение между масштабами вейвлетного преобразования и частотами гармонического анализа.** Из анализа рис. 1.3 видно, что максимум

фурье-образа базовой вейвлетной функции  $\hat{\psi}(s\omega)$  не приходится на частоту  $1/s$ , то есть в общем случае не существует равенства между длинами волн  $\Lambda$  фурье-преобразования и масштабами  $s$  вейвлетного анализа, причем для каждой базисной вейвлетной функции вид зависимости  $\Lambda(s)$  свой собственный (см. табл. 1.1). Используя приведенные данные можно проанализировать соотношение между фурье-периодом и масштабами вейвлетного преобразования различных типов вейвлетов. Так для морлет-вейвлета с частотой заполнения  $\omega_0=6$  имеем  $\Lambda=1.03s$

<sup>5</sup> Если  $N$  длина исходной временной реализации, требуется всего  $\mathcal{O}(2N(1+\log_2 N))$  арифметических операций для осуществления вейвлетного преобразования с использованием данной методики уменьшения влияния краевых эффектов.

<sup>6</sup> Это соответствует уменьшению мощности в линейной шкале в  $e^2$  раз.

или  $s \cong \Lambda$ , то есть в данном частном случае масштаб вейвлетного преобразования практически эквивалентен фурье–периоду.

Однако, уже для морлет–вейвлета с  $\omega_0=16$  масштабы соотносятся с длиной волны  $\Lambda$  как  $s=2.5527\Lambda$ . Для МНАТ–вейвлета фурье–период примерно в 4 раза больше, чем масштаб вейвлетного преобразования ( $s=0.2518\Lambda$ ), для вейвлета Паула с  $m=4$ , как несложно видеть,  $s=0.7166\Lambda$ . Очевидно, что вид этих соотношений не имеет глубокого физического смысла, но их надо обязательно учитывать при сравнении и анализе результатов фурье–преобразования и вейвлетного преобразования с различными базовыми вейвлетными функциями<sup>7</sup>.

Вид соотношений между величинами  $s$  и  $\Lambda$  может быть легко найден либо аналитически, путем подстановки в выражение (1.24) гармонической функции с известной частотой и вычислении соответствующего ей масштаба  $s$ , определяемого по максимуму спектра мощности вейвлетного преобразования, либо численно, с единственным отличием, что спектр мощности вейвлетного преобразования в этом случае рассчитывается по вышеизложенной методике.

Текст процедуры, осуществляющей вейвлетное преобразование, приведен в Приложении.

### 1.3. Применение вейвлетного преобразования к модельным сигналам

Вейвлетный спектр  $W(t_0, s) = |W(t_0, s)| \exp(-j\phi_W(t_0, s))$  одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации и представления этой информации могут быть различными. Обычно вместо изображения поверхностей пользуются представлением их в виде проекций на плоскость  $(t_0, s)$  с изолиниями или изоуровнями, позволяющими проследить изменение интенсивности амплитуды  $|W|$  и эволюцию фазы  $\phi_W$  вейвлетного преобразования на разных масштабах и во времени. Также достаточно информативными оказывается рассмотрение распределения энергии по масштабам  $E(s)$  (1.18).

На приведенных в работе иллюстрациях результатов применения вейвлетного преобразования интенсивность окраски на проекциях амплитуды вейвлетного преобразования пропорциональна абсолютной величине коэффициентов  $|W(t_0, s)|$ . На проекциях фазы вейвлетного преобразования интенсивность окраски строится так, что белый цвет соответствует фазе  $\phi_W=0$ , далее с ростом фазы окраска темнеет и достигает самого темного значения при  $\phi_W=\pi$ , а при дальнейшем увеличении фазы интенсивность окраски уменьшается и становится опять белой при  $\phi_W=2\pi$ . Такое построение интенсивности окраски в зависимости от величины  $\phi_W$  связано с тем, что фаза есть  $2\pi$ –периодическая функция, поэтому окраска точек  $(t_0, s)$  проекции, где фаза  $\phi_W(t_0, s)$  равна  $\phi_0+0$  и  $\phi_0+2\pi$  не должны различаться.

По вертикальной оси  $s$  (или  $f_s=1/s$ ) выбирается, если не оговаривается особо, логарифмический масштаб, который позволяет представить результаты вейвлетного преобразования в достаточно широком диапазоне масштабов.  $U$ –образная кривая на проекциях вейвлетных поверхностей выделяет область влияния краевых условий.

Рассмотрим применение непрерывного вейвлетного преобразования к ряду модельных сигналов, которые имеют особенности, встречающиеся в сигналах, характеризующих реальные процессы в нелинейных динамических системах.

<sup>7</sup> В первую очередь это касается спектров мощности, даваемых вейвлетными преобразованиями с различными видами базовой функции.

**1.3.1. Гармонический сигнал.** На рис. 1.4 показаны результаты применения вейвлетного преобразования с базовым морлет–вейвлетом с параметром  $\omega_0=6$ , с МНАТ–вейвлетом и с паул–вейвлетом к сигналу

$$f(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad t = n\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

Здесь частота  $f_0=5.0$ . Проекция поверхности амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования  $|W(t_0, s)|$  гармонического сигнала, построенного с помощью морлет–вейвлета, представляет собой неизменяющуюся с параметром  $t_0$  картину. Интегральное распределение энергии по масштабам  $f_s=1/s$  в данном случае имеет один максимум, который соответствует частоте  $f_s=f_0/1.03$ . Ширина распределения энергии по масштабам больше, чем ширина фурье–спектра мощности, что связано с меньшим разрешением вейвлетного преобразования по масштабам. Из рисунка видно, что вейвлетное преобразование (для примера, с морлет–вейвлетом ( $\omega_0=6$ )) не сможет различить на масштабах  $s \approx 0.2$  частоты, которые отличаются на величину  $\Delta f_s \approx 1.5$ . Данное значение  $\Delta f_s$  определяется по ширине зависимости  $\langle E(f_s) \rangle$  на половинном уровне мощности (см. рис. 1.4, в). Одновременно фурье–анализ позволяет разрешить частоту с существенно меньшим  $\Delta f$ . При этом важным моментом является то, что при увеличении длительности анализируемой временной реализации сигнала разрешение по частоте фурье–анализа будет возрастать, в то время как разрешение вейвлетного преобразования по масштабам останется неизменным, оно не зависит от длительности анализируемого ряда (числа характерных периодов анализируемой гармоник, укладывающихся на длине исследуемого временного ряда). В то же время разрешение вейвлетного преобразования по масштабам уменьшается с ростом частоты. Одновременно амплитуда спектральных составляющих сигнала линейно уменьшается с ростом частоты  $f_s$  (ср. с рис. 9, аналитически построенным для Син–вейвлета).

Сравнивая результаты вейвлетного преобразования гармонического сигнала с различными базовыми вейвлетами можно увидеть основные особенности каждого из них. Результаты вейвлетного преобразования, как видно из сравнения соответствующих проекций распределения амплитуды  $|W|$ , отличаются для разных базисных функций. Это требует различной интерпретации результатов в случае различных базисных функций  $\psi(\eta)$ . Видно, что разрешение по масштабам вейвлетного преобразования с МНАТ–вейвлетом существенно меньше, чем с паул–вейвлетом, которое имеет более плохое разрешение, чем морлет–вейвлет. В свою очередь, рост параметра  $\omega_0$  у морлет–вейвлета способствует увеличению разрешения вейвлетного преобразования по масштабам. С другой стороны, МНАТ–вейвлет позволяет получить более высокое разрешение особенностей сигнала во времени  $t$ . Аналогично преобразование с базовым морлет–вейвлетом «улучшает» свое разрешение во времени с уменьшением параметра  $\omega_0$ . Следует также обратить внимание на то, что соотношение расположения максимумов в распределениях энергии по масштабам с соответствующей частотой гармонического анализа для различных базисных вейвлетов отличается друг от друга. Как несложно увидеть, они соответствуют вышеприведенным соотношениям, связывающим масштабы  $\Lambda$  фурье–преобразования и масштабы  $s$  вейвлетного преобразования (см. стр. 24).

Рассмотрим теперь, как ведет себя фаза вейвлетного преобразования  $\varphi_W(t_0, s)$ . На рис. 1.5 показаны проекции распределения фаз коэффициентов вейвлетного преобразования синусоидального сигнала (1.32), построенные с базовым морлет–вейвлетом ( $\omega_0=6$ ) (рис. 1.5, а) и паул–вейвлетом (рис. 1.5, б). Из рисунка видно, что проекция поверхности фазы вейвлетного преобразования

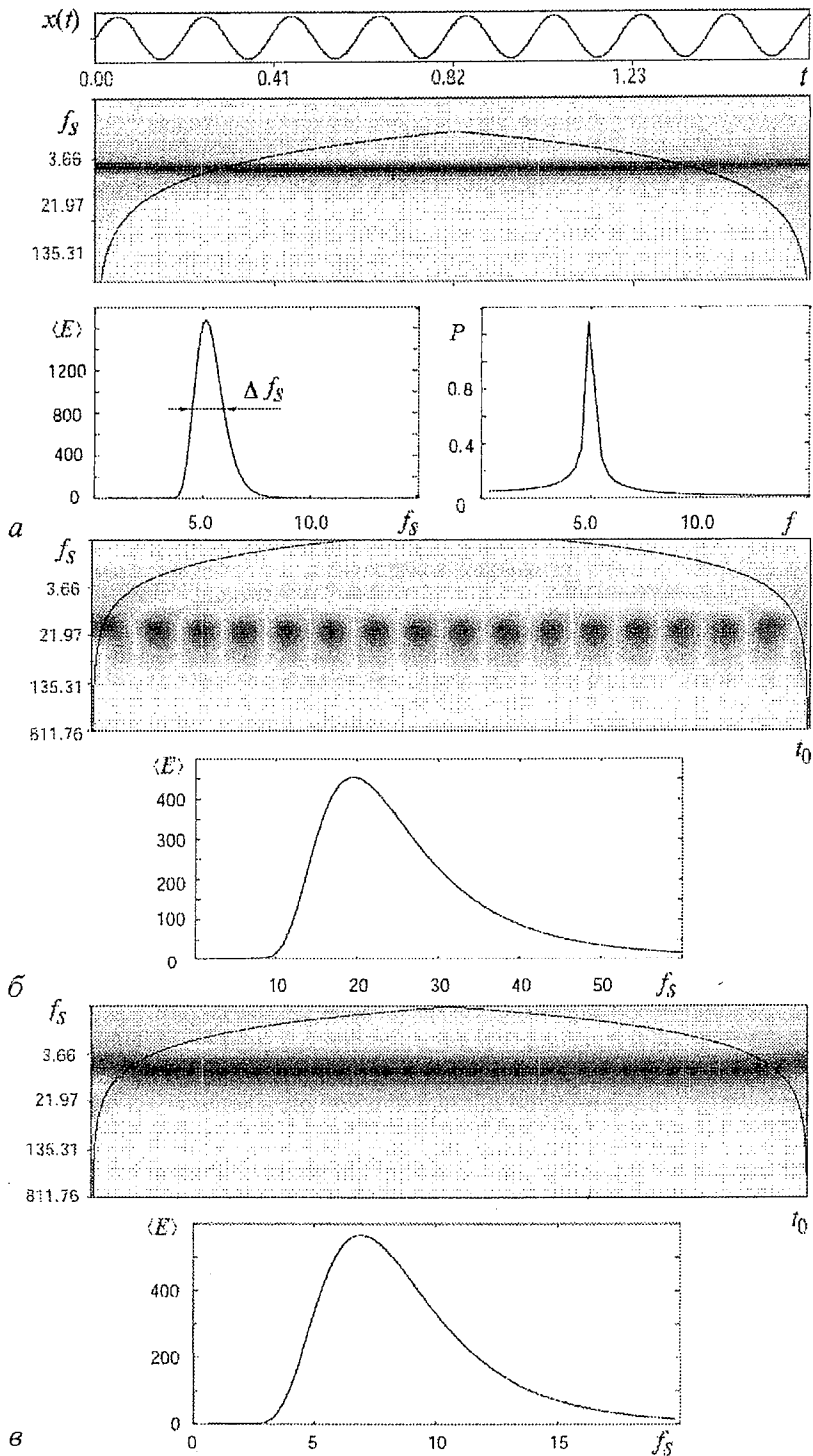


Рис. 1.4. *a* – временная реализация синусоидального сигнала, соответствующая проекция распределения амплитуды  $|W(t_0, s)|$  вейвлетного преобразования, интегральное распределение энергии по масштабам  $\langle E \rangle$ , полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ( $\omega_0=6$ ), а также приведенный для сравнения фурье-спектр мощности сигнала  $P(f)$ ; *б* – соответствующие характеристики вейвлетного преобразования с базисным МНАТ-вейвлетом; *в* – характеристики вейвлетного преобразования с базисным паул-вейвлетом. Длительность временной реализации  $N=16384=2^{14}$  отсчетов,  $\Delta t=0.0001$ , частота сигнала  $f=5.0$



$W(t_0, s)$  имеет в широком диапазоне масштабов, лежащих в окрестности частоты  $f_s \sim f_0 = 5.0$  сигнала, «полосатый» вид: фаза периодически меняется от 0 до  $2\pi$  с изменением временного сдвига  $t_0$  и практически не зависит от масштаба  $f_s$ . Картина меняется лишь при  $f_s < 0.6$  (область больших масштабов); что связано с влиянием краевых условий), и при  $f_s > 17$  (область очень малых масштабов), где амплитуда коэффициентов  $|W(t_0, f_s)|$  вейвлетного преобразования пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой коэффициентов в области  $f_s \approx f_0$ .

