Изв. вузов «ПНД», т.9, № 4,5, 2001

УДК 531.19

ДИНАМИКА БИЛЬЯРДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ ГРАНИЦАМИ

А.Ю. Лоскутов, Л.Г. Акиншин, А.Н. Соболевский

Исследуются динамические системы, отвечающие бильярдам с периодически возмущаемыми границами. Предлагается общий подход, восходящий к теории Обри – Мезера. На основе исследования бильярдных отображений рассмотрены плоские бильярды с зависящими от времени границами в форме стадиона и в форме окружности, а также бильярд на двумерной сфере, граница которого образована круглым диском переменного радиуса.

Введение

Понятие бильярда в теоретической и математической физике возникло после того, как Д. Биркгоф [1] рассмотрел задачу о движении по инерции материальной точки в некоторой ограниченной области. Позже глубокие работы Н.С. Крылова [2], посвященные проблеме перемешивания в системе из упругих шаров, привели исследователей к необходимости рассмотрения задач бильярдного типа (см. [3–7] и приведенные там ссылки). Как известно, некоторые бильярды обладают хорошими статистическими свойствами и поэтому являются достаточно удобными моделями ряда систем статистической механики. Более того, многим динамическим задачам могут быть поставлены в соответствие отображения для траектории частицы в бильярдах заданной формы [5, 7–9].

Бильярдная динамическая система порождается свободным движением материальной точки (бильярдного шара) внутри области $Q \subset M$ с кусочно-гладкой границей ∂Q при условии гладкого отражения от ∂Q. Если $\dim M=2$, то закон движения шара определяется как «угол падения равен углу отражения». Как правило, граница каждого бильярда состоит из m компонент ∂Q_i, $i=1,2,...,m$, каждая из которых может быть рассеивающей, фокусирующей или нейтральной. Точки сшивки компонент ∂Q_i границы называются особыми. Остальные точки q – регулярными. Если для каждой компоненты ∂Q_i рассмотреть единичные нормали $\mathbf{n}(q)$ в каждой точке $q \in \partial Q_i$, направленные внутрь области Q, то они будут определять *кривизну* $k(q)$ кривой ∂Q_i во всех регулярных точках q. Компонента ∂Q_i является *рассеивающей* и обозначается Γ^d, если $k(q)>0$. Для $k(q)=0$ и $k(q)<0$ получим соответственно *нейтральную* Γ^0 и *фокусирующую* Γ^f границы бильярда. При попадании шара в особые точки границы его дальнейшее движение не определено.

Подавляющее большинство результатов получено для бильярдов с постоянной границей, заданных в евклидовом пространстве (см., например, [5, 7, 10–12] и приведенные там ссылки). В то же время работы, посвященные анализу динамических систем, отвечающих бильярдам с возмущаемыми границами, а также бильярдам, определенным в неевклидовых пространствах, немногочисленны [13–15]. Изучению некоторых свойств таких бильярдов и посвящена данная работа. Она является продолжением исследования бильярдов с изменяющимися границами (см. [16, 17]).

Задача о динамике частицы в бильярде, граница которого возмущается по некоторому закону, имеет прямое физическое приложение как модель неравновесной статистической механики. Рассмотрим область D в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$, ограниченную кусочно–гладкой границей ∂Q, и r непересекающихся n–мерных шаров $B_1, B_2, \ldots, B_r \subset D$, называемых рассеивателями. При условии, что B_i неподвижны, бильярд в области $Q = D \setminus \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ называется *газом Лоренца* [18]. Для периодического расположения рассеивателей в области D было показано [5, 18], что в случае $n=2$ движение частицы является случайным и сводится к *броуновскому*. В реальной ситуации рассеиватели B_i всегда «дрожат» с небольшой амплитудой. Таким образом, обобщением газа Лоренца является бильярд с изменяющейся границей. Частный случай такого бильярда – рассеивающий бильярд с возмущаемой границей в форме круглого диска на торе Tor^2 с евклидовой метрикой. Очевидно, если граница бильярда изменяется по некоторому закону, то скорость бильярдного шара вследствие зависимости $\partial Q = \partial Q(t)$ может возрастать. Этот вопрос, восходящий к проблеме ускорения Ферми, ранее нами был изучен на примере газа Лоренца [16], а также бильярда типа стадион [17], и поэтому в данной работе не рассматривается.

Для неевклидовых пространств на поведение шара помимо свойств границы накладывается влияние кривизны пространства. В последней части работы рассматривается бильярд на сфере, образованный круглым диском переменного радиуса.

1. Общий подход

Согласно теории КАМ (Колмогорова – Арнольда – Мезера), периодические возмущения границы бильярда могут привести к хаотизации движения бильярдного шара, даже если невозмущенный бильярд был полностью интегрируемой системой. В то же время характер остаточных регулярных траекторий (меры нуль), сохраняющихся на месте разрушенных инвариантных кривых, рассматривается в так называемой теории Обри – Мезера [19–21]. В данном разделе обсудим возможность обобщения этой теории на случай бильярдов с изменяющейся границей.

Для формального описания бильярда с периодически зависящей от времени границей определим функцию $P(t,x)$: $\mathbf{R} \times S^1 \to \mathbf{R}^2$, задающую движение его границы. Здесь $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ – единичная окружность, то есть отрезок $[0,1]$ с отождествленными концами, x – циклическая координата на границе. Предполагается, что функция $P(t,x)$ периодически зависит от времени t, а ее образ при всех t есть простая замкнутая кривая, ограничивающая некоторую область.

В области, граница которой задана функцией $P(t,x)$, рассмотрим частицу единичной массы, движущуюся по инерции со скоростью $\mathbf{v}$ и кинетической энергией $E = \mathbf{v}^2/2$. При столкновении частицы с границей бильярда ее скорость получает приращение $\Delta\mathbf{v}$, а энергия – приращение ΔE, причем

$$\langle \vec{\tau}, \Delta\mathbf{v}\rangle = 0, \qquad \Delta E = \langle \mathbf{u}, \Delta\mathbf{v}\rangle, \tag{1}$$

где $\vec{\tau}$ - касательный вектор к границе бильярда, $\mathbf{u}$ - скорость границы в точке, где происходит соударение.

