



ПОРЯДОК И ХАОС В МОДИФИЦИРОВАННОМ ЛОГИСТИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

С.Н. Владимиров, В.В. Негруль

В представленной работе рассматривается актуальная на современном этапе проблема создания робастных источников хаотических сигналов. Такие источники совершенно необходимы при разработке современных систем передачи, хранения и обработки информации. Очевидно, что они должны быть прецизионными, то есть обладать устойчивыми относительно вариаций параметров статистическими характеристиками, а также достаточно просто реализуемыми на практике устройствами. В этой связи ставится и решается задача исследования динамики модифицированного логистического отображения, а также задача сопоставления данного вида математической модели с реальной физической системой.

Определены границы и бассейн притяжения аттрактора временного ряда, порожденного отображением, найдены значения параметра порядка, разделяющие регулярные, хаотические и строго хаотические типы движений. Получены аналитические соотношения для вычисления энтропии Колмогорова – Синяя и информационной энтропии Шеннона. Показано, что при зарождении хаотического движения поведение параметра порядка соответствует фазовому переходу второго рода, установлена грубость возникающего аттрактора. Доказана связь исследуемого отображения с физической системой с запаздывающей обратной связью, имеющей бесконечную размерность фазового пространства. Полученные результаты указывают на перспективность использования модифицированного логистического отображения в качестве основы функционирования источников хаотических колебаний, реализованных в аналоговой и цифровой форме.

В настоящее время актуальной является задача создания прецизионных, легко тиражируемых генераторов хаоса. Такие генераторы могут найти применение в устройствах конфиденциальной передачи информации по радиоканалам и компьютерным коммуникационным сетям, устройствах радиопротиводействия, системах нетрадиционного воздействия на биологические объекты, при моделировании нейронных сетей и в ряде других приложений. Решение указанной задачи может быть достигнуто проектированием специализированных микросхем, созданием программируемых логических устройств и различного рода микропроцессорных систем. При этом весьма важным представляется построение математических моделей, позволяющих получить хаотические типы движений с точно прогнозируемыми и устойчивыми относительно вариаций параметров модели характеристиками. Так, одной из важнейших характеристик, определяющей степень хаотичности движений, является энтропия К Колмогорова – Синяя [1,2]. В качестве простейшей математической модели

может быть выбрано какое-либо одномерное отображение, поскольку оно может обеспечить наиболее быструю генерацию хаотической последовательности цифровыми автоматами и, следовательно, наивысшую скорость воспроизводства энтропии в единицу времени $f_T K/n$, где f_T – тактовая частота цифрового автомата, n – количество тактов, требуемых для выполнения им одной итерации отображения. Так, например, если отображение за одну итерацию обеспечивает $K=1$ бит, $f_T=10^7$ Гц и $n=10$, то можно синтезировать временную последовательность с метрической энтропией 10^6 бит/с.

Возьмем за основу детально изученное [3–7] одномерное логистическое отображение, динамика которого определяется следующим соотношением:

$$x_{k+1} = \alpha x_k (1 - x_k). \quad (1)$$

Единственным изменяемым параметром такого отображения является α . При вариациях этого параметра получаются регулярные и хаотические временные последовательности, поэтому α играет роль параметра порядка. Заменой переменных каскад (1) может быть сведен к следующему представлению:

$$x_{k+1} = 1 - \alpha x_k^2. \quad (2)$$

Набор операций, которые должен выполнить цифровой автомат для реализации одной итерации отображения (2), сравнительно невелик – две операции умножения, инверсия и сложение. Тем не менее, рассматриваемый алгоритм является малоприменимым для его реализации в «железе». Главным недостатком (2) является непредсказуемое чередование регулярных и хаотических движений при малейших вариациях параметра порядка. Даже при сохранении хаотичности статистические свойства последовательности $\{x_k\}$ сильно изменяются, о чем свидетельствует крайне сложная зависимость показателя Ляпунова от α . Причина этих недостатков объясняется тем, что логистическое отображение имеет в фазовом пространстве квазиаттрактор. Естественно, отображение с указанными особенностями не может быть положено в основу функционирования прецизионного генератора хаоса. Между тем, модификация отображения (2), рассмотренная в следующих разделах, позволяет радикальным образом улучшить ситуацию и обеспечить устойчивое воспроизводство хаотического временного ряда $\{x_k\}$ с точно известными характеристиками.

1. Неподвижные точки отображения, границы аттрактора и бассейн притяжения

Модификация логистического отображения (2) заключается в замене квадратичного члена x^2 на $|x|$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) = 1 - \alpha |x_k|. \quad (3)$$

Впервые такая замена была проведена Лози [8] в двумерном отображении Хенона [9 – 10]. Позднее, в работах [11, 12] также рассматривались свойства отображений вида $x_{k+1} = 1 - \alpha |x_k|^z$, $z \geq 1$. Однако анализ, проведенный в этих работах, далеко не полон. Кроме того, некоторые положения выглядят спорными. В частности, утверждается, что при $z=1$, $\alpha \geq 1$ переход к хаосу происходит по сценарию бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода удовлетворяющей правилу $\alpha_\infty - \alpha_n \sim 1/2^n$, $n=1,2,3,\dots$, то есть отношения длин последовательных интервалов между бифуркационными значениями параметра порядка уменьша-

ются каждый раз вдвое. Но в рассматриваемом случае ляпуновский характеристический показатель может быть рассчитан аналитически (см. ниже) и его значение при $\alpha > 1$ строго положительно, что соответствует хаотическим режимам. Поэтому представляется необходимым проведение дополнительных исследований.