Заметим, что соответствующие распределения фазы, полученные с морлет-

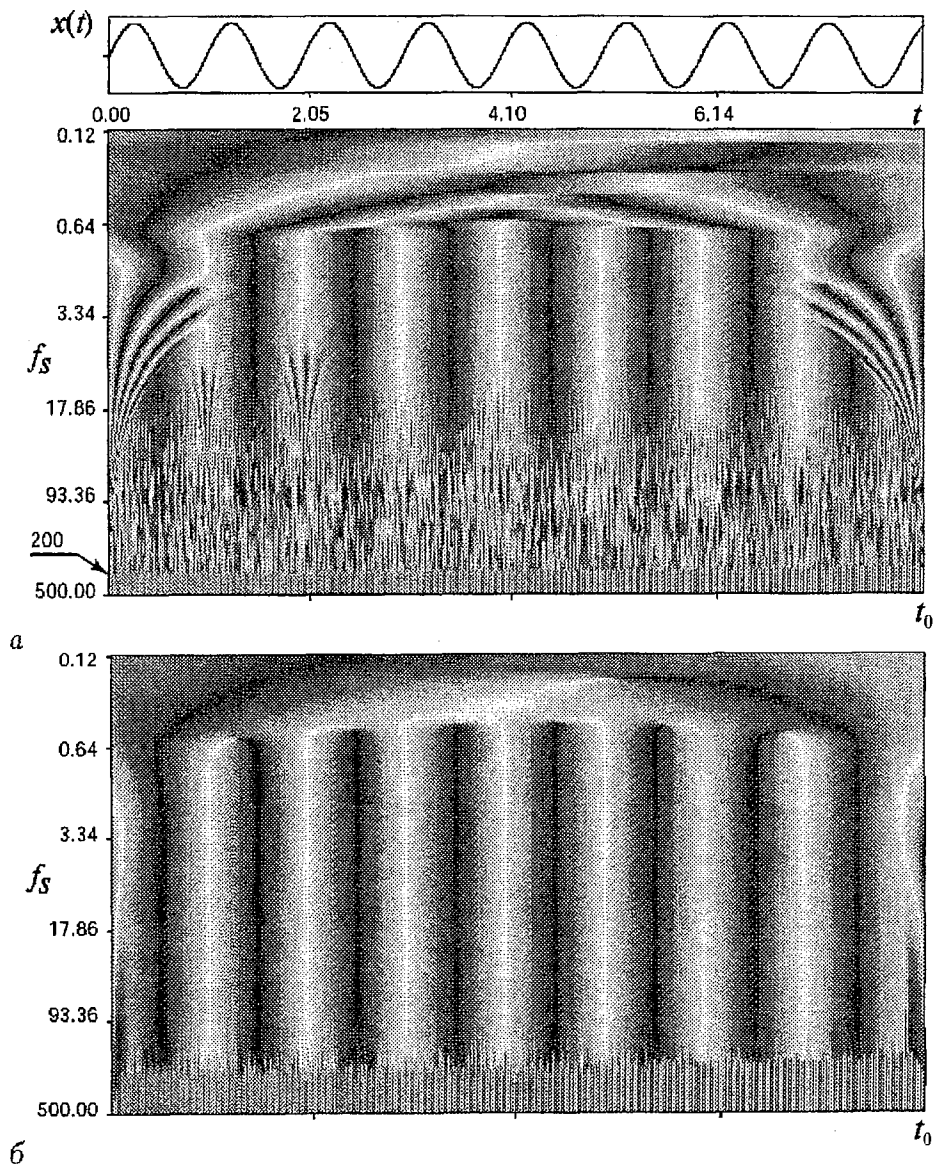


Рис. 1.5. Временная реализация синусоидального сигнала (1.32) и соответствующие проекции распределения фазы  $\varphi_W(t_0, s)$  вейвлетного преобразования, полученные с помощью: *a* – базисного морлет-вейвлета ( $\omega_0=6$ ); *б* – базисного паул-вейвлета;  $N=8192=2^{13}$  отсчетов,  $\Delta t=0.001$ , частота сигнала  $f=5.0$

и паул-вейвлетами<sup>8</sup>, качественно подобны: различия проявляются лишь в области малых масштабов.

Для анализа вышеприведенных данных обратимся к аналитическим результатам, полученным для вейвлетного преобразования функции вида (1.32) с базовым Sin-вейвлетом. Из формулы (9) следует, что фаза вейвлетного преобразования в этом случае дается соотношением

$$\varphi_w(t_0, s) = -\arctg[2\pi n/(\omega s)](1/(\omega t_0)). \quad (1.33)$$

На рис. 1.6 показана зависимость фазы от временного сдвига  $t_0$  и масштаба  $s$ , построенная для частоты сигнала  $\omega=1.5$  и параметра  $n=5$ . Видно, что фаза  $\varphi_w$  во всем диапазоне изменения масштаба  $s$  меняется почти периодически, причем длительность периода равна  $2\pi/\omega$ , что полностью совпадает с результатами расчета вейвлетного преобразования с базовыми морлет- и паул-вейвлетами (см. рис. 1.5)

Для сравнения приведем картину распределения амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования двухчастотного сигнала

$$f(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t), \quad (1.34)$$

где  $f_1=10, f_2=100$  (рис. 1.7). Видно, что на поверхности фазы четко выделяются две области – область, где период изменения фазы вейвлетного преобразования равен величине  $1/f_1$ , и область, где период равен  $1/f_2$ , причем между этими областями существует достаточно четкая граница.

Рассмотрим теперь другие особенности в распределениях фазы коэффициентов вейвлетного преобразования, представленных на рис. 1.5.

Прежде всего обратим внимание на близкую к регулярной структуру

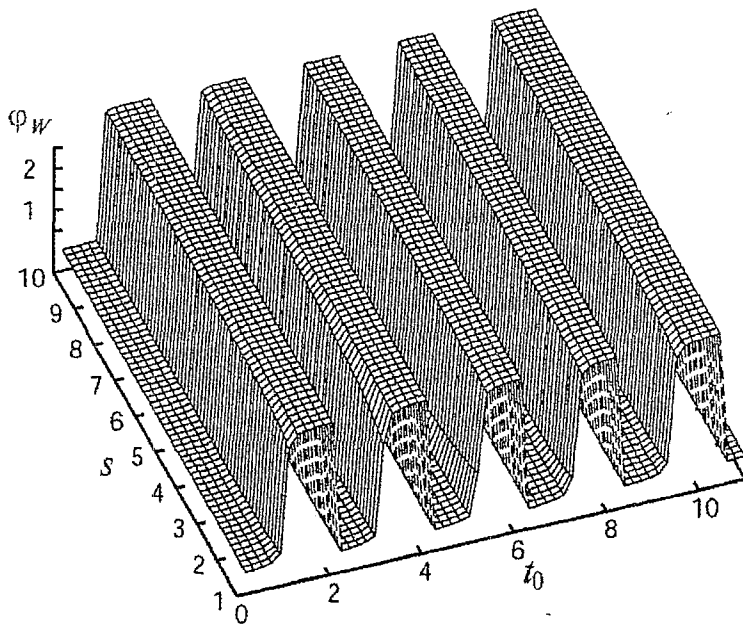


Рис. 1.6. Фаза вейвлетного преобразования синусоидального сигнала с базовым Sin-вейвлетом

<sup>8</sup> Для вейвлетного преобразования с базовым МНАТ-вейвлетом фаза  $\varphi_w=0$ , так как мнимая часть данного вейвлета тождественно равна нулю.

проекция распределения фаз, полученных как с базовым морлет-вейвлетом, так и паул-вейвлетом в области самых малых разрешаемых (при данной длине временной реализации и числе отсчетов  $N$ ) временных масштабов  $f_s > 200$  ( $s < 0.005$ ) (отмечено на рис. 1.5). Логично предположить, что такая структура поверхности связана с дискретизацией сигнала с шагом  $\Delta t = 0.001$  (длительность временной реализации  $t_{\max} = 8.192$ ,  $N = 8192$ ). Для проверки этого предположения было рассчитано вейвлетное преобразование (с базовым морлет-вейвлетом) сигнала с такой же длительностью  $t_{\max}$ , но шагом дискретизации  $\Delta t = 0.002$  в два раза большим и, следовательно, числом отсчетов  $N = 4096$ . Результаты расчета представлены на рис. 1.8. Видно, что данная характерная область проекции поверхности фазы сместилась в диапазон масштабов  $f_s > 100$  ( $s < 0.01$ ), то есть изменила свое положение ровно в два раза, что соответствует характеру изменения шага дискретизации. Полностью аналогичная картина наблюдается и в случае расчета с базовым вейвлетом Паула. Для экономии места соответствующая иллюстрация не приводится.

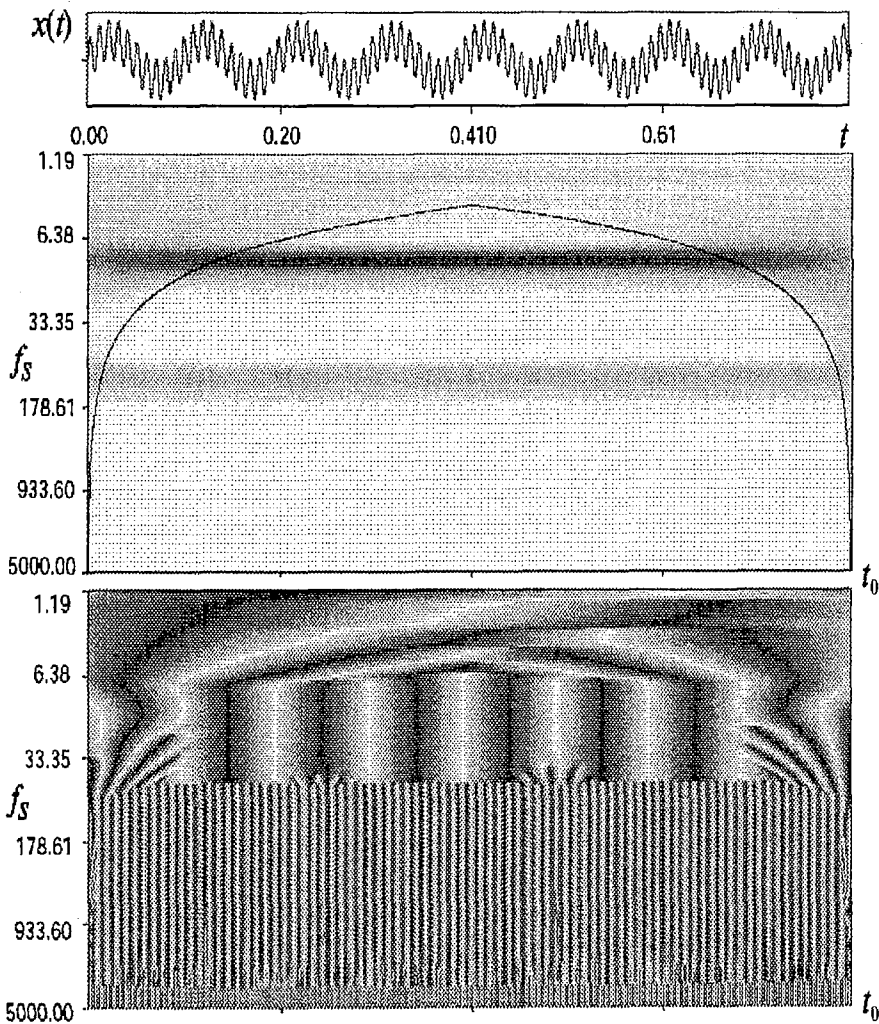


Рис. 1.7. Временная реализация сигнала (1.34) и соответствующие проекции распределения амплитуды  $|W(t_0, s)|$  и фазы  $\varphi_W(t_0, s)$  коэффициентов вейвлетного преобразования с базисным морлет-вейвлетом ( $\omega_0 = 6$ );  $N = 8192 = 2^{13}$ ,  $\Delta t = 0.0001$