Траектория частицы в бильярде однозначно задается последовательностью $\tilde{x}=\{(t_i,x_i)\}$, $t_i>t_{i-1}$, $i\in\mathbf{Z}$, где t_i- момент i-го столкновения частицы с границей, а x_i - значение координаты, соответствующее точке столкновения. Для данной траектории формально определим действие

$$L[\tilde{x}] = \Sigma_{-\infty}^{\infty} L(t_{i-1}, x_{i-1}; t_i, x_i)\ , \tag{2}$$

где

$$L(s,x;t,y) = \inf_{\substack{\rho(s)=P(s,x)\\ \rho(t)=P(t,y)}} \int_s^t (\dot{\rho}^2(\tau)/2)d\tau = |P(t,y) - P(s,x)|^2/(2(t - s)). \tag{3}$$

Здесь лагранжиан $\mathbf{v}^2/2$ задается евклидовой метрикой на плоскости и может быть обобщен на произвольную риманову метрику. Если $t<s$ или точки $P(s,x)$ и $P(t,y)$ не могут быть связаны прямолинейным отрезком траектории, проходящей внутри области Q, положим $L(s,x;t,y)=+\infty$.

Ряд (2) расходится. Однако для траектории $\tilde{x}$ можно поставить задачу о минимизации действия $L[\tilde{x}]$ в следующем смысле: траектория $\tilde{x}$ называется *минимальной*, если для любой произвольной траектории $\tilde{y}$, отличающейся от $\tilde{x}$ лишь при конечном числе значений индекса i, выполняется неравенство

$$L[\tilde{y}] - L[\tilde{x}] \geq 0.$$

Это требование корректно, поскольку речь идет о сумме конечного числа слагаемых.

Назовем траекторию *неособой*, если функция $L(t_{i-1},x_{i-1};t_i,x_i)$ дифференцируема по своим аргументам при всех $i\in\mathbf{Z}$. Легко понять, что неособые минимальные траектории удовлетворяют соотношениям (1). В самом деле, необходимыми условиями минимума действия (2) являются равенства

$$\frac{\partial L(t_{i-1},x_{i-1};t_i,x_i)}{\partial t_i} + \frac{\partial L(t_i,x_i;t_{i+1},x_{i+1})}{\partial t_i} = 0,$$

$$\frac{\partial L(t_{i-1},x_{i-1};t_i,x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial L(t_i,x_i;t_{i+1},x_{i+1})}{\partial x_i} = 0.$$

Теперь, используя функцию (3) и замечая, что

$$\mathbf{v}_i = (P(t_i,x_i)- P(t_{i-1},x_{i-1}))/(t_i- t_{i-1}), \quad \Delta\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_{i+1}- \mathbf{v}_i,$$

$$\mathbf{u}_i = \partial P(t_i,x_i)/\partial t_i, \qquad \vec{\tau}_i = (\partial P(t_i,x_i)/\partial x_i)/|\partial P(t_i,x_i)/\partial x_i|,$$

получаем $\mathbf{v}_{i+1}^2/2- \mathbf{v}_i^2/2=\langle\mathbf{u}_i,\Delta\mathbf{v}_i\rangle$, $\langle\vec{\tau}_i,\Delta\mathbf{v}_i\rangle=0$.

Полное описание структуры множества минимальных траекторий бильярда с *неподвижной* границей (**u**=0) можно получить, обобщив результаты работ С. Обри и Дж. Мезера [19–21]. В этом случае траекторию достаточно задавать последовательностью $\{x_i\}$, $i\in\mathbf{Z}$ и вместо $L(s,x;t,y)$ рассматривать функцию $L(x,y)=|P(y)-P(x)|^2/2$. Согласно теории Обри – Мезера, каждой минимальной траектории соответствует число вращения $0\le\omega\le 1$, причем для рационального значения ω минимальные траектории соответствуют циклам или сепаратрисным контурам, а для иррационального ω – инвариантным торам или кантороторам. Хаотические траектории, если они присутствуют в системе, не могут быть минимальными.

В одномерном случае на окружности S^1 (а также на N–мерном торе Tor^N) к построению минимальных конфигураций можно подойти следующим образом [22]. Удается показать, что существует множество мощности континуум (параметризованное некоторой величиной $a\in\mathbf{R}^1$) непрерывных периодических функций, обладающих свойством

$$s(x) = \min_\rho(s(\rho)+L(\rho,x)) + \mathrm{const}. \tag{4}$$

Здесь x – циклическая координата на окружности (или вектор циклических координат на торе), а функция $L(\rho,x)$ определяется аналогично (2) как действие, набираемое частицей вдоль траектории своего движения. Отличие случая, рассмотренного в [22], от задачи о бильярде заключается в том, что там частица предполагается не свободной, а движущейся в периодическом по времени потенциале, но зато отсутствуют стенки. Оказывается, что всякой функции $s(x)$, удовлетворяющей соотношению (4), соответствует некоторое множество минимальных конфигураций. Эти конфигурации строятся следующим образом. Если $\tilde{x}=\{x_i\}$, $i\in\mathbf{Z}$ такая конфигурация, то

$$x_{i-1} = \arg\min_\rho(s(\rho) + L(\rho,x_i)),$$

причем множество $\arg\min_\rho(s(\rho)+L(\rho,x_i))$ состоит из единственной точки. Для каждого числа вращения существует функция $s(x)$, удовлетворяющая (4) и порождающая по описанному правилу минимальную конфигурацию с данным числом вращения. Аналогичный подход может быть применен к бильярдной задаче. Основная трудность здесь состоит в том, что асимптотическое поведение функции $L(s,x;t,y)$ при $(t-s)\to\infty$, $|x-y|\to\infty$ хуже, чем поведение аналога этой функции в задаче о торе: $L(s,x;t,y)$ стремится к 0 при $(t-s)\to\infty$ и периодична, а следовательно, ограничена по переменным x и y. Поэтому нижняя грань в (4) может достигаться на некомпактном множестве и даже на бесконечности. Выход заключается в правильном обобщении функционального уравнения (4). При использовании такого подхода свойства минимальных конфигураций бильярдной задачи сводятся к свойствам решений обобщенного уравнения (4) аналогично тому, как это сделано в [22].

