



МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ НАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ, ОДНО ИЗ КОТОРЫХ ИЛИ ОБА «ЗАТУХАЮЩИЕ», С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЯ РОСТА ДОСТИЖЕНИЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ

И.В. Измайлов, Б.Н. Поизнер, В.О. Раводин

Исследуется модель взаимодействия двух научных направлений с квадратичным ограничением роста достижений (аналогичная предложенной В.В. Качаком и Е.С. Мчедловой*), учитывающая инерционность восприятия сообществом «своих» и «чужих» научных достижений. Для выяснения совместного влияния запаздывания, начальных условий и типов взаимодействия направлений на динамику их продуктивности предложено дополнить фазовые портреты и временные реализации построением инициально-финальных отображений (термин авторов).

Обнаружены предельные циклы, в том числе резонанс на торе, а также хаотический режим - эргодический тор. С ростом запаздывания проявляются «окна периодичности»: эргодический тор чередуется с резонансом на торе. Показано, что инерционность восприятия способна усложнять процесс взаимодействия научных сообществ.

Данная статья продолжает цикл работ [1-4] (см. также библиографию в [4]), посвященных составлению математических моделей и выяснению закономерностей взаимодействия двух научных направлений. В предыдущей статье [4] авторы представили результаты моделирования, относящиеся к случаям I и II согласно классификации типов взаимодействия направлений в статье [2]. Ниже описаны данные вычислительных экспериментов, относящиеся к остальным случаям III, IV, V.

Для удобства сравнения результатов будем в дальнейшем использовать обозначения, принятые в [2]. Как и в [4], моделью взаимодействия научных направлений с ограничением развития ($b_1, b_2 \geq 0$) с инерционностью восприятия достижений (мерой которой является величина τ) служат уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= c_1 x(t-\tau)y(t-\tau) - c_2 x(t-\tau) - b_1 x(t-\tau)x(t-\tau), \\ dy(t)/dt &= c_3 y(t-\tau)x(t-\tau) - c_4 y(t-\tau) - b_2 y(t-\tau)y(t-\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

* К сожалению, при подготовке данной статьи авторам не была известна работа: Мчедлова Е.С. Влияние временного запаздывания на динамику взаимодействующих научных направлений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 4. С. 113.

Для системы уравнений (1) можно показать: на плоскости (x, y) существуют прямые такие, что они сплошь покрыты принадлежащими им фазовыми траекториями (здесь полагается, что особые точки являются отдельными фазовыми траекториями, не принадлежащими никакой другой траектории). Причем эти прямые задаются уравнениями

$$y = x(c_3 + b_1)/(c_1 + b_2) \text{ при } c_2 = c_4,$$

$$y = -x c_4 b_1 / (c_2 b_2) - c_4 / b_2 \text{ при } c_4 b_1 / (c_2 b_2) = (c_3 + b_1) / (c_1 + b_2),$$

$$x = 0,$$

$$y = 0,$$

$$y = -c_4 / b_2 \text{ при } c_3 = 0.$$

Поскольку представляет интерес выяснить особенности поведения данной динамической системы в области макропеременных $x \geq 0, y \geq 0$ при $c_3 \neq 0, b_i > 0$, следует исключить тривиальные прямые $x=0, y=0$ и обратиться к прямым

$$y = x(c_3 + b_1)/(c_1 + b_2) \text{ при } c_2 = c_4, \quad (2)$$

$$y = -x c_4 b_1 / (c_2 b_2) - c_4 / b_2 \text{ при } c_4 b_1 / (c_2 b_2) = (c_3 + b_1) / (c_1 + b_2). \quad (3)$$

По мнению авторов, особенности прямолинейных фазовых траекторий, принадлежащих некоторым прямым, выражаются следующими тезисами:

- 1) фазовая траектория остается прямой при любых значениях запаздывания τ ;
- 2) если движение динамической системы происходит по прямолинейной траектории в направлении к предельной точке фазового пространства системы с $\tau=0$, то наличие запаздывания ($\tau > 0$) не влияет на монотонный характер изменения динамических переменных;
- 3) если движение динамической системы происходит в направлении к устойчивой особой точке, не являющейся предельной точкой множества точек, составляющего фазовое пространство системы с $\tau=0$, то существует значение $\tau > 0$, при котором имеют место затухающие колебания (вдоль прямой) вокруг этой особой точки.