На рис. 1 представлены отображения (2) и (3). Наряду с определенным качественным сходством имеет место и существенное различие. Для логистического отображения (2) модуль его крутизны $|\partial\Phi(x)/\partial x| = 2\alpha x$ зависит от значения переменной x , а в случае каскада (3) является неизменной величиной $|\partial\Phi(x)/\partial x| = \alpha$. Именно это обстоятельство определяет радикальное различие свойств анализируемых математических моделей.

Численный эксперимент позволил установить, что при $\alpha > 2$ отображение (3) не имеет аттрактора, поскольку все траектории $\{x_k\}$ уходят в бесконечность независимо от стартовой точки x_0 . Поэтому область допустимых значений параметра порядка определяется неравенством вида $0 \leq \alpha \leq 2$.

Определим неподвижные точки отображения (3), решая уравнение $x = \Phi(x)$. Это уравнение имеет корень $x_{10} = 1/(1+\alpha)$ во всей области допустимых значений α . При $\alpha > 1$ появляется еще и вторая неподвижная точка $x_{20} = 1/(1-\alpha)$. Устойчивость этих точек определяется значением модуля $|\partial\Phi(x)/\partial x| = \alpha$. В случае $\alpha < 1$ первая из точек устойчива, а при $\alpha > 1$ обе точки теряют устойчивость.

Численно установлено, что границы аттрактора зависят от α . При $0 \leq \alpha < 1$ аттрактором является просто первая неподвижная точка x_{10} , а при $1 < \alpha \leq 2$ нижняя x_{\min} и верхняя x_{\max} границы аттрактора определены соотношением

$$x_{\min} = 1 - \alpha, \quad x_{\max} = 1, \quad (4)$$

вследствие чего аттрактор является несимметричным, несмотря на симметричность порождающего его отображения.

Бассейн притяжения аттрактора устроен следующим образом. При $0 \leq \alpha < 1$ любое начальное условие приводит к точке x_{10} , то есть бассейном притяжения является вся числовая ось $x \in (-\infty, \infty)$. При $1 < \alpha \leq 2$ область допустимых начальных значений заключена в открытом интервале $|x_0| < x_{20}$. Границы аттрактора и бассейна притяжения представлены на рис. 2. Точка x_{20} касается границы аттрактора лишь при значении $\alpha = 2$. Интересно отметить, что в этом случае точка $x_{20} = 1$ становится притягивающей, несмотря на выполнение условия $|\partial\Phi(x)/\partial x| = 2 > 1$. Установлено, что при любом начальном x_0 , принадлежащем бассейну притяжения, траектория $\{x_k\}$ после ряда итераций притянется точкой x_{20} и останется в ней навсегда. Указанное противоречие имеет логичное объяснение, связанное с особенностями представления чисел в компьютере. Пусть для определенности

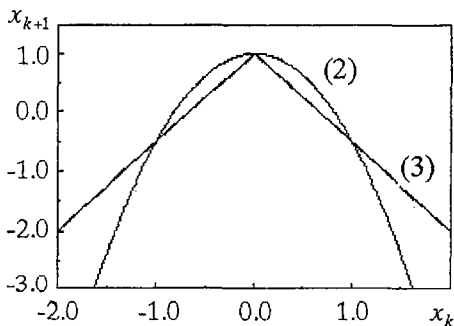


Рис. 1. Логистическое (2) и модифицированное логистическое (3) отображения при $\alpha = 1.5$

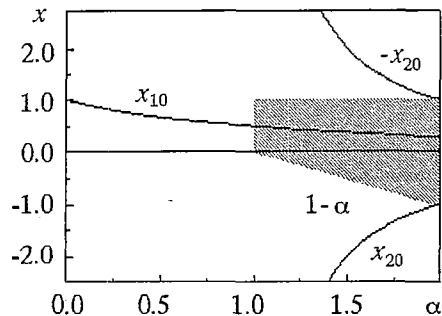


Рис. 2. Бассейн притяжения и границы аттрактора; x_{10}, x_{20} – неподвижные точки отображения

система (3) стартует из точки $x_0 \in (0,1)$. В оперативной памяти компьютера эта точка будет представлена (точно или приближенно) в двоичной форме

$$x_0 = \sum_{r=1}^Q b_r / 2^r, \quad b_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что при $\alpha=2$ ровно через Q итераций получим

$$x_Q = 2^0 + (-1)^Q b_Q + \sum_{r=1}^{Q-1} (-1)^r 2^{-r} + (-1)^Q 2^{Q-r} b_r.$$

Теперь x_Q точно представляется в памяти компьютера, а отображение (3) при $\alpha=2$ не вносит при итерациях какой-либо неопределенности. Нет неопределенности – нет хаоса.

Естественно, в реальной физической системе вследствие неустранимых внутренних флуктуаций такая ситуация нереализуема и цифровой автомат может генерировать хаотическую последовательность и при $\alpha=2$.

2. Бифуркационный и спектральный анализ временных рядов, порождаемых отображением

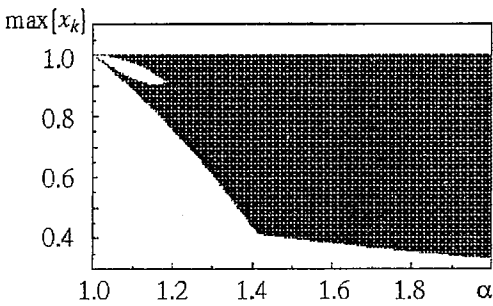


Рис. 3. Отображение (3). Бифуркационная диаграмма

Начнем исследование предлагаемого отображения с рассмотрения бифуркационной диаграммы (рис. 3), представляющей собой зависимость максимумов временного ряда $\{x_k\}$ от параметра порядка α .