2. Динамика бильярда типа стадион

Рассмотрим бильярд с границей ∂Q в форме стадиона, состоящей из двух параллельных прямых Γ^0 длины l и двух малых дуг парабол Γ^f (рис. 1). Такой бильярд исследован достаточно полно (см., например, [5, 7, 8, 11]). Опираясь на результаты этих работ, можно развить теорию бильярдов с изменяющейся границей. Пусть

$$l >> a >> b, \tag{5}$$

где a – расстояние между прямыми. Это условие несколько упрощает задачу и дает

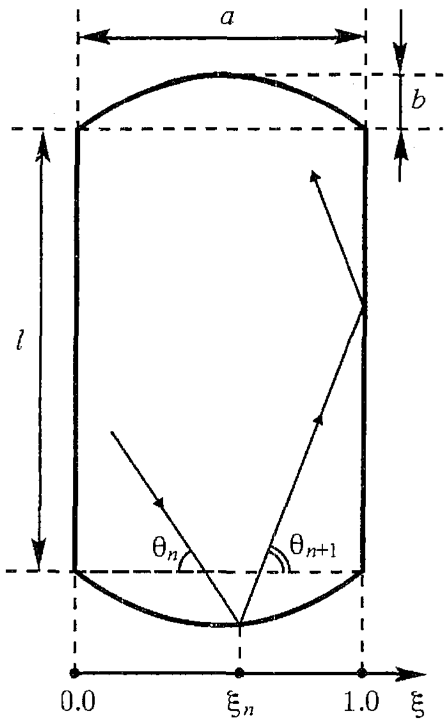

Рис. 1. Общий вид бильярда типа стадион

возможность явного аналитического рассмотрения. Предположим, что $\chi(\xi)=4b\xi(1-\xi)$ – функция, описывающая форму дуг Γ^f границы ∂Q, $\max(\chi)=b$.

Представим каждый участок траектории шара между двумя последовательными отражениями от вертикальных стенок на отдельном листе. Если затем склеить полученные листы, то получится бесконечная развертка поверхности бильярдного стола (рис. 2). Введем дискретные динамические переменные θ_n и ξ_n, как показано на рисунке. Тогда нетрудно получить следующее отображение:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n,\xi_n) = \theta_n - \{(8b/a)(1-2\xi_n)\},$$
$$\xi_{n+1} = g(\theta_n,\xi_n) = \{\xi_n + (l/a)\mathrm{ctg}\theta_{n+1}\}, \tag{6}$$

где учтены условия (5) и фигурные скобки $\{\cdot\}$ означают взятие дробной части.

Допустим, что граница бильярда типа стадион изменяется так, что ее нейтральные компоненты Γ^0 меняют длину, $l=l(t)$. При этом полагаем, что амплитуда колебаний пренебрежимо мала по сравнению с величиной l. Для изучения такого бильярда и получения отображения рассмотрим сначала отражение частицы от движущейся со скоростью **u** наклонной стенки (рис. 3). Тогда для проекций скорости частицы легко получить следующее преобразование:

$$v_x' = v_x\cos 2\beta + (v_y-u)\sin 2\beta,$$

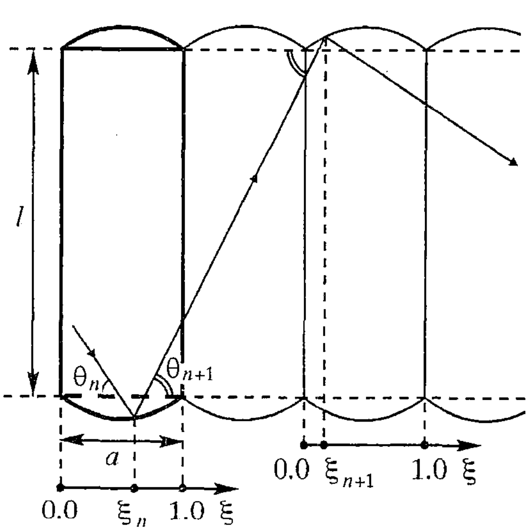

Рис. 2. Развертка поверхности бильярдного стола бильярда типа стадион и введенные координаты θ_n и ξ_n

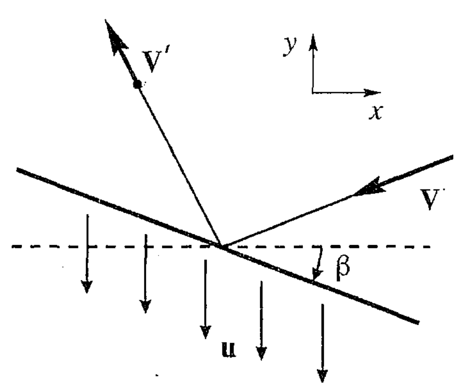

Рис. 3. Отражение точечной частицы от движущейся стенки. Скорость **u** стенки параллельна оси y и направлена противоположно ей. Угол наклона β стенки отсчитывается от оси x по часовой стрелке

$$v_y' = (v_y - u)\cos 2\beta - v_x \sin 2\beta - u,$$

где v_x, v_y и v_x', v_y' - составляющие скорости частицы до и после отражения от стенки, соответственно. Теперь нетрудно записать отображение для проекций скорости шара в исследуемом бильярде

$$v_{x_{n+1}} = v_{x_n}\cos 2\beta_n + (v_{y_n} - u_n)\sin 2\beta_n,$$

$$v_{y_{n+1}} = (v_{y_n} - u_n)\cos 2\beta_n - v_{x_n}\sin 2\beta_n - u_n,$$

где u_n - скорость компоненты Γ^f в момент n-го отражения шара и

$$\beta_n = \mathrm{arctg}(4b(1-2\,\xi_n)/a). \qquad (7)$$

Используя соотношение (5) и выражение, описывающее форму малой дуги параболы $\chi(\xi)=4b\xi(1-\ \xi)$, в приближении малых колебаний можно получить неявное отображение для переменной ξ

$$\xi_{n+1} = \{\xi_n + [(l + 4b\xi_n(\xi_n-1) + 4\,b\,\xi_{n+1}(\xi_{n+1}-1))\,/\,a]v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}\}. \qquad (8)$$