Как и прежде, при возникновении в ходе вычислений значения $x < 0$ ($y < 0$) в расчетах полагались характеристики продуктивности $x=0$ ($y=0$).

Величина запаздывания изменялась с различным шагом, и в большинстве представленных здесь случаев он составлял 0.0005, а выбранный нами максимум его был 1.435.

В качестве системы тестовых задач использовались результаты, представленные в статьях [1, 2].

Случай III. Когда оба направления «затухающие», а взаимное влияние положительно ($c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$), условие существования прямой (2) выполняется, а прямой (3) – нет, поскольку предполагается, что параметры ограничения развития $b_i > 0$. Здесь имеют место следующие особенности.

Вариант 3.1. $b_1 = b_2 = 0.5, x_0 = 1.5, y_0 = 2.6$. Как и в случае $\tau = 0$ [2], сохраняется склонность научных направлений к падению продуктивности (см. рис. 6, а [2]). Но наличие запаздывания τ (формально нормированное к $1/c_2$) приводит к возникновению противофазных затухающих колебаний макропеременных x и y . Их амплитуды возрастают с увеличением запаздывания, становясь различимыми на графике при $\tau = 0.155$ (рис. 1, а). Благодаря колебательной динамике значения характеристик продуктивности x, y достигают нулевых значений не одновременно. Из-за роста амплитуд колебаний при увеличении τ (например, при $\tau = 0.535$ на

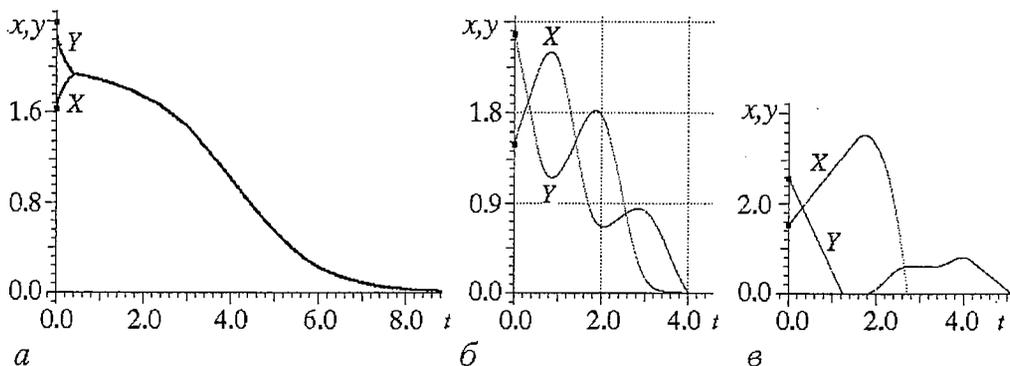


Рис. 1. Решение ситемы уравнений (1) для *варианта 3.1* при различных величинах времени запаздывания τ : *a* – 0.1550, *б* – 0.5350, *в* – 1.435

рис. 1, б) момент достижения нулевых значений, то есть касания графиком оси абсцисс в точке минимума продуктивности, наступает все раньше и раньше (рис. 1, в). А так как колебания противофазны, то первым достичь нуля продуктивности может любое из направлений вне зависимости от соотношения их стартовых условий развития. После достижения нулевого значения макропеременная способна вновь возрасти, однако в ходе дальнейшей эволюции величины x , y необратимо становятся равными нулю (рис. 1, в).

Вариант 3.2. $b_1=b_2=0.5$, $x_0=1.525$, $y_0=2.6$. Если время запаздывания не превышает 0.0085, то, как и в случае $\tau=0$ (см. рис. 6, б [2]), сохраняется склонность научных направлений к кооперативному увеличению продуктивности каждого из них. Но при достижении запаздыванием послебифуркационного значения $\tau=0.0105$ эта склонность меняется на противоположную. В этом случае эволюция макропеременных подобна изображенной на рис. 6, а в [2]. Рост запаздывания приводит к тем же эффектам, что и в *варианте 3.1*.