Анализ бифуркационной диаграммы позволяет установить следующее. При превышении параметром порядка значения $\alpha > 1$ происходит бифуркация, подобная бифуркации удвоения периода Фейгенбаума. Однако в данном случае линии диаграммы уже размыты, максимумы временного ряда плотно покрывают некоторые интервалы значений. Фурье-спектр временного ряда, построенный при $\alpha=1.1$ (рис. 4, а), позволяет заключить,

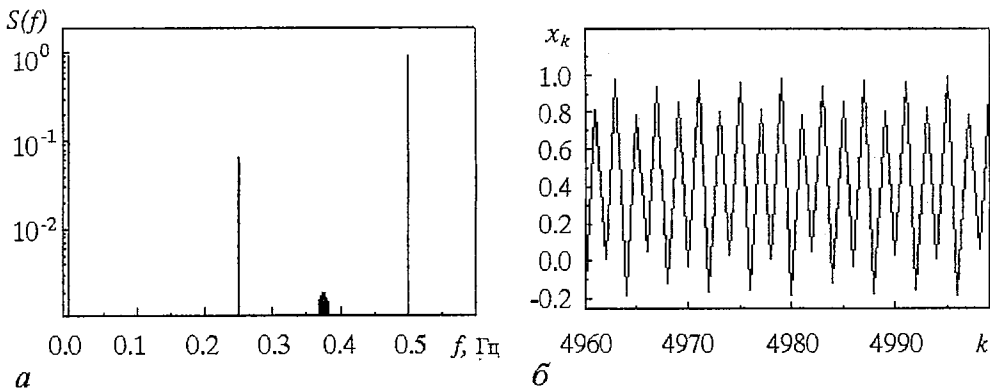


Рис. 4. Фурье-спектр $S(f)$ (а) и временной ряд $\{x_k\}$ (б), порожденные отображением (3) при $\alpha=1.1$

что наряду с постоянной составляющей и двумя гармоническими компонентами, частоты которых отличаются ровно вдвое, имеются и непрерывно распределенные спектральные составляющие, лежащие в окрестности частоты 0.375 Гц. Подобная ситуация может свидетельствовать как о возникновении хаотического аттрактора, так и о существовании странного нехаотического аттрактора [13].

Наряду со спектральным представляет интерес и временное представление траектории отображения (рис. 4, б). Характер процесса типичен для бифуркации удвоения периода с той разницей, что максимумы временной реализации при разных значениях номера итерации отображения принимают несколько различные значения.

Дальнейший анализ бифуркационной диаграммы показывает, что с ростом параметра порядка обе ветви диаграммы расширяются и при $\alpha \approx 1.18$ сливаются. В дальнейшем диаграмма остается однородной и не позволяет получить дополнительную информацию о процессах в системе.

Фурье-анализ позволил установить, что с дальнейшим ростом α амплитуды регулярных составляющих убывают, а континуальная часть спектра развивается. При значении $\alpha > 1.5$ гармонические составляющие в спектре становятся неразличимыми на фоне сплошного шумоподобного пьедестала. Данную ситуацию демонстрирует рис. 5, а. Из регулярных компонент наблюдается лишь постоянная составляющая, наличие которой однозначно обусловлено асимметрией аттрактора.

Фрагмент временной реализации, соответствующий рассмотренному фурье-спектру, представлен на рис. 5, б. Из ограниченности и неповторяемости временной реализации можно сделать предположение о ее хаотическом характере. Однако окончательные выводы можно будет получить только после установления существенной зависимости динамики отображения (3) от начальных условий, определения знака и значения ляпуновского характеристического показателя, доказательства транзитивности отображения и плотности его периодических точек [14]. Несмотря на то, что из транзитивности и плотности периодических точек отображения однозначно следует существенная зависимость его динамики от начальных условий [15], мы, преследуя методические цели, посчитали необходимым доказать зависимость динамики каскада (3) от начальных условий, исходя непосредственно из свойств модифицированного логистического отображения. Необходимый анализ проведен в следующем разделе.

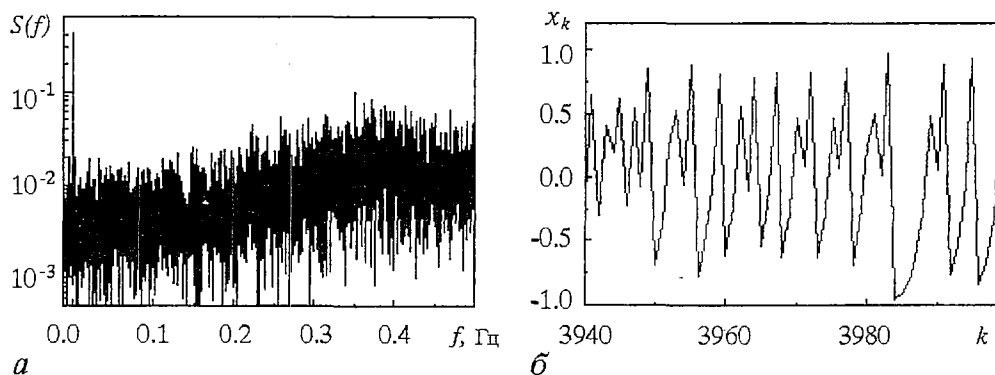


Рис. 5. Фурье-спектр $S(f)$ (а) и временной ряд $\{x_k\}$ (б), порожденные отображением (3) при $\alpha=1.75$

3. Хаос и строгий хаос в модифицированном квадратичном отображении

Пусть $I \subset (1-\alpha, 1)$ – интервал, в котором заключены все точки фазовой траектории $\{x_k\}$, принадлежащие аттрактору отображения (3). Пусть некоторое открытое множество U , содержащее точки x и y , принадлежит интервалу I . Для установления существенной зависимости от начальных условий необходимо доказать, что для некоторого $\delta > 0$ существует такое целое число $n > 0$, что $d(\Phi^n(x) - \Phi^n(y)) > \delta$, где символом d обозначено определенное подходящим образом расстояние между точками на аттракторе, а верхний индекс n – номер итерации отображения $\Phi(x)$.