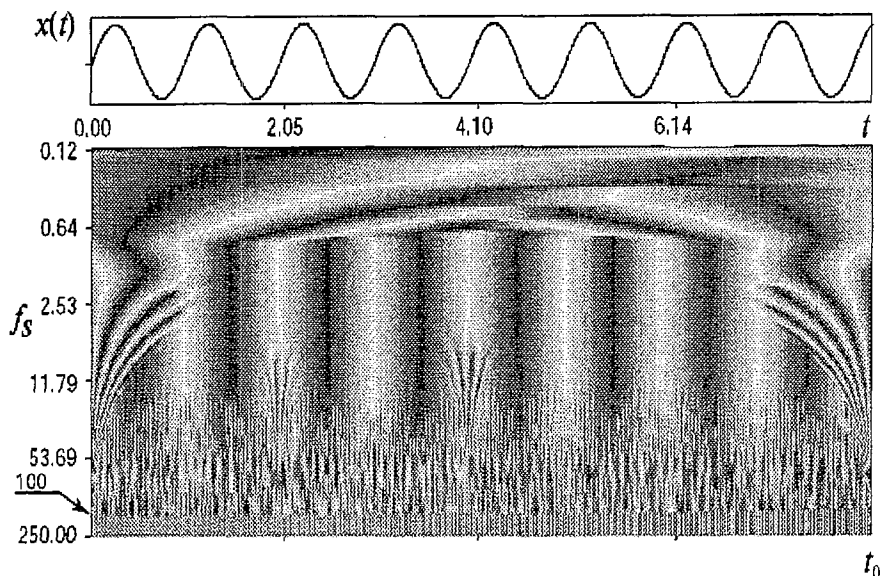


Рис. 1.8. Временная реализация синусоидального сигнала (1.32) и соответствующая проекция распределения фазы  $\varphi_w(t_0, s)$  вейвлетного преобразования, полученная с помощью базисного морлет-вейвлета ( $\omega_0=6$ ) с шагом дискретизации по времени в два раза большим, чем для сигнала, представленного на рис. 1.5;  $N=4096=2^{12}$ ,  $\Delta t=0.002$ , частота сигнала  $f=5.0$

Другой характерной особенностью вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом является наличие характерных «кустообразных» структур поверхности фаз  $\varphi_w$ , которые наблюдаются на рис. 1.5, а при  $t_0=2.05$  и  $t_0=4.10$ . Фактически данные характерные структуры могут быть интерпретированы как некоторые возмущения регулярного изменения фазы коэффициентов вейвлетного преобразования с увеличением значения  $t_0$  на самых различных масштабах  $f_s$ .

Что бы понять, с чем может быть связано появление такой структуры на поверхности, рассмотрим синусоидальный сигнал (1.32), в котором в какой-то момент времени введен скачок фазы  $\Delta\phi$ . Результаты вейвлетного преобразования такого тестового сигнала с различными базовыми вейвлетами приведены на рис. 1.9. Величина резкого изменения фазы  $\Delta\phi=\pi/3$ . В момент скачка фазы сигнала на проекции поверхности распределения фазы коэффициентов вейвлетного преобразования (см. рис. 1.9, а) появляется вышеописанная характерная «кустообразная» структура. Очевидно, что она связана с теми или иными вариациями фазы анализируемого сигнала. Видно, что размер особенности на поверхности вдоль оси  $t_0$  увеличивается с рассмотрением все больших масштабов  $s$ . Это связано с тем, что базисная вейвлетная функция (в данном случае морлет-вейвлет ( $\omega_0=6$ ) с сильно осциллирующими «хвостами») при рассмотрении все больших временных масштабов  $s$  масштабируется линейно с ростом  $s$ . Поэтому при приближении к моменту скачка фаз коэффициенты вейвлетного преобразования начинают тем раньше нести в себе информацию о сдвиге фаз на временной реализации сигнала, чем на большем масштабе осуществляется анализ исследуемого сигнала.

Этим же объясняется появление таких структур на границах исследуемого ряда (см. рис. 1.5): когда соответствующим образом масштабируемая и сдвигаемая во времени базовая вейвлетная функция начинает выходить за границу, то в коэффициентах вейвлетного преобразования появляется информация об этой неоднородности.

В случае вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Паула ситуация несколько другая (см. рис. 1.9, б). Это связано с тем, что паул-вейвлет неосцилли-

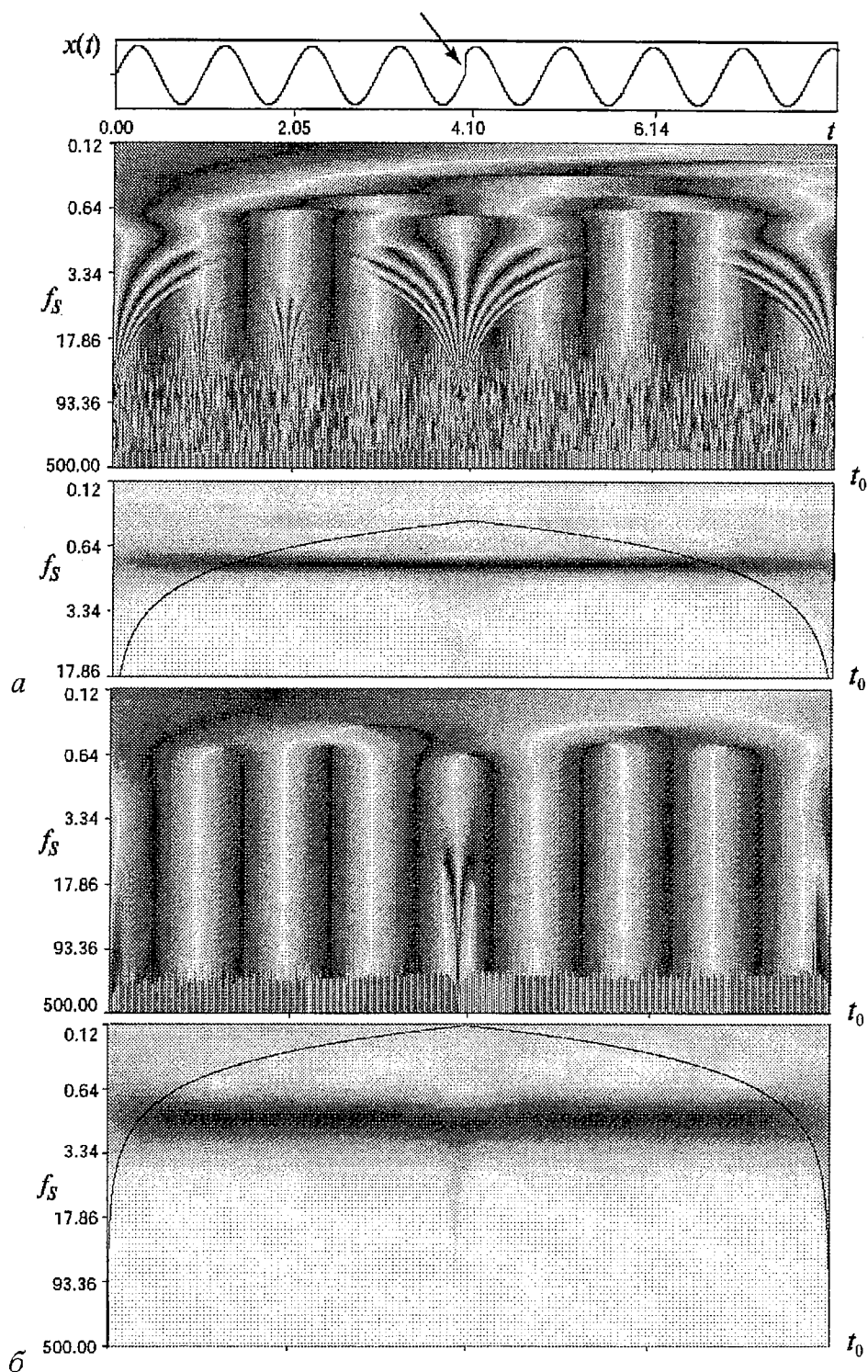


Рис. 1.9. Результаты вейвлетного преобразования синусоидального сигнала с мгновенным скачком фазы (отмечен стрелкой на временной реализации), полученные с помощью: *a* – базисного морлет-вейвлета ( $\omega_0=6$ ); *б* – базисного паул-вейвлета. Сверху каждого из рисунков показана временная реализация сигнала, далее демонстрируется распределение фаз и внизу – распределение амплитуд вейвлетного преобразования;  $N=8192=2^{13}$ ,  $\Delta t=0.001$ , частота сигнала  $f=5.0$

рующая функция, поэтому информация о скачке фазы содержится только в коэффициентах вейвлетного преобразования, координата  $t_0$  которых близка к моменту скачка (см. рис. 1.2). То есть, данная особенность на вейвлетной поверхности существенно более локализована во времени, чем в случае преобразования с базовым морлет-вейвлетом.

На рис. 1.10 демонстрируется проекция амплитуды коэффициентов  $|W(t_0, s)|$ , а на рис. 1.11 – мгновенные распределения энергии по масштабам  $E(f_s)$  вейвлетного преобразования сигнала, в котором одна гармоника сменяет другую в некоторый момент времени (частота сигнала скачком увеличивается в три раза). Вейвлетное преобразование осуществлялось с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega_0=16$ ). Из рисунков видно, что модуль вейвлетного преобразования  $|W(t_0, s)|$  позволяет определить как частоту (мгновенную) сигнала, так и момент времени, когда произошло изменение (ср. с рис. 4, на котором представлены результаты анализа аналогичного сигнала с помощью оконного фурье-преобразования). Таким образом, несмотря на то, что разрешение по частоте вейвлетного преобразования

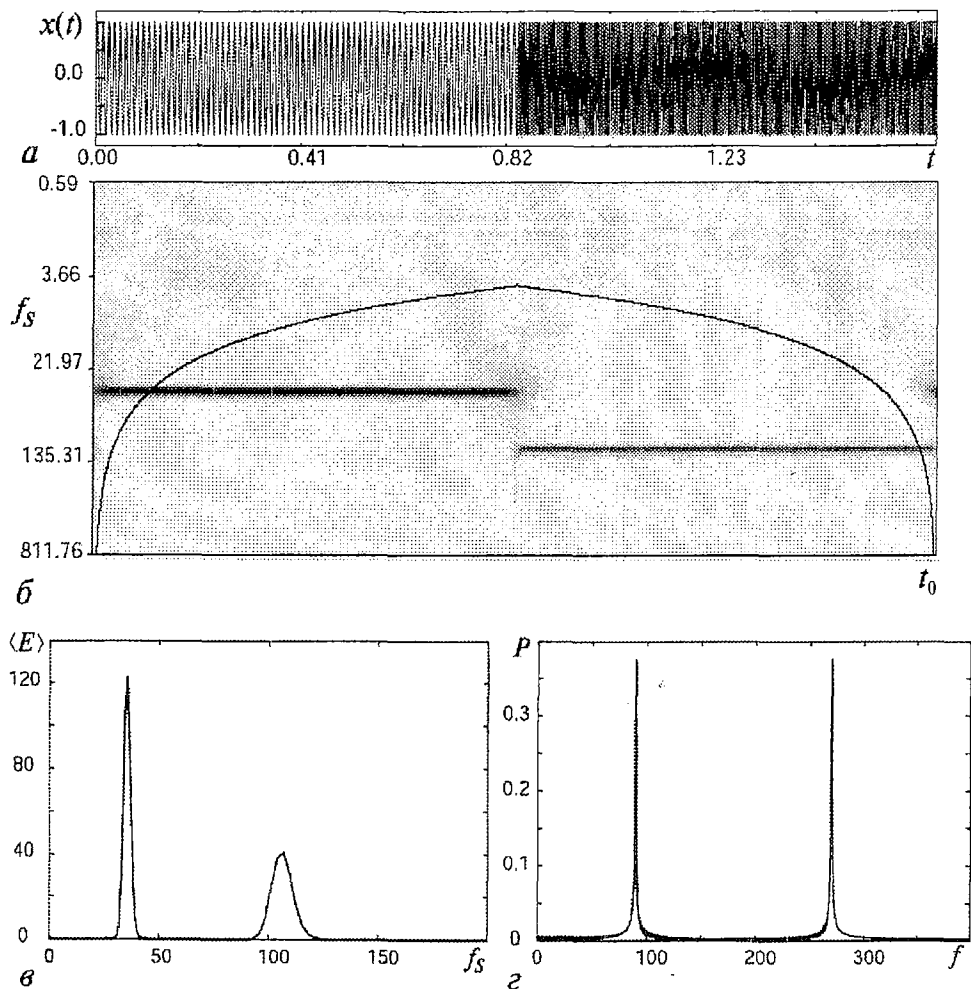


Рис. 1.10. а – временная реализация сигнала с изменяющейся скачком частотой; б – проекция распределения амплитуды  $|W(t_0, s)|$  вейвлетного преобразования; в – распределение энергии по масштабам, полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ( $\omega_0=16$ ); г – фурье-спектр мощности данного сигнала (приведен для сравнения);  $N=16384=2^{14}$ ,  $\Delta t=0.0001$ , частота сигнала изменяется скачком с величины  $f_0=90.0$  до величины  $3f_0$