Вариант 3.3. $b_1=b_2=0.5$, $x_0=1.5$, $y_0=4.0$. В противоположность *варианте 3.2* с ростом запаздывания сначала возникают колебания макропеременных, когда $\tau=0.2205$ (рис. 2, а), а потом при $\tau=0.3405$ тенденция к развитию научных направлений сменяется тенденцией к их затуханию (рис. 2, б).

Вариант 3.4. $b_1=b_2=0.5$, $x_0=3.0$, $y_0=3.5$. В отличие от *варианта 3.3* колебания макропеременных обнаруживаются на графике при $\tau=0.1605$. Но при дальнейшем росте τ смены тенденций, присущей *варианту 3.3*, не наблюдается. Эволюция научных направлений подобна изображенной на рис. 2, а.

Анализ хода временных зависимостей макропеременных x , y целесообразно дополнить построением структуры разбиений проекции фазового пространства на траектории при разных запаздываниях. На фазовых портретах (рис. 3) траектории, начинающиеся в точках, лежащих над диагональю $x=y$, соответствуют *вариантам 3.1–3.4*.

На рис. 3 видно, что пока величина τ мала (*a*), фазовый портрет имеет тот же вид, что и структура разбиений фазовой плоскости на траектории на рис. 5, б в статье [2]. При $\tau=0.1$ (*б*) траектория, соответствующая *варианту 3.2*, становится нисходящей (угасание научных направлений). При $\tau=0.3$ (*в*) все траектории отражают колебательный характер эволюции X , Y . При $\tau=0.4$ (*г*) траектория, соответствующая *варианту 3.3*, становится нисходящей. Рост τ , вызывая увеличение амплитуд колебаний x , y , приводит к образованию фазовых траекторий в форме петель (*д*).

Обобщая содержание данных фазовых портретов, можно утверждать: при наличии запаздывания траектории, начинающиеся достаточно далеко от диагонали,

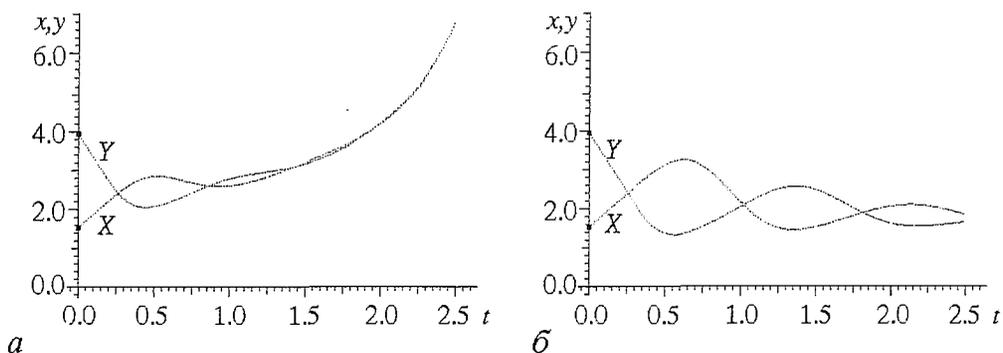


Рис. 2. Решение системы уравнений (1) для варианта 3.2 при различных величинах времени запаздывания τ : а - 0.2205, б - 0.3405