Пусть множеству U принадлежат две первоначально близкие точки x_0 и $y_0 = x_0 + \varepsilon$. Расстояние между ними при $\alpha > 1$ после n итераций

$$\begin{aligned} d(y_{n+1} - x_{n+1}) &= |\Phi^n(x_0 + \varepsilon) - \Phi^n(x_0)| \approx \\ &\approx |\varepsilon d\Phi^n(x_0)/dx_0| = |\varepsilon \prod_{i=1}^n (d\Phi(x_i)/dx_i)| = |\varepsilon \alpha^n| > |\varepsilon \alpha|. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, можно взять $n=2$, а $\delta = |\varepsilon \alpha|$, что и доказывает существенную зависимость от начальных условий.

Вычислим характеристический показатель Ляпунова. Примем во внимание, что локальный показатель Λ_k определяет связь между расстояниями d_{k+1} и d_k , разделяющими соседние точки фазовой траектории [3–7],

$$\Lambda_k = \log_2(d_{k+1}/d_k). \quad (6)$$

Выбор основания логарифма в (6) произволен и в данном случае определен предпочтениями авторов. Из соотношений (5) следует, что за одну итерацию отношение d_{k+1}/d_k возрастает в α раз и, следовательно, $\Lambda_k = \log_2 \alpha$.

Ляпуновский характеристический показатель получается усреднением всех локальных показателей, вычисленных вдоль траектории, то есть $\Lambda = \langle \Lambda_k \rangle_{k=1}^N$. Для анализируемого отображения все Λ_k совпадают, что окончательно дает значение

$$\Lambda = 1/N \sum_{k=1}^N \log_2 \alpha = \log_2 \alpha. \quad (7)$$

Обратим внимание, что в окрестности критической точки $\alpha=1$ ляпуновский показатель изменяется по степенному закону $\Lambda \approx \alpha - 1$, что для термодинамических систем соответствует фазовому переходу второго рода. При превышении параметром порядка критической точки зависимость $\Lambda(\alpha)$ представляет собой монотонную, положительно определенную функцию. Это однозначно указывает на то, что на аттракторе нет устойчивых неподвижных точек и, следовательно, отсутствуют окна устойчивости и периодичности. Поскольку все фазовые траектории на аттракторе неустойчивы, а вариации параметра порядка не приводят к возникновению регулярных движений, то аттрактор, порождаемый отображением (3), можно отнести к классу квазигиперболических [7].

Энтропия Колмогорова – Синяя для одномерного отображения, согласно теореме Песина [16], может быть определена следующим образом:

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \Lambda(x) dx.$$

Здесь $p(x)$ – плотность распределения фазовой переменной на аттракторе. Поскольку в нашем случае Λ есть постоянная величина, то с учетом условия нормировки

$$K = \Lambda = \log_2 \alpha. \quad (8)$$

В последнем соотношении, в силу выбранного основания логарифма, энтропия выражается в битах на итерацию.

Определим изменение информационной энтропии Шеннона, представляющей собой меру неопределенности знания о состоянии системы. Для этого допустим, что исходное состояние системы x_0 известно нам с точностью ϵ . Тогда энтропия Шеннона определится следующим образом:

$$H_0 = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx = -\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} (1/\epsilon) \log_2 (1/\epsilon) dx = \log_2 \epsilon.$$

При записи последнего соотношения использовано предположение о равновероятном нахождении точки x_0 внутри малого интервала неопределенности ϵ . Через n итераций длина этого интервала (5) увеличится до значения $\alpha^n \epsilon$. Теперь

$$H_n = \int_{-\alpha^n \epsilon/2}^{\alpha^n \epsilon/2} 1/(\alpha^n \epsilon) \log_2 (1/(\alpha^n \epsilon)) dx = \log_2 \alpha^n \epsilon,$$

и изменение информационной энтропии за одну итерацию составит

$$\Delta H = (H_n - H_0)/n = \log_2 \alpha = K. \quad (9)$$

Поскольку энтропия Колмогорова – Синяя есть средняя скорость потери информации о состоянии системы с течением времени [1,2], то полученная связь между K и ΔH представляется вполне естественной. Соотношение (9) указывает на то, что отображение непрерывно воспроизводит информацию, в силу чего наше знание о состоянии процесса уменьшается [17].

Несмотря на то, что нами установлена существенная зависимость от начальных условий и положительность энтропии Колмогорова – Синяя, анализ хаотических свойств отображения (3) не может считаться законченным. Дело в том, что согласно существующей классификации хаос может быть простым и строгим [14,18]. Для существования строго хаотического режима необходимо наличие таких областей значений параметра порядка α , при которых (3) транзитивно, а его множество периодических точек плотно.