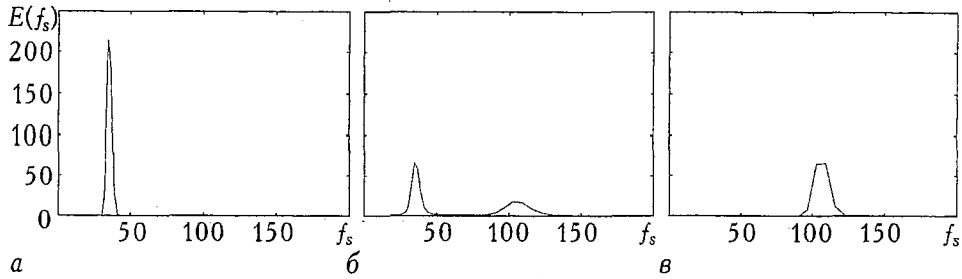


Рис. 1.11. Мгновенные распределения энергии вейвлетного преобразования для сигнала с изменяющейся скачком частотой (см. рис. 1.10) для моментов времени  $t$ :  $a - 0.2$  (в сигнале присутствует только одна частота);  $b - 0.41$  (момент времени, когда происходит скачок частоты);  $c - 0.6$  (момент времени после скачка частоты)

существенно меньше, чем фурье-преобразования (ср. ширину пиков в распределении энергии по масштабам вейвлетного преобразования и в фурье-спектре мощности), вейвлетное преобразование может быть эффективно использовано для выделения временных интервалов существования тех или иных гармоник в сложных сигналах.

**1.3.2. Последовательность прямоугольных импульсов.** Рассмотрим результаты вейвлетного преобразования с базовыми вейвлетами Морлета и Паула сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов со скважностью 2 (рис. 1.12). Спектр мощности такого сигнала представлен на рис. 1.13. Из рассмотрения проекции распределения амплитуд коэффициентов  $|W|$  (рис. 1.14) можно сделать вывод, что для обеих базисных вейвлетных функций вейвлетное преобразование «замечает» основной масштаб сигнала, соответствующий первой гармонике в спектре фурье-преобразования, а для морлет-вейвлета – еще и масштаб, численно равный периоду второй гармоники, что хорошо видно на рис. 1.14,  $a$ . Также в моменты времени, соответствующие скачкам амплитуды сигнала (началу/концу прямоугольного импульса) на поверхности, соответствующей анализу с материнским вейвлетом Паула, наблюдается всплеск амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования, имеющих высокие частоты  $f_s$  (см. рис. 1.12,  $b$ ). Это связано с тем, что для разложения исследуемого сигнала в ряд по базовым вейвлетным функциям, локальным во времени, в точках, где имеет место сингулярность (разрыв производной сигнала), необходимо существенно больше гармоник для корректного описания исходной функции, чем в точках, где исследуемый сигнал ведет себя непрерывным образом.

Фаза коэффициентов вейвлетного преобразования ведет себя существенно более сложным образом, чем в предыдущем случае. Из проекций распределения фаз  $\varphi_w$  хорошо видно, что на такой проекции четко выделяется основная частота сигнала, а далее распределение становится достаточно сложным – оно представляет собой интерференционную картину, которая возникает как результат суммирования фаз большого числа локальных базисных функций на различных характерных масштабах сигнала. Более «бедная» картина распределения фаз вейвлетного преобразования с базовым паул-вейвлетом объясняется теми же причинами, что были названы при анализе сигнала с резким изменением фазы.

Заметим также, что именно на распределении фаз коэффициентов вейвлетного преобразования можно точно выделить местоположение в сигнале особенностей – в нашем конкретном случае, момента времени, когда производная сигнала  $x(t)$  претерпевает разрыв.

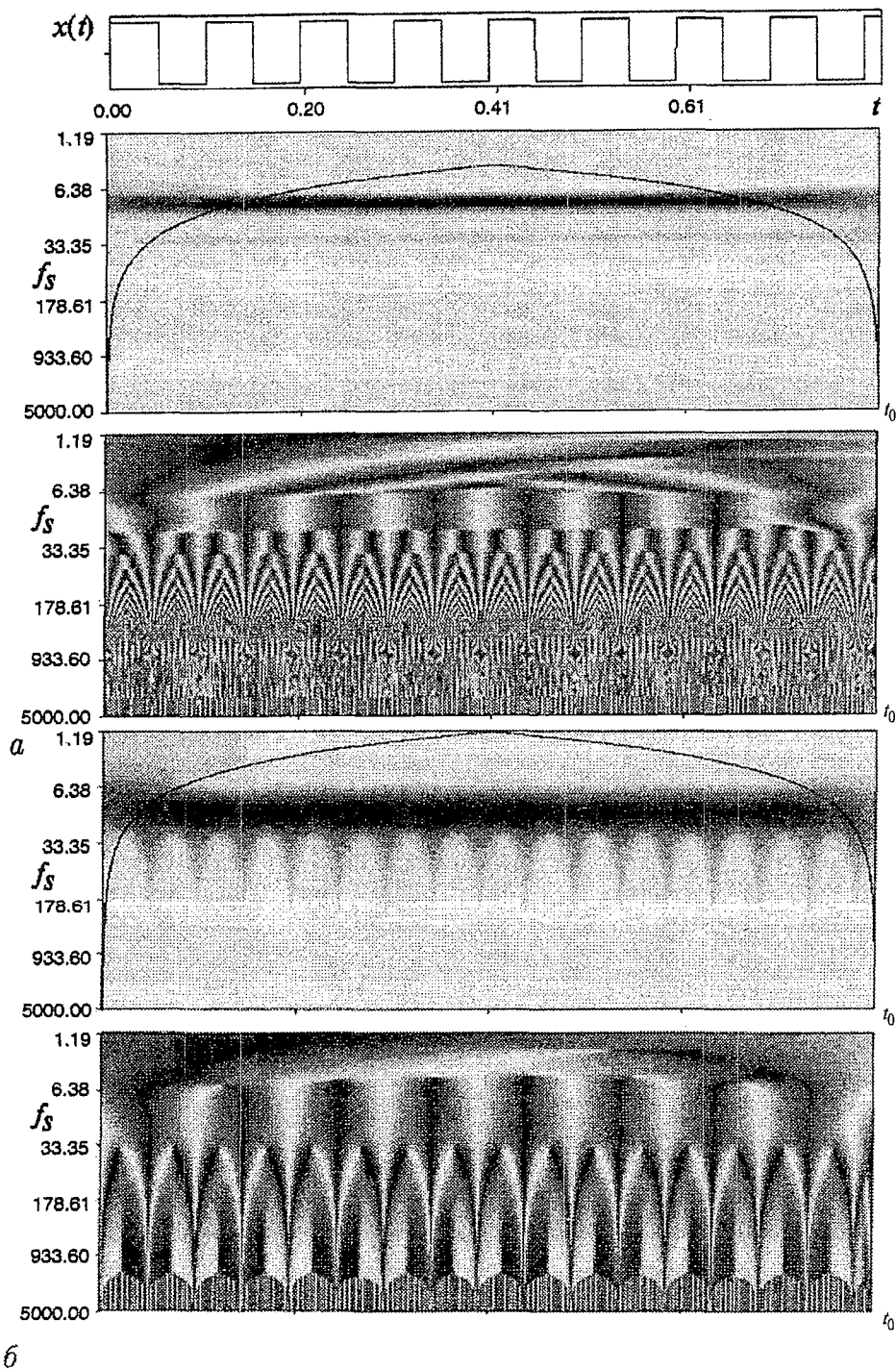


Рис. 1. 12. Вид временной реализации сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов; проекции распределения амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования с базовыми вейвлетами: *a* – Морлета и *б* – Паула;  $N=12^{13}$ ,  $\Delta t=0.0001$

**1.3.3. Амплитудно-модулированный сигнал.** На рис. 1.15 демонстрируются результаты применения вейвлетного преобразования к амплитудно-модулированному сигналу



$$f(t) = [1 + m\sin(2\pi f_m t)]\sin(2\pi f_0 t), \quad (1.35)$$

где  $f_0=40$ ,  $f_m=8$  и глубина модуляции  $m=0.25$ . Видно, что спектр вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega_0=6$ ) может быть интерпретирован как сигнал с частотой  $f_s=f_0$ , который с периодом  $1/f_m$  увеличивает (уменьшает) свою амплитуду. Мгновенные распределения энергии по масштабам, представленные на том же рисунке и соответствующие моментам, когда на вейвлетной поверхности вдоль линии  $f_s=f_0$  достигается максимум (сплошная линия) и минимум (пунктир-

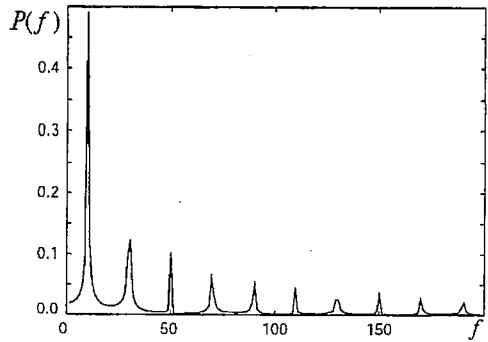


Рис. 1.13. Спектр мощности сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 1.12)

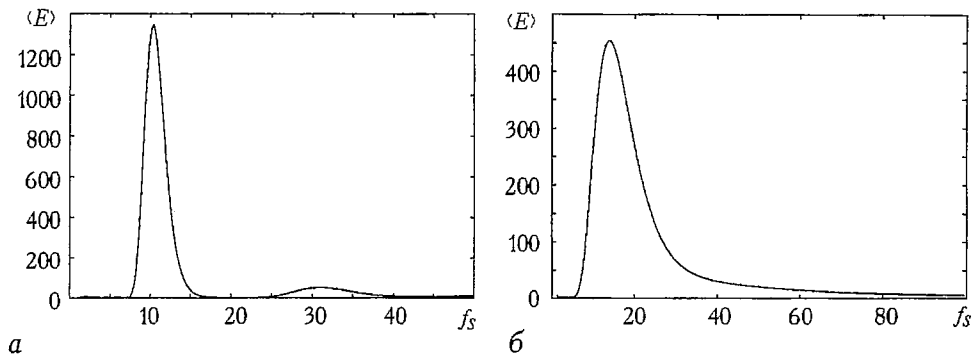


Рис. 1.14. Распределения энергии по масштабам сигнала, представляющего собой последовательность прямоугольных импульсов, полученные в результате вейвлетного преобразования с базовыми вейвлетами: а – Морлета и б – Паула

ная линия), показывают, что энергия сигнала содержится все время в одном масштабе  $s=1/f_0$ . Одновременно видно, что с периодом  $1/f_m$  происходит изменение интенсивности данного масштаба, а также изменение ширины распределения  $E(f_s)$ . Классический фурье-спектр амплитудно-модулированного сигнала также приведен на рисунке: он содержит основную частоту  $f_0$  и два сателлита, отстоящих от него на частоту  $f_m$ .