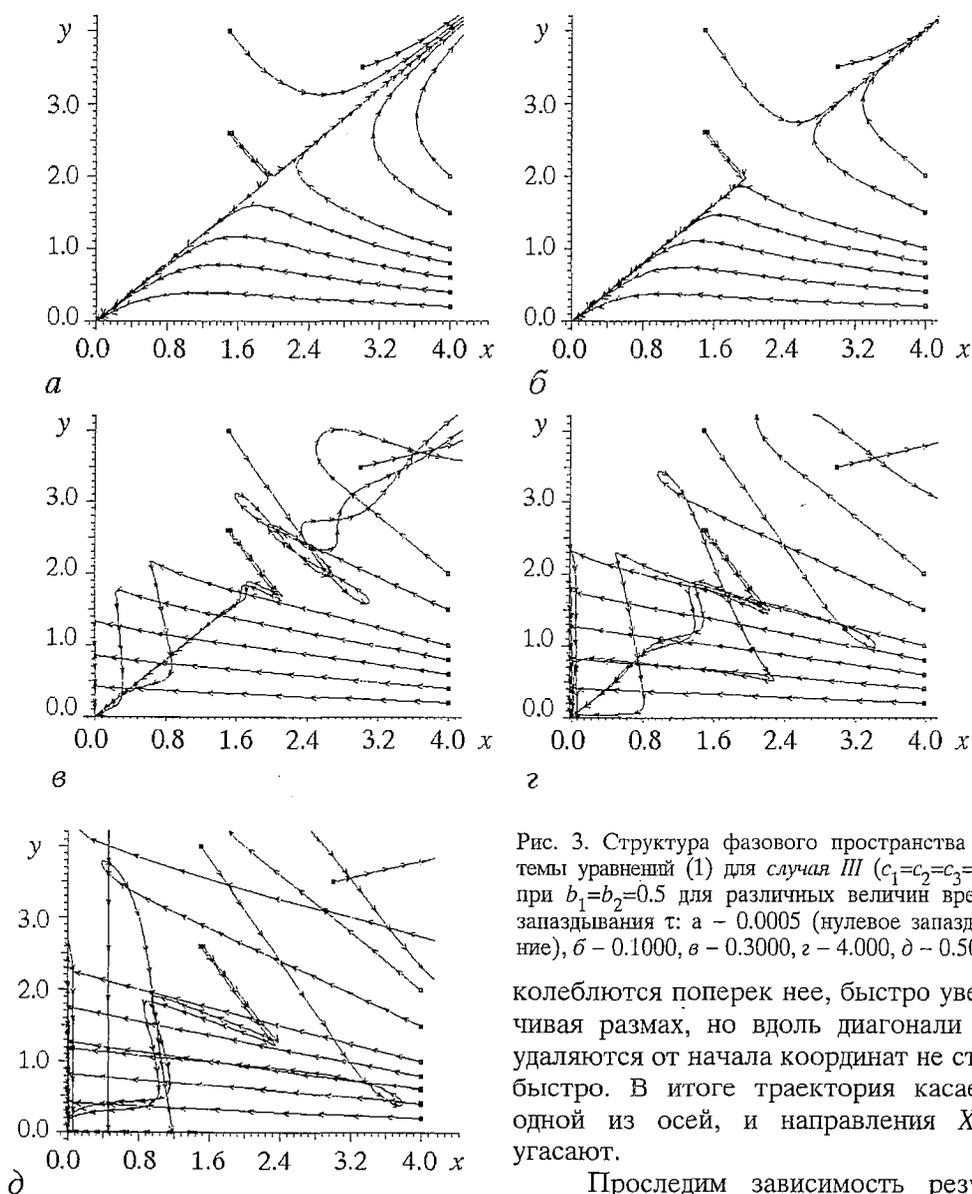


Рис. 3. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая III ($c_1=c_2=c_3=c_4=1$) при $b_1=b_2=0.5$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.0005 (нулевое запаздывание), б - 0.1000, в - 0.3000, г - 0.5000

колеблются поперек нее, быстро увеличивая размах, но вдоль диагонали они удаляются от начала координат не столь быстро. В итоге траектория касается одной из осей, и направления X, Y угасают.

Проследим зависимость резуль-

тата эволюции научных направлений (совместное кооперативное развитие или угасание) от начальных условий при различных значениях запаздывания. Для выяснения особенностей этих зависимостей в случаях III, IV, V построим таблицу, представив в ней возможные финалы эволюции макропеременных (и соответствующие им шесть критериев прекращения вычислений), а также способы изображения финалов на плоскости (x, y) . Тем самым последняя задает графически отображение (функцию) множества начальных условий x_0, y_0 во множество финалов эволюции. Чтобы подчеркнуть его методологическую значимость и физический смысл, назовем его инициально–финальным отображением (инициально–финальной функцией). По аналогии с содержанием рис. 3 в [5] инициально–финальное отображение можно назвать и «картой режимов на плоскости начальных условий».