Доказать транзитивность исследуемой системы достаточно просто. Действительно, транзитивность означает, что для любой пары U и V открытых множеств, принадлежащих аттрактору, найдется такое n , что $\Phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Данное условие указывает на пересечение множеств после n -й итерации отображения, что означает перемешивание фазовых траекторий. Доказательство следует из установленного ранее растягивающего свойства отображения. В силу этого свойства любое сколь угодно малое множество U , после достаточного числа итераций покроет весь аттрактор I и, следовательно, пересечется с любым произвольно выбранным множеством V , также принадлежащим аттрактору I .

Доказательство плотности периодических точек на аттракторе существенно сложнее. Поскольку периодические точки отображения являются корнями уравнения

$$x = \Phi^n(x), \quad (10)$$

то с учетом существенной нелинейности отображения (3) не обойтись без привлечения вычислительной техники. Лишь в случае $\alpha \rightarrow 2$ нетрудно установить, что уравнение (10) имеет ровно 2^n корней. Поэтому с ростом n в любой, пусть бесконечно малой, окрестности произвольно выбранной точки на аттракторе $x \in I$ окажется одна из периодических точек. Следовательно, при $\alpha \rightarrow 2$ периодические точки отображения плотны на интервале I .

В общем же случае будем поступать следующим образом. Поскольку для нашего анализа важны не сами значения корней уравнения (10), а лишь их число,

то достаточно исследовать число перемен знака в уравнении $x - \Phi^n(x) = 0$ при изменении значений x внутри границ аттрактора, определенных соотношением (4). Компьютерный эксперимент позволил установить следующее. Существует второе критическое значение параметра порядка $\alpha_2 \approx 1.427$, разделяющее хаотическое и строго хаотическое состояния системы.

Обратимся к рис. 6, а, на котором представлена зависимость числа N периодических точек модифицированного логистического отображения от номера его итерации n . Эта зависимость построена для двух значений параметра порядка, меньших α_2 . Видно, что при четном числе итераций количество периодических точек растет с увеличением номера итерации по степенному закону. Но при любой нечетной итерации существует только одна периодическая точка отображения! Следовательно, условие плотности периодических точек нарушается, и хаос не является строгим.

Ситуация меняется при превышении параметром порядка второго критического значения. Так, из анализа рис. 6, б следует, что при $\alpha > \alpha_2$ число периодических точек растет с увеличением n по степенному закону. Поэтому с ростом n в любой, пусть бесконечно малой, окрестности произвольно выбранной точки на аттракторе $x \in I$ окажется одна из периодических точек. Следовательно, при $\alpha > \alpha_2$ периодические точки отображения плотны на интервале I . Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. *Отображение $x_{k+1} = 1 - \alpha|x_k|$ хаотично на интервале $x \in (1-\alpha, 1)$ при $1 < \alpha < 2$, причем при $\alpha > \alpha_2 \approx 1.427$ — строго хаотично.*

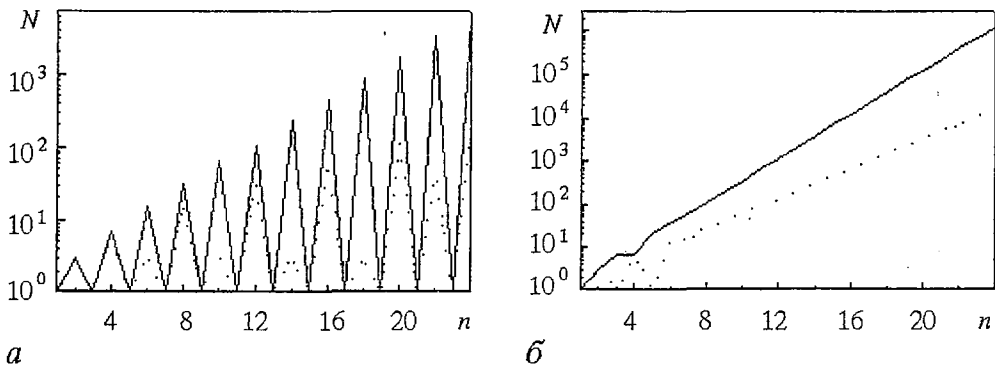


Рис. 6. Зависимость числа периодических точек отображения (3) от номера его итерации: а — для $\alpha < \alpha_2$, $\alpha = 1.2$ — пунктирная линия, 1.4 — сплошная; б — для $\alpha > \alpha_2$, $\alpha = 1.5$ — пунктирная линия, 1.8 — сплошная

4. Сопоставление отображения с реальной динамической системой

Известно, что в целом ряде случаев какому-либо отображению можно поставить в соответствие реальную физическую систему с непрерывным временем. Здесь под соответствием понимается полное или частичное совпадение основных характерных черт их динамики. Но исследование отображений всегда проще исследования потоков, поэтому к изучению свойств систем с дискретным временем проявляется значительный интерес.

Проверим соответствие изучаемому отображению (3) динамической системы с бесконечномерным фазовым пространством. Вначале рассмотрим идеализированную динамическую систему с запаздыванием представленную на рис. 7, а.