Однако с уменьшением отношения  $f_0/f_m$  и увеличением глубины модуляции  $m$  ситуация меняется. На рис. 1.16 показаны результаты вейвлетного преобразования сигнала (1.35) с параметрами  $f_0=80$ ,  $f_m=50$  и  $m=2$ . В данном случае вейвлетное преобразование просто показывает наличие в сигнале трех временных масштабов  $1/(f_0-f_m)$ ,  $1/f_0$  и  $1/(f_0+f_m)$ , динамика которых не изменяется с течением времени. Интегральное распределение энергии по масштабам также обнаруживает наличие трех временных масштабов. На рис. 1.16 оно представлено в нормированном виде  $\langle E \rangle / s^2$ . В фурье-спектре мощности присутствуют три гармоники с примерно одинаковыми амплитудами. В результате вейвлетного преобразования сигнала с гармониками различных частот, но одинаковых амплитуд выделяются масштабы, амплитуда которых, как было показано выше (см. соотношение (10)), обратно пропорциональна частоте сигнала. Поэтому для сравнения распределения энергии по масштабам вейвлетного преобразования с фурье-спектром имеет смысл рассматривать зависимость  $\langle E(f_s) \rangle$  в нормированном виде. Тогда вейвлетный спектр, как и фурье-спектр, демонстрирует наличие в сигнале гармоник с одинаковой амплитудой (см. рис. 1.16).

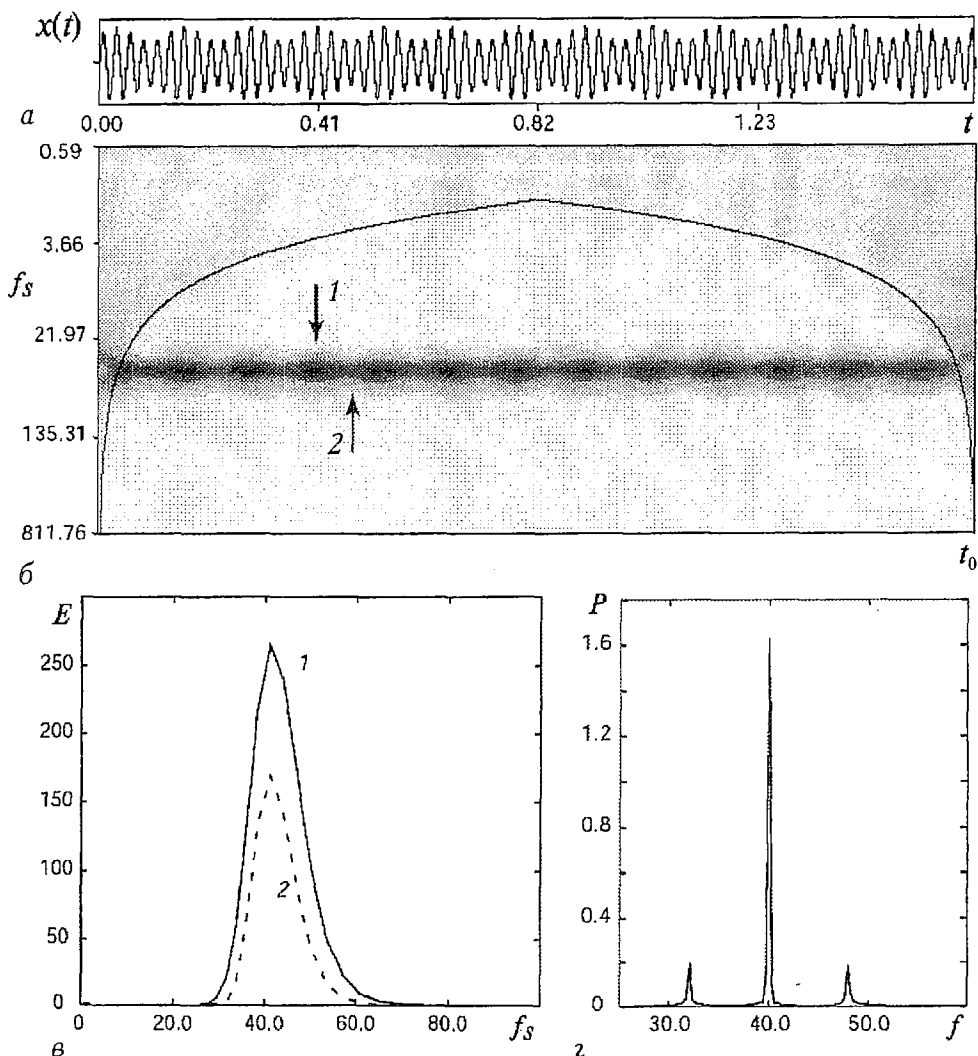


Рис. 1.15. *a* – временная реализация амплитудно-модулированного сигнала, *б* – вейвлетная поверхность, *в* – мгновенные распределения энергии по масштабам, полученные с помощью базисного морлет-вейвлета ( $\omega_0=6$ ). Сплошная линия отвечает распределению  $E(f_s)$  при значении  $t_0$ , соответствующему максимуму вейвлетной поверхности (более темной области на проекции, отмеченной стрелкой 1 на рис. б), пунктирная – минимуму вейвлетной поверхности (более светлой области вдоль линии  $f_s=f_0$ , помечено стрелкой 2 на рис. б);  $N=16384=2^{14}$ ,  $\Delta t=0.0001$

**1.3.4. Сигнал с изменяющейся частотой.** Рассмотрим теперь, что может дать вейвлетное преобразование для сигналов у которого спектральный состав изменяется непрерывно во времени. И для примера проанализируем синусоидальный сигнал, у которого частота изменяется линейно с течением времени:  $f(t)=\sin(2\pi f_0 t^2)$ , где  $f_0=50$ . На рис. 1.17 приведены результаты вейвлетного преобразования такого сигнала с применением базового морлет-вейвлета ( $\omega_0=16$ ). Из рассмотрения проекции вейвлетной поверхности вне области влияния граничных условий видно, что вейвлетное преобразование четко демонстрирует линейное изменение частоты сигнала:  $f_{зфф}=f_0 t$ . Отличие зависимости расположения максимума (темная область) на вейвлетной поверхности от линейной функции объясняется тем, что по оси  $f_s$  значения частот откладываются в логарифмическом масштабе. Интегральное распределение энергии по масштабам  $\langle E \rangle$  (сплошная линия на рисунке) близко к соответствующему фурье-спектру мощности. В то же

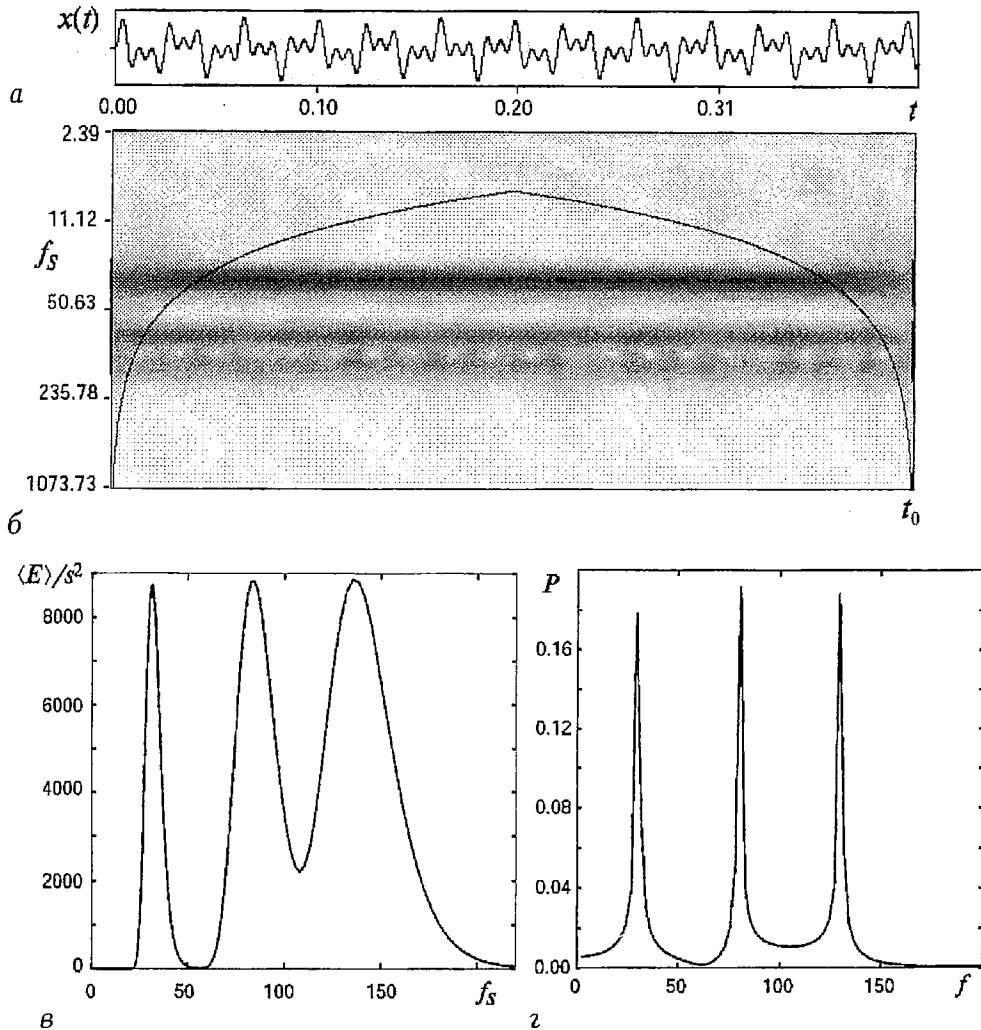


Рис. 1.16. Характеристики вейвлетного преобразования с базовым морлет–вейвлетом ( $\omega_0=6$ ) амплитудно-модулированного сигнала с  $f_0/f_m \sim 1$  и глубиной модуляции  $m=2$ : а – временная реализация сигнала; б – проекция поверхности амплитуд коэффициентов вейвлетного преобразования; в – распределение энергии по масштабам  $\langle E(f_s) \rangle$ , нормированное на величину масштаба  $s^2$ ; г – фурье-спектр мощности сигнала;  $N=12^{12}$  отсчетов,  $\Delta t=0.0001$

самое время мгновенные распределения энергии по масштабам отчетливо фиксируют мгновенную частоту сигнала (см. штриховые линии, соответствующие моментам времени  $t=0.79$  и  $t=1.21$ ). Осцилляции в области больших временных масштабов на распределении по энергии (отмечены стрелкой на рисунке) соответствуют области влияния краевых условий, относятся к численным эффектам и поэтому не имеют физического смысла.

Отличие абсолютных величин по осям  $f_s$  и  $f$  для распределения по энергиям обуславливается вышеописанным (см. п. 1.2.5) соотношением между масштабами вейвлетного преобразования  $f_s$  и частотами гармонического анализа. Для морлет–вейвлета ( $\omega_0=16$ ) имеем  $f=2.5527f_s$ .

**1.3.5. Южное Колебание – Эль-Ниньо.** Южное Колебание – крупномасштабный атмосферный процесс, развивающийся над акваторией Тихого океана [1]. Явление Эль-Ниньо – это потепление океанических вод вблизи тихоокеанского