Легко видеть, что оно разрешимо и позволяет выразить последующее значение ξ_{n+1} через предыдущее ξ_n

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= a/(8b)(v_{y_{n+1}}/v_{x_{n+1}})[1 + 4b/a - \\ &- [(1 + (4\,b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}))^2 - (16\,b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}})\zeta_n]^{1/2}],\end{aligned} \qquad (9)$$

где

$$\zeta_n = \{\xi_n + [(l + 4b\xi_n(\xi_n - 1))/\,a]v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}\}. \qquad (10)$$

Как и прежде, выражение $\{\cdot\}$ в соотношениях (8) и (10) означает взятие дробной части. Поскольку $u_n=u(t_n)$, то для построения полного отображения необходимо дополнительно иметь преобразование для фазы колебания Γ^f в момент времени, в который происходит n-е отражение шара. Для случая малых колебаний это преобразование будет иметь вид

$$t_{n+1} = 1/v_{y_{n+1}}[l + 4b\xi_n(\xi_n-1) + 4\,b\,\xi_{n+1}(\xi_{n+1}-1)] + t_n.$$

Таким образом, преобразование для переменных v_{x_n}, v_{y_n}, ξ_n, t_n, задающих динамическую систему, отвечающую движению шара в бильярде типа стадион с малыми колебаниями фокусирующих компонент границы, можно записать как

$$\begin{aligned} v_{x_{n+1}} &= v_{x_n}\cos 2\beta_n + (v_{y_n} - u_n)\sin 2\beta_n, \\ v_{y_{n+1}} &= (v_{y_n} - u_n)\cos 2\beta_n - v_{x_n}\sin 2\beta_n - u_n, \\ \xi_{n+1} &= a/(8b)(v_{y_{n+1}}/v_{x_{n+1}})[1 + 4b/a - \\ &\quad - [(1 + (4\,b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}}))^2 - (16\,b/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}})\zeta_n]^{1/2}], \\ t_{n+1} &= 1/v_{y_{n+1}}[l + 4\,b\,\xi_n(\xi_n-1) + 4\,b\,\xi_{n+1}(\xi_{n+1}-1)] + t_n, \end{aligned} \qquad (11)$$

где значения β_n и ζ_n определяются из соотношений (7) и (10), соответственно.

Использование условия (5) позволяет существенно упростить данное отображение

$$v_{x_{n+1}} = v_{x_n}\cos 2\beta_n + (v_{y_n} - u_n)\sin 2\beta_n,$$

$$v_{y_{n+1}} = (v_{y_n} - u_n)\cos 2\beta_n - v_{x_n}\sin 2\beta_n - u_n\,,$$
$$\xi_{n+1} = \{\xi_n + (l/a)(v_{x_{n+1}}/v_{y_{n+1}})\}, \tag{12}$$
$$t_{n+1} = l/v_{y_{n+1}} + t_n.$$

Как известно (см., например, [7] и приведенные там ссылки), условием существования хаотического поведения в динамической системе, отвечающей бильярду, является выполнение неравенства $K_0' \geq 1$, где K_0' - коэффициент растяжения фаз. В рассматриваемом случае $K_0' \equiv |(d\xi_{n+1}/d\xi_n) - 1|$, то есть

$$\begin{aligned} K_0' = |&16\, bl/(a^2 + 16\, b^2 - 64\, b^2\xi + 64\, b^2\xi^2) \times \\ &\times [(u_n - v_{y_n})\cos 2\beta + v_{x_n}\sin 2\beta]/[u_n + (v_{y_n} - u_n)\cos 2\beta + v_{x_n}\sin 2\beta] + \\ &+ 16bl[v_{x_n}\cos 2\beta + (v_{y_n} - u_n)\sin 2\beta]/[u_n + (v_{y_n} - u_n)\cos 2\beta + \\ &+ v_{x_n}\sin 2\beta]^2 \times (v_{x_n}\cos 2\beta + (u_n - v_{y_n})\sin 2\beta)/(a^2 + 16\, b^2 - 64\, b^2\xi + 64 b^2\xi^2)|, \end{aligned} \tag{13а}$$

где $\beta = \mathrm{arctg}(4b(1 - 2\,\xi)/a)$. Используя неравенства (5) и вводя обозначения $v_{x_n}/v_{y_n} \equiv x$, $u_n/v_{y_n} = y$, $K = 16lb/a^2$, выражение (13а) можно существенно упростить

$$K_0' = K|(2y^2 - 3\,y + x^2 + 1)/(4y^2 - 4\,y + 1)|. \tag{13б}$$

Для соответствующего бильярда с *постоянной* границей, то есть при $u_n \equiv \mathrm{const}$ из (13б) найдем $K_0 = K/\sin^2\theta_{n+1}$, $K = 16bl/a^2$. При этом отображение (12) перейдет в отображение (6). Используя его матрицу преобразования

$$A \equiv \begin{pmatrix} \partial f/\partial\theta|_{\theta_n,\xi_n} & \partial f/\partial\xi|_{\theta_n,\xi_n} \\ \partial g/\partial\theta|_{\theta_n,\xi_n} & \partial g/\partial\xi|_{\theta_n,\xi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 16b/a \\ -l/(a\sin^2\theta_{n+1}) & 1 - 16\,lb/(a^2\sin^2\theta_{n+1}) \end{pmatrix},$$

определим корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = (2 - K_0 \pm (K_0^2 - 4\,K_0)^{1/2})/2$. При $K_0 \leq 4$ получим $|\lambda_{1,2}| = 1$, что гарантирует существование в области

$$\arcsin(K^{1/2}/2) \leq \theta \leq \pi - \arcsin(K^{1/2}/2)$$

неподвижных точек типа центр с семействами инвариантных кривых. Эта область углов уменьшается с увеличением K и исчезает при $K > 4$. Граница хаотического поведения определяется из условия $K \sim 1$. Значит, если $16lb/a^2 \geq 1$, то бильярд должен обладать хаотическими свойствами.