Идеализация заключается в пренебрежении селективными свойствами

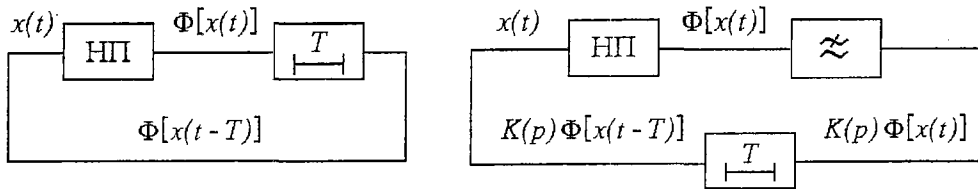


Рис. 7. Функциональные схемы автоколебательных систем с запаздыванием: НП – нелинейный преобразователь, T – время задержки сигнала $x(t)$ линией задержки, $K(p = d/dt)$ – линейный оператор, определяющий свойства селективного элемента

элементов, составляющих функциональную схему. Нетрудно установить, что движение в рассматриваемой структуре подчинено уравнению

$$x(t) = \Phi[x(t-T)]. \quad (11)$$

Обозначим $x_k = x(t-T)$, $x_{k+1} = x(t)$. Теперь из (11) сразу получаем разностное уравнение вида (3). Таким образом, отображение (3) определяет связь между выборками сигнала в динамической системе (11) в случае, когда эти выборки берутся с шагом $\Delta t = T$.

Заметим, что уравнение (11) описывает движение в системе с бесконечным числом степеней свободы, поскольку для его однозначного решения при $t > 0$ необходимо задать бесконечное число начальных значений функции $x(t)$, принадлежащих интервалу времени $t \in [-T, 0]$. Именно поэтому любое одномерное отображение и способно, естественно при определенных значениях параметров, продемонстрировать сложную хаотическую динамику.

Очевидно, что реализовать на практике динамическую систему, движение в которой подчинено уравнению (11), не представляется возможным, поскольку входящие в ее состав элементы должны быть всеполосными с не зависящими от частоты характеристиками. Поэтому в состав функциональной схемы необходимо ввести хотя бы один избирательный элемент, обладающий конечной полосой пропускания. При этом структура динамической системы должна быть изменена, как это сделано на рис. 7, б. Теперь движение в системе будет описываться уже дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом

$$x(t) = K(p)\Phi[x(t-T)]. \quad (12)$$

Например, если в качестве избирательного элемента выбрать фильтр нижних частот первого порядка с постоянной времени τ , то линейный дифференциальный оператор примет вид $K(p) = 1/(\tau p + 1)$ и уравнение (12) может быть записано в развернутой форме

$$\tau dx(t)/dt = \Phi[x(t-T)] - x(t), \quad (13)$$

которая при $\tau \rightarrow 0$ переходит в уравнение (11).

Весьма интересным и важным представляется получение ответа на вопрос о сопоставимости движений в системах (11) и (13) при $\tau \neq 0$. Если эти движения сходны в основных чертах, то это будет означать, что и отображение (3) несет на себе «отпечаток» динамики потока (13) или, в общем случае, потока (12).

Получение однозначного ответа на поставленный вопрос требует тщательных и развернутых численных и экспериментальных исследований динамики отображений и потоков с идентичными нелинейностями. В нашем случае в качестве первого шага был поставлен эксперимент с использованием лабораторного макета, принципиальная схема которого представлена на рис 8. Макет функционирует следующим образом. На операционных усилителях DA 1,

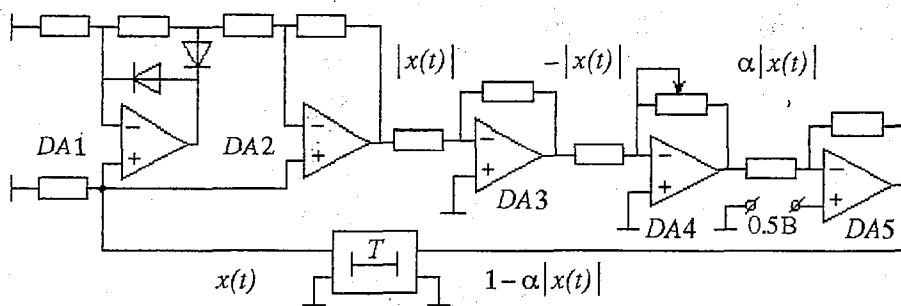


Рис. 8. Принципиальная схема лабораторного макета динамической системы с запаздыванием, в котором реализована нелинейность вида $\Phi(x) = 1 - \alpha|x|$

DA 2 реализован блок вычисления модуля непрерывного сигнала $x(t)$, далее в кольце обратной связи находятся инвертор DA 3 и усилитель DA 4. Сумматор DA 5 осуществляет вычитание сигнала $\alpha|x(t)|$ из единичного напряжения, после чего результат задерживается на время T линией задержки. Задержанный сигнал вновь поступает на вход блока вычисления модуля, замыкая тем самым кольцо обратной связи.

Эксперименты проводились с линиями задержки, обеспечивающими как фазовое запаздывание (многозвенные широкополосные LC фильтры), так и реальное временное (коаксиальный кабель). Величина запаздывания варьировалась в диапазоне от 0.1 мкс до 10 мкс. Кроме того, в кольцо обратной связи включались дополнительные фильтры с малой частотой среза, то есть с большой постоянной времени. Безусловно, все экспериментальные результаты различались в деталях. Но все их объединяло главное: общая закономерность бифуркационных явлений, приводившая от регулярных автоколебаний к хаотическим типам движений. Поэтому основные черты происходящих явлений достаточно продемонстрировать на примере какого-либо одного эксперимента.

На рис. 9 представлены экспериментальные результаты, полученные с использованием линии задержки, выполненной на основе 100-звенного LC фильтра нижних частот, имевшего частоту среза 500 кГц и время задержки 10 мкс. Дополнительные фильтры в кольцо обратной связи не включались.