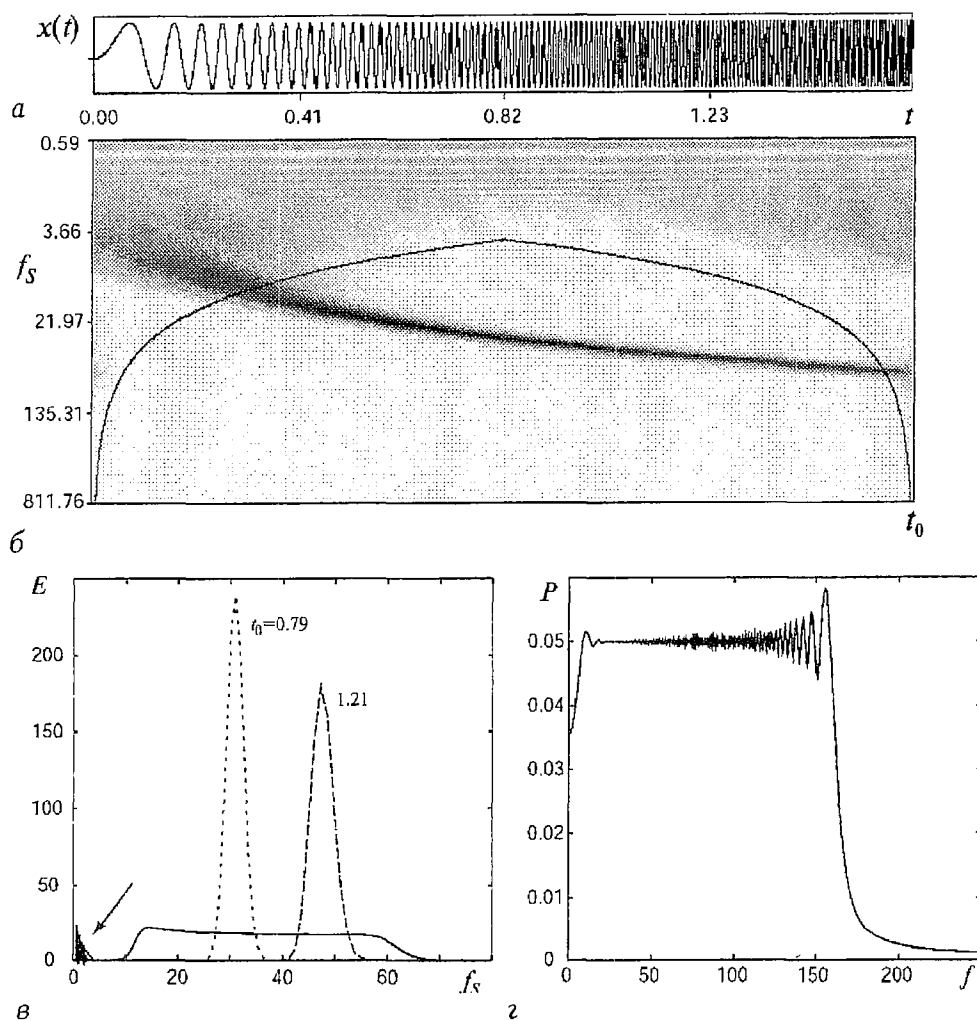


Рис. 1.17. Характеристики вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega_0=16$ ) для сигнала с линейным изменением частоты. Сплошная линия на распределении по масштабу  $E(f_s)$  соответствует интегральному распределению, штриховые линии – мгновенным распределениям в моменты времени, указанные непосредственно на рисунке;  $N=12^{14}$ ,  $\Delta t=0.0001$

побережья Центральной Америки. Оно, как предполагается, во многом определяется Южным Колебанием. Особый интерес к этим явлениям связан с заметным влиянием их на динамику климата всей планеты. Исследование данного явления, в том числе и с помощью вейвлетного анализа, является достаточно традиционным и хорошо изученным (см., например, работы [1, 29]), поэтому мы рассматриваем здесь явление Эль-Ниньо как некоторый тестовый модельный сигнал.

Обычно при анализе Южного Колебания рассматривается динамика температуры поверхности воды в центре Тихого океана [3]. Исследуемая характеристика – Niño SST (*sea surface temperature*) – определяется как средняя сезонная температура поверхности Тихого океана в области, лежащей между  $5^\circ$  с.ш. –  $5^\circ$  ю.ш. и  $90^\circ$  –  $150^\circ$  з.д. Данные о динамике Niño SST за 1871–1996 года были взяты из источников [3, 30].

На рис. 1.18 приводятся результаты вейвлетного преобразования (проекции поверхности амплитуды и фазы коэффициентов вейвлетного преобразования) временного ряда Niño SST с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega_0=6$ ). Рис. 1.19 демон-

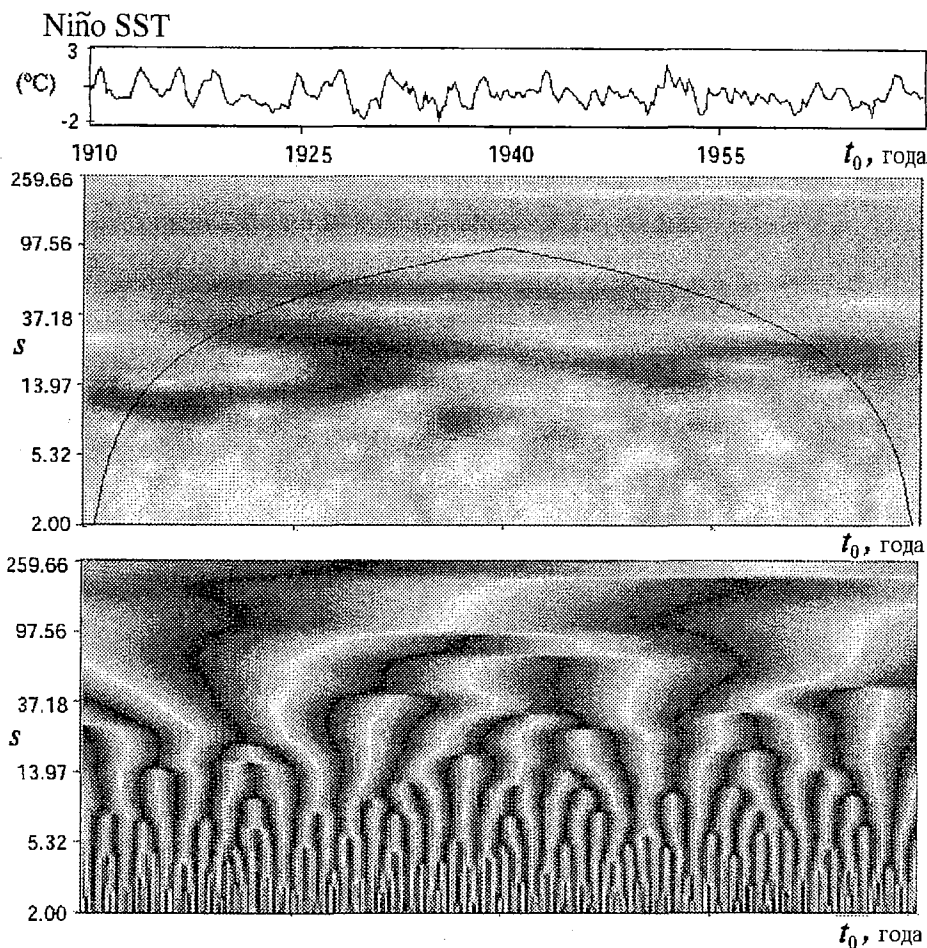


Рис. 1.18. Характеристики вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega_0=6$ ) для явления Эль-Ниньо (Niño SST). Длительность временной реализации 52 года,  $\Delta t=3$  месяца

стрирует соответствующее распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования.

Для сравнения результатов вейвлетного анализа и фурье-преобразования на рис. 1.20 приведены распределение энергии по масштабам  $\langle E(f_s) \rangle$ , полученное с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega_0=16$ ), и спектр мощности фурье-преобразования  $P(f)$ . Хорошо видно, что интегральное распределение энергии  $\langle E \rangle$  демонстрирует аналогичную картину, что и фурье-преобразование. Последнее, однако, дает существенно лучшее разрешение по частоте. Это свидетельствует о том, что при необходимости анализа частотного состава временного ряда без рассмотрения динамики тех или иных гармоник во времени вейвлетный анализ существенно уступает традиционному преобразованию Фурье, хотя и дает похожие результаты.

Отметим также, что анализируя мгновенные распределения энергии по масштабам можно легко выделить временные масштабы, играющие основную роль в каждый из моментов времени. Для этого на рис. 1.21 представлены зависимости  $E(s)$ , соответствующие 1932 и 1943 году. Хорошо видно, что крупномасштабные тенденции с характерными временами  $T \sim 10 \div 20$  лет играют примерно одинаковую роль в различные моменты процесса. Однако мелкомасштабная динамика ( $T < 10$  лет) сильно отличается для различных лет. Поэтому именно применение вейвлетного преобразования позволяет проанализировать все

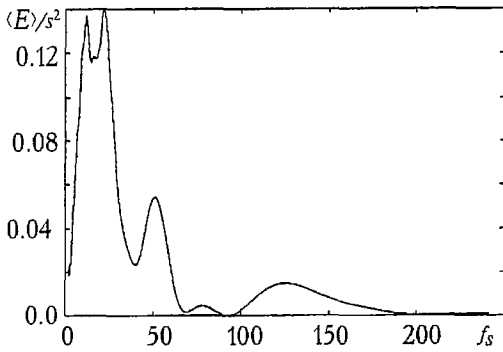


Рис. 1.19. Интегральное распределение энергии по масштабам вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega_0=6$ ) для явления Эль-Ниньо

особенности динамики рассматриваемого явления. Заметим, что для заинтересовавшимися проблемами анализа метеорологических данных и временных рядов методами вейвлетного анализа можно порекомендовать работы [1, 31–35], где эти вопросы освещены существенно более подробно. В частности, работы [1, 36, 37] непосредственно касаются исследований Южного Колебания методами вейвлетного анализа.

редственно касаются исследований Южного Колебания методами вейвлетного анализа.

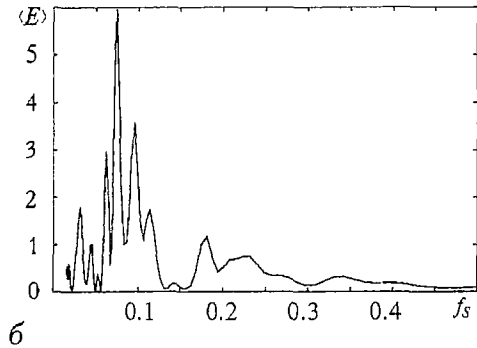
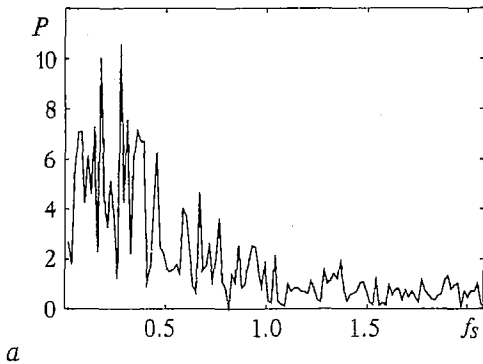


Рис. 1.20. *a* – фурье-спектр мощности  $P(f)$  и *б* – интегральное распределение энергии по масштабам  $\langle E(f) \rangle$  вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega=16$ ), построенные по временному ряду Niño SST

### 1.3.6. Сигналы с особенностью.

При анализе сигналов самой различной природы часто встречается ситуация, когда во временном ряду имеются локализованные особенности, например, импульс, резкий скачок, сбой фазы колебаний и т.д. Наиболее часто данные особенности возникают при экспериментальном определении тех или иных величин, однако, они могут иметь и динамическую природу. При фурье-анализе таких рядов невозможно локализовать особенность во времени. Более того, при анализе сигнала, регулярного всюду, кроме некоторых «особых» точек, информация об этой особенности содержится во всех коэффициентах фурье-преобразования, что искажает исследуемый сигнал.

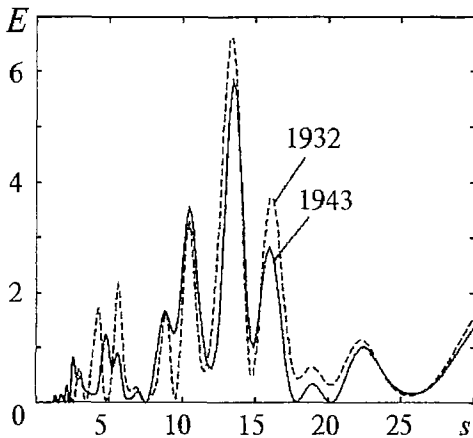


Рис. 1.21. Распределение энергии Niño SST по масштабам, построенное с базовым морлет-вейвлетом ( $\omega=16$ ), для различных годов

Рассмотрим результаты применения вейвлетного преобразования к сигналам с особенностями. Выше мы уже рассматривали результаты анализа сигналов со скачком фазы (см. рис. 1.9), с

резким изменением частоты сигнала (см. рис. 1.10), поэтому на таких особенностях мы здесь не останавливаемся. На рис. 1.22 демонстрируются результаты вейвлетного преобразования с базовым вейвлетом Паула для сигнала с резким скачком амплитуды (рис. 1.22, *a*). Рис. 1.23 соответствует вейвлетному преобразованию сигнала, на временной реализации которого наблюдается «излом» (рис. 1.23, *a*). Вейвлетное преобразование сигнала с особенностью в виде  $\delta$ -функции показано на рис. 1.24. На рис. 1.25 – вейвлетное преобразование синусоидального сигнала, у которого в какой-то момент времени наблюдается резкий очень короткий выброс амплитуды. Из рисунков видно, что в последнем случае выброс амплитуды оказывает влияние на распределение фазы коэффициентов вейвлетного преобразования (рис. 1.25, *z*) только в области малых масштабов, что позволяет эффективно выделять из временной реализации такие быстрые выбросы.