Таким образом, в пространстве параметров и начальных условий бильярда типа стадион с постоянной границей имеются три области с качественно различным движением (рис. 4).

Область 1 ($K_0 < 1$), где существует только регулярное (периодическое и квазипериодическое) движение.

Область 2 ($1 \leq K_0 \leq 4$), в которой сосуществуют регулярная и хаотическая динамика. Хаотические траектории

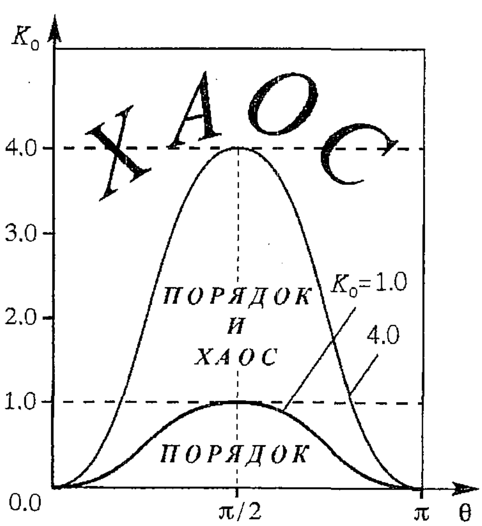

Рис. 4. Области в пространстве параметров и начальных условий с качественно различной динамикой для бильярда типа стадион. Области *1* и *2* разделены кривой $K = \sin^2\theta$, области *2* и *3* - кривой $K = 4\sin^2\theta$

лежат в узких слоях между семействами инвариантных кривых, окружающих неподвижные точки и резонансы различных порядков.

Область 3 ($K_0>4$), где наблюдается только хаотическая динамика.

Вернемся к общему случаю бильярда типа стадион с $u_n \neq 0$. В пространстве параметров и начальных условий такого бильярда также можно выделить три области.

Область 1, где $K_0'<1$.

Область 2, где $1 \leq K_0' \leq 4$.

Область 3, где $K_0'>4$.

В области *3*, как и в случае бильярда с постоянной границей, наблюдается только хаотическая динамика, а в области *2* - как хаотическое, так и регулярное движение. Однако в области *1* имеется *качественное отличие* от рассмотренного выше бильярда с ∂Q=const. Кроме регулярных, здесь присутствуют хаотические траектории. Поэтому по своим динамическим свойствам область *1* в исследуемом бильярде становится подобной области *2* в бильярде с невозмущенной границей.

Рассмотрим вопрос о *стабилизации* хаотического движения бильярдного шара, то есть подавлении хаоса в бильярде, описываемом отображением (12). Для этого из (13б) найдем такие соотношения между x и y, при выполнении которых система находится в области *1* или в области *2*. Заметим, что смысл имеют только значения $y<1/2$, поскольку в противном случае шар после отражения от границы будет двигаться вслед за ней, что не соответствует условию малости колебаний Γ^f. Далее, условие существования регулярных траекторий $K'_0 \leq 4$ выполняется только при

$$\begin{cases} K<8, \\ y<c, \end{cases} \tag{14а}$$

где

$$c = (-\tfrac{3}{4}K + 4 - (K^2/16 + 4Kx^2 - K^2x^2/2)^{1/2})/(8 - K). \tag{14б}$$

При $K<8$ величина c существует всегда. Стабилизация хаотического поведения бильярдного шара посредством возмущения границы бильярда означает, что выполняется $K_0' \leq 4$, если при этом $K>4$ или $K_0>4$. Однако из соотношений (14а,б) нетрудно видеть, что совместное удовлетворение этих условий неизбежно приводит к неограниченному росту скорости шара. Действительно, поскольку $K_0=K/(1+x^2)$, при $\begin{cases} K_0' \leq 4 \\ K_0>4 \end{cases}$ всегда $c<0$. Это означает, что $y=u_n/v_{y_n}<0$ (см. (14а)), то есть имеют место *только встречные* столкновения бильярдного шара с границей. Таким образом, *подавление хаоса в исследуемом бильярде в указанном выше смысле возможно только при неограниченном возрастании скорости шара*. Если же рассматривать и сопутствующие столкновения, то условие существования регулярных траекторий нарушается.

3. Динамика бильярдов с границей в форме окружности на плоскости и на сфере

Данная часть работы посвящена исследованию некоторых свойств плоских и сферических бильярдов с границей в форме окружности при условии периодического изменения ее радиуса.