Результаты представлены в виде матрицы фотографий, которая организована следующим образом. Каждая строка матрицы отражает динамику системы при фиксированном значении параметра порядка α . Строки матрицы сверху вниз получены при увеличении значения этого параметра. В первом столбце матрицы изображены осциллограммы сигнала $x(t)$, во втором – проекции на плоскость $x(t-T), x(t)$ фазовых портретов, в третьем – спектрограммы процесса $x(t)$. Проведем краткий анализ приведенных результатов. При достижении параметром порядка α некоторого значения (зависящего от вида амплитудно-частотной характеристики и определяемого условием баланса амплитуд) система переходит из состояния покоя в режим генерации периодических колебаний (первая строка матрицы). Частота генерации в каждом конкретном случае определяется условием баланса фаз. Если баланс фаз выполняется одновременно на нескольких частотах, что имеет место при достаточной величине задержки T , то, в силу энергетической конкуренции, генерируется та колебательная компонента, для которой энергетический баланс оптимален. Необходимо отметить, что подавление слабого сигнала сильным не является обязательным условием [19,20], а обусловлено конкретным видом нелинейных и частотных свойств генерирующей структуры. В описываемом эксперименте возбуждалась 26-я (от нулевой частоты) колебательная компонента на частоте примерно 1.3 МГц.

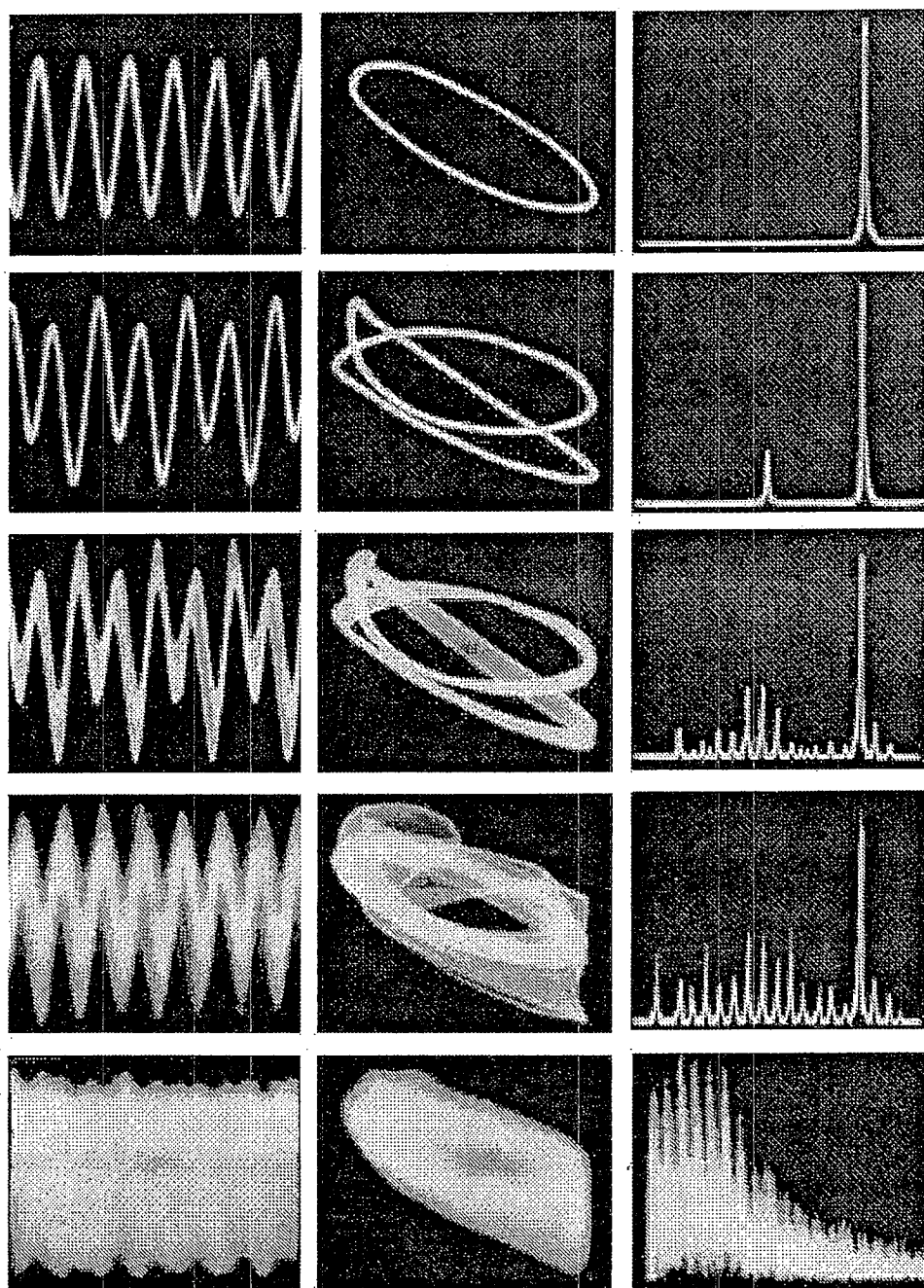


Рис. 9. Последовательность бифуркационных явлений, приводящих от регулярных движений к хаотическим (физический эксперимент), в автоколебательной системе с запаздыванием и нелинейностью вида $\Phi(x) = 1 - \alpha|x|$

В дальнейшем, по мере роста α возникает единственная бифуркация удвоения периода Фейгенбаума (вторая строка матрицы). Затем спектр процесса все более усложняется, обогащается неэквидистантными и хаотическими составляющими. При этом в структуре аттрактора еще можно различить регулярные компоненты (третья и четвертая строки матрицы). Бифуркационная последовательность заканчивается возникновением режима генерации сигнала со сплошным спектром, примыкающим к нулевой частоте; наблюдаемый аттрактор имеет близкую к однородной структуру (пятая строка матрицы). В этом режиме

существенные вариации параметров устройства не приводят к сколь-нибудь заметной трансформации аттрактора, что указывает на его грубость.