Из анализа рис. 1.22–1.25 следует, что все точечные особенности сопровождаются всплесками амплитуды коэффициентов вейвлетного преобразования  $|W(t_0, s)|$ . Однако существенно точнее данные особенности можно выделить из сигнала, анализируя распределение фазы  $\phi_w$ . В момент времени, соответствующий особенности в сигнале, наблюдается быстрое изменение фазы, которое существенно легче локализовать во времени. Более того, проводя тот или иной анализ структуры поверхности фазы вейвлетного преобразования (в том числе и методами распознавания образов для автоматизации такого анализа [38]), можно легко выделить и локализовать во времени те или иные изолированные особенности во временном ряде.

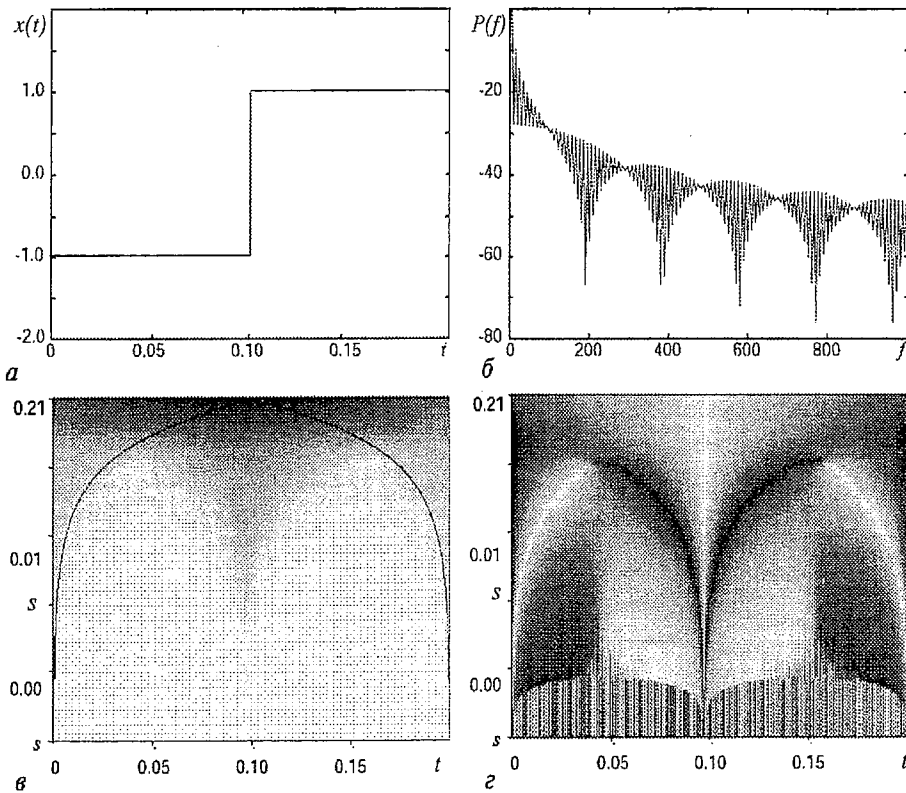


Рис. 1.22. Временная реализация сигнала с особенностью в виде скачка (*a*), его фурье-спектр мощности (*b*), амплитуда (*c*) и фаза (*z*) вейвлетного спектра с базовым паул-вейвлетом

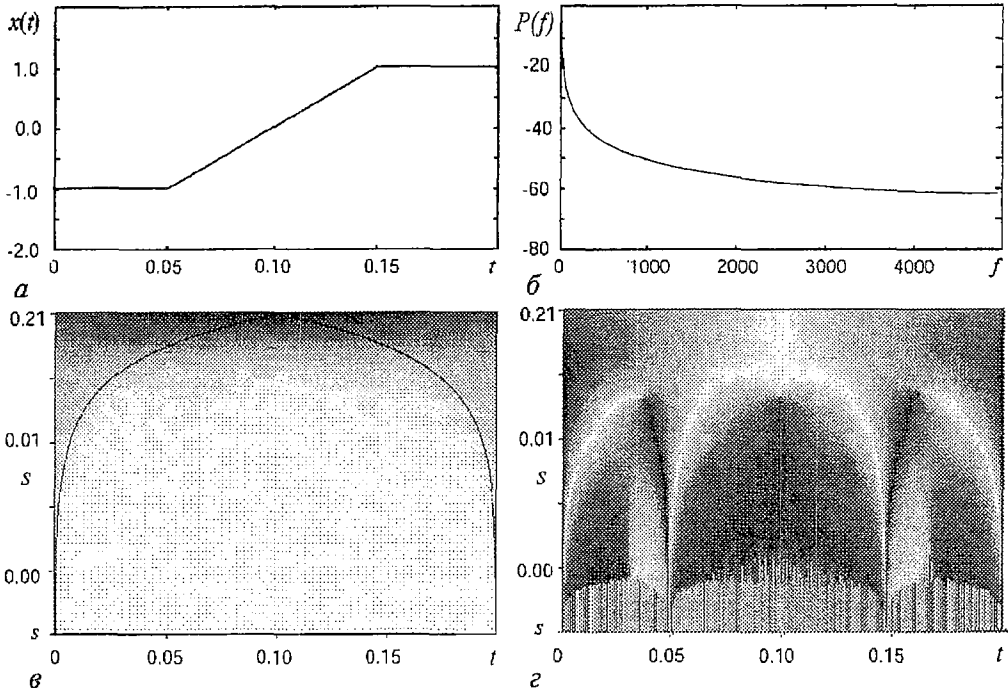


Рис. 1.23. Временная реализация сигнала с особенностью в виде излома (а), его фурье-спектр мощности (б), амплитуда (в) и фаза (z) вейвлетного спектра с базовым паул-вейвлетом

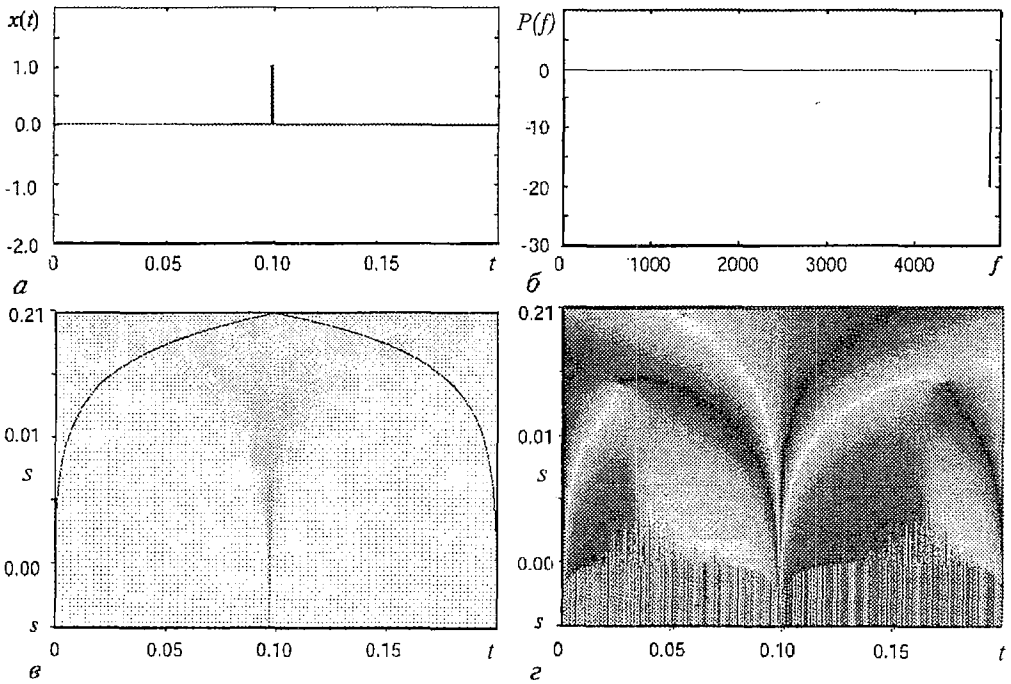


Рис. 1.24.  $\delta$ -функция (а), ее фурье-спектр мощности (б), амплитуда (в) и фаза (z) вейвлетного спектра с базовым паул-вейвлетом



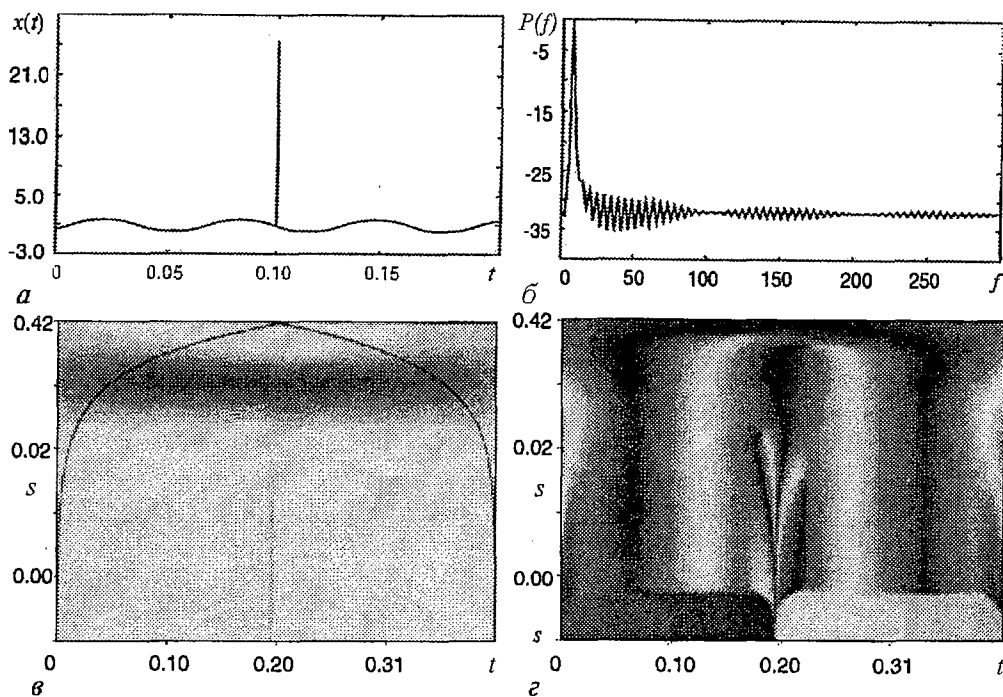


Рис. 1.25. Сигнал  $x(t)=\sin(\omega t)$ , у которого наблюдается резкий очень короткий скачок амплитуды (а), его фурье-спектр мощности (б) и вейвлетное преобразование с базовым паул-вейвлетом (в, г)

### Заключение

В первой части статьи сделан переход от преобразования Фурье к непрерывному вейвлетному преобразованию. Даны основные понятия и рассмотрены некоторые особенности вейвлетного преобразования. Рассматривается эффективная методика численной реализации вейвлетного преобразования с помощью использования быстрого преобразования Фурье. В качестве иллюстрации применения вейвлетного анализа исследуются некоторые простейшие модельные сигналы.

Продолжение статьи будет опубликовано в последующих номерах журнала.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 01-02-17392 и 00-15-96673).*

### Приложение

Ниже приводится текст подпрограммы CWTRun, выполняющей вейвлетное преобразование на алгоритмическом языке С. Процедура CWTRun использует процедуру FFTRun, которая осуществляет вычисление прямого и обратного преобразования Фурье методом БПФ. Текст функции FFTRun не приводится. Для ознакомления с методикой БПФ можно порекомендовать монографию [27], а смысл ее формальных параметров обсуждается ниже.

Процедура CWTRun имеет следующие передаваемые ей формальные параметры:

xr	массив, задающий исследуемый сигнал;
n	число отсчетов исследуемого сигнала ( $n \leq n_{\max}$ );
dt	величина временного интервала между элементами ряда;

ds            величина минимального временного масштаба, на котором производится вейвлетное преобразование;

MotherWavelet    передаваемая процедуре CWTRun функция, задающая Фурье образ используемой базисной вейвлетной функции;

Wvlt            возвращаемая процедурой CWTRun поверхность  $|W(n,s)|$ ;

WvltPhase        возвращаемая процедурой CWTRun поверхность  $\varphi_W(n,s)$ ;

coi            возвращаемая процедурой CWTRun граница; области влияния краевых эффектов;

ls            возвращаемое процедурой CWTRun число уровней  $(ls+1)$  по шкале временных масштабов, используемых при расчете вейвлетного преобразования.