3.1. *Плоский бильярд в форме окружности.* Рассмотрим сначала простой случай бильярда с границей в форме окружности, $\partial Q=\Gamma^f$, $r_{\Gamma^f}\neq r_{\Gamma^f}(t)$, где Γ^f обозначает окружность, а r – ее радиус. Такой бильярд не обладает хаотическим поведением, и динамическая система, отвечающая ему, является полностью интегрируемой. Пусть граница бильярда возмущается таким образом, что ее радиус изменяется по некоторому закону $r=r(t)$. Опишем динамику такой системы переменными v_{r_n}, v_{τ_n}, t_n, φ_n, где v_{r_n}, v_{τ_n} – соответственно радиальная и тангенциальная составляющие скорости шара при n–м отражении от границы, происходящем в момент времени t_n в точке с угловой координатой φ_n. При условии, что $\dot r(t_n)<<v_{r_n}$ для любого n, отображение, описывающее поведение шара в бильярде с подвижной границей в форме окружности, дается выражением

$$
\begin{aligned}
v_{r_{n+1}} &= v_{\tau_n}\sin(\varphi_{n+1}-\varphi_n) - (v_{r_n} - 2\dot r(t_n))\cos(\varphi_{n+1}-\varphi_n),\\
v_{\tau_{n+1}} &= v_{\tau_n}\cos(\varphi_{n+1}-\varphi_n) - (v_{r_n} - 2\dot r(t_n))\sin(\varphi_{n+1}-\varphi_n),\\
t_{n+1} &= (r(t_{n+1})/v_{\tau_n})\sin(\varphi_{n+1}-\varphi_n) + t_n,\\
\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - \arcsin\left(r(t_n)/r(t_{n+1}) - v_{\tau_n}/(v_{\tau_n}^2+v_{r_n}^2)^{1/2}\right) -\\
&- \arcsin\left(v_{\tau_n}/(v_{\tau_n}^2+(v_{r_n}-2\dot r(t_n))^2)^{1/2}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Легко видеть, что данная система является трехмерной, поскольку переменную φ_n можно исключить. В случае малых колебаний, $r(t_n)=r(t_{n+1})\equiv r=\text{const}$, $\dot r(t_n)\neq 0$, то есть, когда *пренебрегают смещением* границы, выполняется $v_{\tau_n}=v_{\tau_{n+1}}\equiv v_\tau=\text{const}$, и отображение (15) существенно упрощается

$$
\begin{aligned}
v_{r_{n+1}} &= v_{r_n} - 2\dot r(t_n),\\
t_{n+1} &= 2rv_{r_{n+1}}/(v_{r_{n+1}}^2+v_\tau^2) + t_n.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Нетрудно понять, что, хотя бильярд с постоянной границей в форме окружности является полностью интегрируемой системой и хаотическое поведение шара в таком бильярде невозможно, при гармоническом изменении границы, $r(t)=r+A\cos\omega t$, происходит *хаотизация* движения. Действительно, вследствие приближения $\dot r(t_n)<<v_{r_n}$ отображение (16) можно рассматривать как возмущенное отображение вида

$$
\begin{aligned}
v_{r_{n+1}} &= v_{r_n} \equiv v_r = \text{const},\\
t_{n+1} &= 2rv_r/(v^2_r + v^2_\tau) + t_n
\end{aligned}
\tag{17}
$$

для полностью интегрируемой системы – плоского бильярда с неподвижной границей в форме окружности. В этом случае переменная v_r будет играть роль переменной действия, а t – угла. Переход от (17) к (16) происходит посредством добавления к переменной действия v_r возмущения порядка $A\omega$.

Отметим, что аналогично можно рассмотреть *эллиптический* бильярд с возмущаемой границей. Как известно, бильярд с неподвижной границей в форме эллипса является полностью интегрируемой системой. Однако, если границу такого бильярда возмущать, то, как и в случае бильярда с границей в форме окружности, его динамика качественно изменится. При этом возмущение границы можно производить двумя различными способами: статически, когда граница в момент удара неподвижна, и динамически. Такой бильярд с нескольких точек зрения рассматривался в работе [14], где было показано, что в обоих случаях наблюдается переход от полной интегрируемости системы к хаосу. Строгие результаты о симметричном аналитическом возмущении эллиптического бильярда, приводящем к расщеплению сепаратрис, описаны в работах [7,23].

3.2. ***Бильярд в форме окружности на сферической поверхности.*** Рассмотрим область Q, имеющую границу ∂Q в форме окружности, расположенную на двумерной сфере S^2 радиуса R. Радиус r границы ∂Q отсчитывается по дуге большого круга (рис. 5). Тогда движение шара в таком бильярде в полярной системе координат, центр которой совпадает с центром окружности ∂Q, а плоскость – с плоскостью ∂Q, будет определяться единственной динамической переменной φ_n. Значения φ_n задают угловые координаты n–го отражения частицы от окружности

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - 2\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\theta/\cos(r/R)), \tag{18}$$

где θ – угол падения (отражения) шара, который определяется как угол между траекторией шара и окружностью *на сфере*, а не в проекции на плоскость окружности. Легко видеть, что динамика такого бильярда полностью регулярна. Заметим, что отображение (18) совпадает с точностью до знака с отображением для плоского (R=∞) бильярда с неподвижной границей в форме окружности. Различие в знаке связано с рассмотрением бильярда, определенного «снаружи» окружности, то есть, формально, с условием $r<\pi R/2$ (рис. 6). Предположим, что радиус окружности растет, так что $r\to\pi R/2$. Тогда, как нетрудно понять, из «рассеивающего» бильярд постепенно превращается в «бильярд с нейтральными компонентами», и при дальнейшем изменении радиуса окружности он становится «фокусирующим». Геометрия задачи такова, что в зависимости от радиуса окружности получается «рассеивающий», «фокусирующий» или «нейтральный» бильярд на сфере. Во всех случаях динамика такого бильярда будет регулярна. Когда бильярд имеет границу, состоящую из фокусирующих и нейтральных компонент (например, типа стадион), то основной причиной, вызывающей хаотичность, является расфокусирование [5, 11]. Этот же механизм лежит в основе динамики таких бильярдов, расположенных на двумерной сфере S^2 [24–26].