Как было отмечено ранее, итерации отображения (3) при $\alpha > 2$ уходят в бесконечность. В исследуемой физической системе это невозможно, поскольку сигнал ограничивается операционными усилителями. Поэтому возникает новый тип хаотического аттрактора, который в рамках настоящей работы не может быть рассмотрен.

Сравнение свойств отображения (3) и приведенных результатов экспериментального исследования реальной динамической системы указывает на их хорошее качественное совпадение.

Заключение

В представленной работе изучена динамика модифицированного логистического отображения. Определены границы аттрактора и его бассейн притяжения. Получены аналитические зависимости энтропии Шеннона и Колмогорова – Синая от параметра порядка. Найдены значения параметра порядка, разделяющие регулярные, хаотические и строго хаотические типы движений. Показано, что данное отображение может быть положено в основу функционирования цифровых автоматов, которые в принципе могут воспроизводить хаотические последовательности с точно известными статистическими свойствами. Проведена попытка сопоставления свойств отображения со свойствами динамической системы с бесконечномерным фазовым пространством. В результате численного моделирования и физического эксперимента установлено, что последовательность бифуркационных явлений в изучавшемся отображении весьма близка к бифуркационным процессам в динамической системе с запаздыванием в случае, когда их нелинейности идентичны.

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С.754.
2. Синай Я.Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988.
5. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990.
6. Берже П., Помо Н., Видадь К. Порядок в хаосе: О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
7. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
8. Lozi R. Un attracteur etrange du type attracteur de Henon // J. de Physique. 1978. Vol. 39. (C5). P.9.
9. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Comm. Math. Phys. 1976. Vol. 50. P. 69.
10. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.

11. *Hauser P.R., Tsallis C., Curado M.F.* Criticality of the routes to chaos of the map // *Phys.Rev.A.* 1984. Vol. 30, № 4. P. 2074.
12. *Hu B., Satiya I.I.* A spectrum of universality classes in period doubling and period tripling // *Phys.Lett. A.* 1983. Vol. 98, № 4. P. 143.
13. *Анищенко В.С.* Аттракторы динамических систем // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 1. С. 109.
14. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
15. *Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P.* On Devaney's definition of chaos // *American Math. Monthly.* 1992. Vol. 99, № 4. P. 332.
16. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // *УМН.* 1977. Т. 32, №4. С. 55.
17. *Дмитриев А.С., Старков С.О.* Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации // *Зарубежная радиоэлектроника.* 1998. №11. С. 4.
18. *Devaney R.L.* An introduction to chaotic dynamical systems / Sec. Ed. Addison – Wesley, Reading Mass., 1989.
19. *Владимиров С.Н., Майдановский А.С., Новиков С.С.* Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993.
20. *Владимиров С.Н.* Автопараметрический механизм хаотизации движения в автогенераторе с полосовым фильтром и запаздыванием // *Изв. вузов. Физика.* 1998. №4. С. 91.

*Томский государственный
университет*

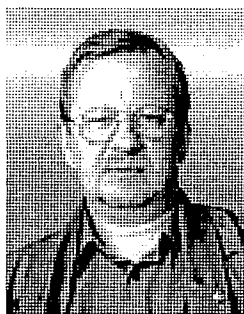
Поступила в редакцию 12.02.01

ORDER AND CHAOS IN MODIFIED LOGISTIC MAP

*S.N. Vladimirov, V.V. Negrul**

The topical problem of making the robust sources of chaotic signals is considered. Using of such sources is quite necessary at working out of modern systems of information transmission, store and processing. Obviously, it must be precise devices, i.e. devices with stable statistical properties regarding to variations of their parameters, and it must be realised sufficiently simply in practice. In this connection both problems of study of modified logistic map dynamics and of comparing given mathematical model with the real physical system are formulated and solved.

The borders and attraction basin of the time series attractor generated by the map were determined. The values of order parameters separating regular, chaotic and strictly chaotic types of motion were found. Analytical expressions for calculating the Kolmogorov entropy and Shannon information entropy were obtained. It was shown, that while generating chaotic motion the order parameter's behaviour corresponds with the second order phase transition. The roughness of the appearing attractor was discovered. Relation between the map being investigated and the physical system with delayed feedback and with infinite phase space dimension was proved. Obtained results make the prospect for application of the modified logistic map as a basis for operation of the chaotic oscillations sources which can be realised in an analogous and numerical form.



Владимиров Сергей Николаевич – родился в 1953 году, окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1980). Кандидат физико-математических наук (1987), доцент кафедры радиоэлектроники Томского госуниверситета. Область научных интересов – физика нелинейных, открытых, существенно неравновесных систем. Автор монографии «Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем» (1993), многих публикаций, связанных с теорией и практикой функционирования генерирующих структур с запаздывающей обратной связью, генерации сверхмощных импульсов генераторами релятивистского типа, генерации и управления хаотическими типами колебаний.



Негруль Владимир Вячеславович – родился в 1976 году, окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1998). В настоящее время – аспирант кафедры радиоэлектроники Томского госуниверситета. Область научных интересов – теория динамического хаоса и его практическое приложение в системах передачи, хранения и обработки информации. Автор ряда научных публикаций, связанных с данными вопросами.