Остановимся кратко на структуре процедуры<sup>9</sup> CWTRun. В начале процедуры описываются используемые локальные переменные. Массивы  $fxr[nmax]$  и  $fxi[nmax]$  используются для хранения фурье-образа исследуемого сигнала;  $s[nmax]$  и  $f[nmax]$  – массивы, содержащие соответственно наборы временных масштабов и частот, по которым производится вейвлетное преобразование;  $fwvlts[nmax]$  – массив, содержащий фурье-образ базисной вейвлетной функции.

Далее осуществляется нахождение фурье-образа исследуемого сигнала, задаваемого своей действительной  $xr$  и мнимой  $xi$  частью, с помощью процедуры FFTRun, которой передаются следующие параметры:

type    Здесь  $type = -1$  – прямое и  $type = 1$  – обратное фурье-преобразование;

nm      длина ряда, по которому производится БПФ;

dt      величина временного интервала между элементами ряда;

xr      в случае прямого фурье-преобразования через данный параметр в процедуру передается действительная часть сигнала, а возвращается действительная часть фурье-образа сигнала, и наоборот в случае обратного преобразования;

xi      аналогично предыдущему, но относительно мнимой части сигнала;

p         $p = \log_2(nm)$ .

Следующая часть тела процедуры CWTRun осуществляет непосредственно вейвлетное преобразование с базисной функцией MotherWavelet и находит границу области влияния краевых эффектов.

Фурье-образ базисной функции вейвлет преобразования находится с помощью функции MotherWavelet, которая передается в процедуру CWTRun как параметр. В ту или иную конкретную функцию нахождения фурье-образа базисной вейвлетной функции передаются параметры:  $s1$ : текущий временной масштаб  $s_j$ ,  $np$ : длительность временного ряда, по которому производится вейвлетное преобразование;  $dt$ : интервал между соседними отсчетами сигнала;  $f$ : массив частот, используемых при вейвлетном преобразовании; и, одно- временно, функция возвращает фурье-образ вейвлетной функции на соответствующем временном масштабе  $\hat{\psi}_0$ :  $fwvlts$  и время спадания автокорреляционной функции  $\tau_c$ :  $fvc oi$ .

Ниже приводится непосредственно текст и объявления соответствующих процедур:

```
#include <math.h>
#define nmax 33554432 /* Размер рабочих массивов; минимальное
```

<sup>9</sup> Текст процедуры снабжен подробными комментариями, что позволяет без труда разобраться с особенностями программирования численной реализации вейвлетного преобразования.

```

    значение равно числу отсчетов сигнала умноженному на 2,
    индекс 0 не используется */
#define smax 10000

/* Объявление типа указателя на функцию, осуществляющую
   процедуру нахождения Фурье-образа базового вейвлета */
typedef float (* WaveletType)
    (float s1, long np, float dt,
     float f[nmax], float fwlts[nmax],
     float fvcoi)

/* Процедура, выполняющая быстрое преобразование Фурье */
void FFTRun (int type, long nm, float dt, float xr[nmax],
             float xi[nmax], int p);
{
    . . . . .
}

/* Процедура расчета вейвлетного преобразования */
void CWTRun (float xr[nmax], long n; float dt, float ds,
             WaveletType MotherWavelet, float Wvlt[nmax][smax],
             float WvltPhase[nmax][smax], float coi[nmax]; long ls);
{
float xi[nmax], s[nmax], fxr[nmax], fxi[nmax], fwlts[nmax], f[nmax];

float f0, xmean, dt2, fvcoi; long i, j, p, np, nps, ls;

    dt2 = 2*dt;

/* Определение числа разбиений по шкале масштабов */
    ls = (long)(ln(n*dt/dt2)/ln(2.0))/ds; ls++;
/* Определение степени для процедуры БПФ */
    p = (long)(ln(n)/ln(2)); p++;
/* Определение длины ряда кратной степени 2 */
    np = (long)exp(p*ln(2.0));
    nps = (long)np/2 + 1;
/* Определение минимально разрешимой частоты */
    f0 = 2*p/(np*dt);
/* Определение набора частот, который используется для расчета
   вейвлетного преобразования */
    f(1) = 0;
    for (i=2; i<=nps; i++)
        f[i] = (i-1)*f0;
        f[np-i+2] = -f[i-1] ]

/* Усреднение данных анализируемого временного ряда */
    xmean=0;
    for (i=1; i<=n; i++)
        xmean += xr[i];
    xmean /= n;
    for (i=1; i<=n; i++)
        xr[i] -= xmean;
/* Добавление в ряд n нулевых значений */
    for (i=n+1; i<=np; i++)
        xr[i] = 0;
/* Присвоение нулевых значений мнимым частям членов ряда */
    for (i=1; i<=np; i++)
        xi[i] = 0;

```

```

/* Нахождение фурье-образа сигнала */
FFTRun(-1,np,dt,xr,xi,p);

for (i=1; i<=np; i++) [
  fxr[k] = xr[k];
  fxi[k] = xi[k] ]

/* Осуществление расчета вейвлет преобразования */
s[0] = 0;
for (j=1; j<=ls; j++){ /* Начало цикла по масштабам */
/* Определение текущего значения масштаба */
  s[j] = dt2*exp((j-1)*ds*ln(2));
/* Определение фурье-образа базисного вейвлета на s[j]
масштабе */
(*MotherWavelet)(s[j],np,dt,f,fwvlts,fvcoi);

/* Восстановление профиля поверхности W(n,s) на масштабе s(j),
осуществляемое с помощью процедуры обратного БПФ */
for (i=1; np; i++) [
  xr[i]:=fwvlts^[i]*fxr^[i];
  xi[i]:=fwvlts^[i]*fxi^[i] ]
FFTRun(1,np,dt,xr,xi,p);

/* Определение амплитуды и фазы вейвлетного преобразования */
for (i=1; i<=n; i++) [
  wvlt[j][i] = sqrt(xr[i]*xr[i]+xi[i]*xi[i]);
  wvltphase[j][i] = atan(xi[i]/xr[i]);
  if (xr[i]<0)
    wvltphase[j][i] = wvltphase[j][i] + M_PI ]
] /* Конец цикла по масштабам */

/* Расчет границы области влияния краевых эффектов */
for (i=1; i<=(long)(n+1)/2; i++) [
  coi[i] = fvcoi*dt*(i-1);
  coi[n-i+1] = coi[i]; ]
for (i=1; i<=n; i++){
  j = 0;
  do { j++
  } while ((j<ls) || (s[j]<coi[i]));
  if (j>ls) j = ls-1
  else j-;
  coi(i) = j+(coi[i]-s[j])/(s[j+1]-s[j]);
  if coi[i]>ls then
    coi[i] = ls;
  ]
}

```

## Библиографический список

1. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: спектральный анализ локальных возмущений: (основы теории и примеры применения) // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 2. С. 3.
2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и пример применения // УФН. 1996. Т. 39. С. 1085.

3. *Torrence Christopher and Compo Gilbert P.* A practical guide to wavelet analysis // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. Vol. 79. P. 61.
4. *Jacques Lewalle.* Tutorial on continuous wavelet analysis of experimental data. Electronic publication in the Internet: <http://www.ecs.syr.edu/faculty/lewallle/tutor/tutor.html>.
5. *Meyer Y.* Wavelets: algorithms and applications. Philadelphia: SIAM, 1993.
6. *Chui C.K.* Introduction to wavelets. San Diego: Academic Press, 1992.
7. *Polikar R.* The wavelet tutorial. Electronic publication in the Internet: <http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/WAVELETS/WTtutorial.html>
8. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Birkhäuser, 1994. 300 p.
9. Wavelets in physics / Ed. J.C. Van den Berg. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
10. Wavelets in medicine and biology / Eds A. Aldroubi, M. Unser. Boca Raton: CRC Press, FL, 1994.
11. Wavelets: An elementary treatment of theory and applications / Ed. T. Koornwinder. Singapore: World Scientific, 1993.
12. *Heil C.E., Walnut D.F.* Continuous and discrete wavelet transforms // SIAM Rev. 1989. Vol. 31. P. 628.
13. Wavelets / Eds J.M. Combes, A. Grossman and P. Tchamitchian. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 386 p.
14. *Mallat S.* A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell. 1989. № 2. P. 7.
15. *Mallat S.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$  // Trans. Am. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69.
16. *Захаров В.Г.* Разработка и применение методов вейвлет-анализа к нелинейным гидродинамическим системам. / Дисс. на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН. Пермь, 1997. 92 с.
17. *Dremin I.M., Ivanov O.V., Nechitailo V.A.* Wavelets and their use. Electronic preprint in Internet: <http://xxx.lanl.gov/hep-ph/0101182>, 16 January 2001.
18. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Вейвлетный анализ и его использование для анализа динамики нелинейных динамических систем различной природы // Изв. РАН, сер. физическая. 2000. Т. 64, № 12. С. 2383.
19. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. 778 с.
20. *Grossman A., Morlet J.* Decomposition of Hardy function into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15, № 4. P. 273.
21. *Paul T.* Function analytic on half-plane as quantum mechanical states // J. Math. Phys. 1984. Vol. 24, № 25. P. 136.
22. *Farge M.* Wavelet transform and their applications to turbulence // Annu. Rev. Fluid. Mech. 1992. Vol. 24, P. 395.
23. *Daubechies I.* The wavelet transform time-frequency localization and signal analysis // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. Vol. 36. P. 9614.
24. *Mallat S.G.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$  // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69.
25. *Lemarie P.G., Meyer Y.* Ondelettes et bases hilbertiennes // Rev. Math. Ibero-Americana. 1986. Vol. 2. P. 1.
26. *Battle G.* A block spin construction of ondelettes. Part 1 // Com. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 607.
27. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982. 428с.
28. *Meyers S.D., Kelly B.G. and O'Brien J.J.* An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispersion of Yanai waves // Mon. Wea. Rev. 1993. Vol. 121. P. 2858.

29. Астафьева Н.М., Сонечкин Д.М. Мультимасштабный анализ индекса Южного Колебания // ДАН. 1995. Т. 344, № 4. С. 539.
30. Rayner N.A., Horton E.B., Parker D.E., Folland C.K., Hackett R.B. Version 2.2 of the global sea-ice and sea surface temperature data set, 1903-1994. / Tech. Rep., CRTN 74, Hadley Centre for Climate Prediction and Research. 1996.
31. Hudgins L., Friehe C.A., Mayer M.E. Wavelet transforms and atmospheric turbulence // Phys.Rev.Lett. 1993. Vol. 71. P. 3279.
32. Lau K.-M., Weng H.-Y. Climate signal detection using wavelet transform: How to make a time series sing // Bulletin of the American Meteorological Society. 1995. Vol. 76. P. 2391.
33. Liu P.-C. Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves // Wavelets in Geophysics / Eds E. Foufoula-Georgiou and P. Kumar. Academic Press, 1994. P. 151.
34. Сонечкин Д.М., Даценко Н.М., Иващенко Н.Н. Новый способ экстраполяции хаотических временных рядов посредством вейвлетов с применением к динамике климата // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 108.
35. Даценко Н.М., Сонечкин Д.М. Вейвлетный анализ временных рядов и динамика атмосферы // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1,2. С. 3.
36. Wang Y. Temporal structure of the Southern Oscillation as revealed by waveform and wavelet analysis // J. Climate. 1996. Vol. 9. P. 1586.
37. Weng H.-Y., Lau K.-M. Wavelets, period doubling, and time-frequency localization with application to organization of convection over the tropical western Pacific // J. Atmos. Sci. 1994. Vol. 51. P. 2523.
38. Фу К. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. М.: Наука, 1971.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 20.06.2001

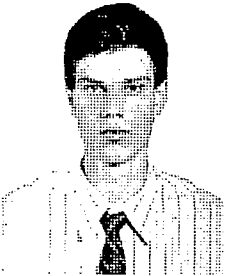
## AN INTRODUCTION TO CONTINUOUS WAVELET ANALYSIS FOR SPECIALISTS IN FIELD OF NONLINEAR DYNAMICS

A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

This paper attend to explain the mechanism of operation continuous wavelet analysis and possibility of its applications for investigation complex nonlinear oscillations. This work has been separated in several parts. In the first part base ideas of wavelet analysis and mathematical tools have been described. This works consists a lot of illustrations which allow obviously explain the main idea of wavelet analysis.



*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. Опубликовал в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым монографию «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996). Автор ряда статей в центральной печати.



*Храмов Александр Евгеньевич* – окончил Саратовский госуниверситет (1996). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1999). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, методы анализа и моделирования динамических систем, мощная СВЧ-электроника.

E-mail: [ach@cas.ssu.runnet.ru](mailto:ach@cas.ssu.runnet.ru)