Допустим теперь, что граница бильярда осциллирует так, что ее радиус

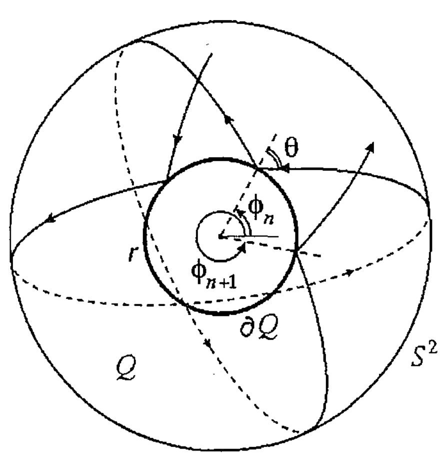

Рис. 5. Бильярд на сферической поверхности с границей в форме окружности радиуса r

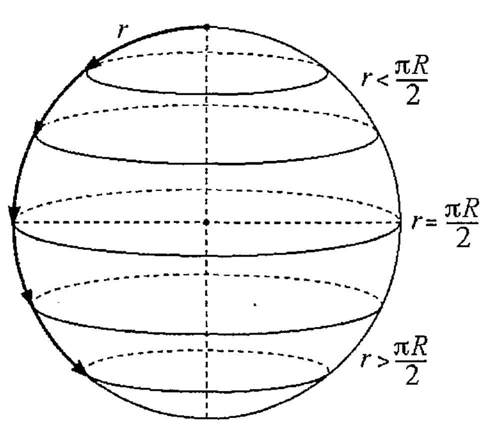

Рис. 6. Различные виды бильярдов на сферической поверхности с границей в форме окружности

меняется со временем по некоторому закону $r=r(t)$. Представим динамику такой системы в переменных v_{r_n}, v_{τ_n}, t_n,φ_n, где v_{r_n}, v_{τ_n} имеют тот же смысл, что и в предыдущем пункте. Тогда в предположении $\dot{r}(t_n) << v_{r_n}$ динамическая система, отвечающая движению частицы в бильярде с изменяющейся границей на сфере, примет вид

$$\begin{aligned}
&v_{\tau_{n+1}} = v_{\tau_n} \sin(r(t_n)/R)/\sin(r(t_{n+1})/R),\\
&v_{r_{n+1}} = ((v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n))^2 + v^2_{\tau_n}[\,1 - \sin^2(r(t_n)/R)/\sin^2(r(t_{n+1})/R)])^{1/2},\\
&t_{n+1} = R/[(v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n))^2 + v^2_{\tau_n}]^{-1/2}\times\\
&\times\left[2\pi - \arcsin\left(\frac{\sin(r(t_n)/R)}{[1+v_{\tau_n}{}^2\cos^2(r(t_n)/R)/(v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n))^2]^{1/2}}\right) -\right.\\
&\left. - \arcsin\left(\frac{\sin(r(t_{n+1})/R)}{[1 + (v_{\tau_{n+1}}{}^2/v_{r_{n+1}}{}^2)\cos^2(r(t_{n+1})/R)]^{1/2}}\right)\right] + t_n,\\
&\varphi_{n+1} = \varphi_n - \operatorname{arctg}\left(\frac{v_{r_n} - 2\,\dot{r}\,(t_n)}{v_{\tau_n}\cos(r(t_n)/R)}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{v_{r_{n+1}}}{v_{\tau_{n+1}}\cos(r(t_{n+1})/R)}\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

В случае малых по амплитуде колебаний границы тангенциальная составляющая скорости частицы удовлетворяет условию $v_{\tau_n}=v_{\tau_{n+1}}\equiv v_\tau=\text{const}$ и поэтому может быть исключена. Следовательно, отображение (19) перепишется как

$$\begin{aligned}
&v_{r_{n+1}} = v_{r_n} - 2\dot{r}(t_n),\\
&\varphi_{n+1} = \varphi_n - 2\operatorname{arctg}(v_{r_{n+1}}/[v_\tau\cos(r/R)]),\\
&t_{n+1} = 2R/(v^2_{r_{n+1}} + v^2_\tau)^{1/2}[\pi - \arcsin(\sin(r/R)(1 + (v^2_\tau/v^2_{r_{n+1}})\cos^2(r/R))^{-1/2})] + t_n.
\end{aligned} \tag{20}$$

Хотя бильярд на сфере не является хаотической динамической системой, малые колебания его границы, как и для бильярда на плоскости, приводят к рождению хаоса. Действительно, обратимся к отображению (20). Вследствие приближений $\dot{r}(t_n) << v_{r_n}$ его можно рассматривать как возмущенное отображение вида

$$\begin{aligned}
&v_{r_{n+1}} = v_{r_n} \equiv v_r = \text{const},\\
&\varphi_{n+1} = \varphi_n - 2\operatorname{arctg}(v_r/(v_\tau\cos(r/R)),\\
&t_{n+1} = 2R/(v_r{}^2 + v_\tau{}^2)^{1/2}[\pi - \arcsin(\sin(r/R)(1 + (v^2_\tau/v^2_r)\cos^2(r/R))^{-1/2})] + t_n,
\end{aligned} \tag{21}$$

которое описывает динамику бильярда с неподвижной границей в форме окружности, заданного на сфере. Для этого отображения переменная v_r играет роль действия, а t_n – угла. Таким образом, переход от невозмущенного отображения (21) к возмущенному (20) осуществляется посредством наложения на переменную v_r малого возмущения, которое и приводит систему к неинтегрируемости.

Заключительные замечания

Многие хаотические явления целесообразно исследовать на примерах систем, в которых хаотические свойства наиболее ярко выражены, и которые имеют непосредственное отношение к естественным моделям. Такими системами являются бильярды. Хотя бильярды относятся к упрощенным задачам классической статистической механики, имеется естественная аналогия между рассеивающими бильярдами и геодезическими потоками на многообразиях всюду отрицательной кривизны. Роль отрицательной кривизны в случае бильярда играет его граница. Более того, для ряда бильярдных систем доказано, что они обладают хорошими статистическими свойствами. На этом основано доказательство эргодической гипотезы для системы из твердых шаров в ящике. Естественным обобщением такой системы является бильярд, граница которого не является неподвижной, а изменяется по какому–либо закону. Бильярды с зависящей от времени границей исследовать гораздо сложнее. Одним из наиболее перспективных подходов здесь может быть развитие многомерного обобщения теории Обри – Мезера (см. п. 1). Другой путь изучения свойств бильярдов с переменной границей – построение и анализ соответствующих динамических систем. Использование такого пути позволяет сделать вывод, что в бильярде типа стадион с определенным образом возмущаемой границей возможна стабилизация хаотической динамики в том смысле, что в таком бильярде присутствуют *регулярные* (периодические) траектории, которые не существовали в случае неподвижной границы. Напротив, если граница бильярда имеет форму окружности на плоскости или на сфере, малые возмущения приводят к хаотизации динамики шара.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Я.Г. Синаю, профессору В.И. Оселедцу и профессору Б.М. Гуревичу за плодотворные обсуждения.

Библиографический список

1. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y., American Mathematical Society, 1927.

2. *Крылов Н.С.* Работы по обоснованию статистической физики. М.–Л.: АН СССР, 1950.

3. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 6. С. 1261.

4. *Sinai Ya. G.* Development of Krylov ideas // An addendum to the book N.S.Krylov «Works on the foundations of statistical physics». Princeton: Princeton Univ. Press, 1979. P. 239.

5. *Бунимович Л.А.* Системы гиперболического типа с особенностями // Динамические системы. М.: ВИНИТИ, 1985. Т.2. С. 173.

6. *Tabachnikov A.* Billiards. France Mathematical Soc. Press, 1995.

7. *Tabanov M.B.* Separatrices splitting for Birkhoff's billiard in symmetric convex domain, closed to an ellipse // Chaos. 1994. Vol. 4, № 4. P. 595.

8. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.

9. Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Vol. 3 / Ed. R.H. Cohen. Amsterdam: Elsevier, 1975.

10. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // Успехи матем. наук. 1970. Т. 25, вып .2. С. 141.

11. *Bunimovich L.A.* On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Commun. Math. Phys. 1979. Vol. 65, № 3. P. 295.
12. *Bunimovich L.A.* Conditions of stochasticity for two-dimensional billiards // Chaos. 1991. Vol. 1, № 2. P. 187.
13. *Lomili H.E.* Perturbations of elliptic billiards // Physica D. 1996. Vol. 99, № 1. P. 59.
14. *Koiller J., Markarian R., Kamphorst S.O., de Carvalho S.P.* Static and time-dependent perturbations of the classical elliptical billiard // J. Stat. Phys. 1996. Vol. 83, № 1–2. P. 127.
15. *Eleonsky V.M., Korolev V.G., Kulagin W.E.* Dynamical systems with a Hamiltonian that is a function of momentum modul: pseudobilliards // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 6. P. 6604.
16. *Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г.* Механизм ускорения Ферми в рассеивающих бильярдах с возмущаемыми границами // ЖЭТФ. 1999. Т. 116, вып. 5 (11). С. 1781.
17. *Loskutov A., Ryabov A.B., Akinshin L.G.* Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries // Physica A. 2000. Vol. 33, № 44. P. 7973.
18. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatters // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 78, № 4. P. 479.
19. *Aubrey S.* The twist map, the extended Frenkel – Kontorova model and the devil'*s* staircase // Physica D. 1983. Vol. 7, № 1–3. P. 240.
20. *Mather J.F.* Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus // Topology. 1982. Vol. 21. P. 457.
21. *Mather J., Forni G.* Action Minimizing orbits in Hamiltonian system // Lecture Not. in Math. Springer, Berlin, 1994. Vol. 1589.
22. *Соболевский А.Н.* О периодических решениях уравнения Гамильтона – Якоби с периодической силой // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. С. 265.
23. *Levallois P., Tabanov M.B.* Separation des separatrices du billiard elliptique pour une perturbation algebrique et symetrique de l'ellipse // C.R. Acad. Sci. Paris. 1993. T. 316. Serie 1, № 6. P. 589.
24. *Donnay V.J.* Geodesic flow on the two-sphere. Part 1: Positive measure entropy // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1988. Vol. 8. P. 531.
25. *Donnay V.J.* Geodesic flow on the two-sphere. Part 2: Ergodicity// In: Dynamical Systems, Springer Lect. Notes in Math. 1988. Vol. 1342. P. 112.
26. *Burns K., Gerber M.* Real analytic Bernoulli geodesic flows on S^2 // Ergodic Theory and Dyn. Syst. 1989. Vol. 9. P. 27.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 25.04.01

DYNAMICS OF BILLIARDS WITH PERIODICALLY TIME-DEPENDENT BOUNDARIES

A.Yu. Loskutov, L.G.Akinshin, A.N.Sobolevskii

Dynamical systems corresponding to billiards with periodic perturbed boundaries are investigated. A general approach going back to the Aubrey – Mather theory is proposed. On the basis of investigations of the billiard maps, planar billiards with time-dependent boundaries in the form of stadium and circle, and billiards on two-dimensional sphere with the boundary formed by a disk of the varying radius are considered.

Лоскутов Александр Юрьевич – доктор физико–математических наук, профессор физического факультета МГУ. Область профессиональных интересов: теория динамических систем и ее приложения. Опубликовал более 100 научных работ, среди которых учебные пособия и монографии. Лауреат премии им. И.И. Шувалова по математике и физике (1998).

E–mail: loskutov@moldyn.phys.msu.su

Акиншин Леонид Геннадиевич – родился в Первоуральске Свердловской области (1971). Окончил физический факультет МГУ (1995). В настоящее время – аспирант кафедры полимеров и кристаллов физического факультета. Имеет 9 научных публикаций в отечественных и зарубежных журналах.

Соболевский Андрей Николаевич – родился в 1974 году, окончил физический факультет МГУ в (1996), защитил кандидатскую диссертацию (1999). В настоящее время – ассистент кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета. Область научных интересов: дифференциальные уравнения в частных производных, теория сплошных сред, теория оптимизации. Опубликовал 15 работ в ведущих научных журналах.