Таблица

		Критерий прекращения вычислений					
		1	2	3	4	5	6
x		Любое	0	0	∞	const	$t > t_{\max}$
y		0	const	∞	∞	const	
		Способ отображения на плоскости (x, y)					
III		○ ₁	○	○	△ ₃	□ ₄	
IV		○	■ ₂	■	△	□	
V		○	■	■	△	□	

Символ ∞ в таблице соответствует случаю, когда значение макропеременной превышает 10^{500} ; символ $t > t_{\max} = 125$ – когда длительность эволюции макропеременных превосходит установленное предельное значение t_{\max} ; символ const – когда на отрезке времени длиной τ выполняются соотношения $|(dx/dt)/x| < 2 \cdot 10^{-6}$; $|(dy/dt)/y| < 2 \cdot 10^{-6}$, которые служат критерием установления статического режима; символ 0 – когда на отрезке времени длиной τ выполняется соотношение $x=0$ или $y=0$, которое служит критерием исчезновения того или иного научного направления.

Условное обозначение ○ (1, кружок) служит для отображения на плоскости (x, y) областей начальных условий, при которых в финале эволюции оба научных направления исчезают; обозначение ■ (2, заполненный квадратик) – когда исчезает X ; обозначение △ (3, треугольник) – когда происходит рост обеих макропеременных без видимого предела; обозначение □ (4, пустой квадратик) – когда устанавливается статический режим. Построение на плоскости (x, y) областей начальных значений x_0, y_0 , обуславливающих один из возможных финалов эволюции x, y , осуществлялось при варьировании x_0, y_0 с шагом 0.1 в пределах [0.1; 4.0]. Области в этих пределах, не заполненные какой-либо из четырех перечисленных выше фигур, соответствуют финалу, не отвечающему ни одному из условий таблицы.

Чтобы в деталях выяснить совместное влияние начальных условий и запаздывания на финал эволюции научных направлений, обратимся к серии

рисунков, на которых изображены инициально–финальные отображения при различных значениях τ .

Для варианта, когда $b_1=b_2=0.5$, из структуры фазового портрета (рис. 5, б [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально–финальное отображение должно содержать две области. Первая должна быть – покрыта треугольниками (продуктивность обоих научных направлений растет без видимого предела). Вторая область, прилегающая к осям координат, должна быть покрыта кружками (научные направления деградируют). Однако по данным вычислительного эксперимента вторая область остается пустой, то есть финалы в ней не отвечают ни одному из четырех описанных ранее условий (рис. 4, а).

Чтобы объяснить это противоречие, примем во внимание, что научные направления X и Y угасают, приближаясь к 0 асимптотически ($x, y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Следовательно, ни один из критериев 1–3 (см. табл.) исчезновения направлений не может выполняться за конечное время расчета. Поэтому вторую область отображения следует трактовать как соответствующую необратимому разрушению научных направлений.

С увеличением запаздывания в верхнем левом и нижнем правом углах квадрата образуются и расширяются области, соответствующие угасанию обоих научных направлений (рис. 4, б), а область, соответствующая неограниченному росту продуктивности обоих направлений, локализуется (рис. 4, в) вблизи асимптоты $x=y$ (частный случай прямой (2)), где $x > x_s, y > y_s, x_s, y_s$ – координаты седла, показанного на рис. 5, б [2]. Это обстоятельство согласуется с выдвинутым в начале статьи тезисом (см. стр. 120).

Сопоставляя характер эволюции макропеременных применительно к случаю III, можно сделать ряд выводов:

а) наличие запаздывания τ делает возможным колебательное изменение продуктивности научных направлений (отсутствующее, если $\tau=0$ [2]), причем размах колебаний возрастает с увеличением τ ;

б) рост запаздывания вызывает сокращение размеров областей начальных условий x_0, y_0 на плоскости макропеременных x, y , при которых возможно развитие научных направлений;

в) наличие запаздывания способно повлечь как обратимое (во времени t) снижение так и необратимое снижение до нуля макропеременных x, y ;

г) наличие запаздывания делает возможным пересечение проекций фазовых траекторий на плоскость (x, y) , $(x(t)=x(t'), y(t)=y(t'))$, где t' – некоторый момент времени не равный t), но не приводит к образованию предельных циклов;

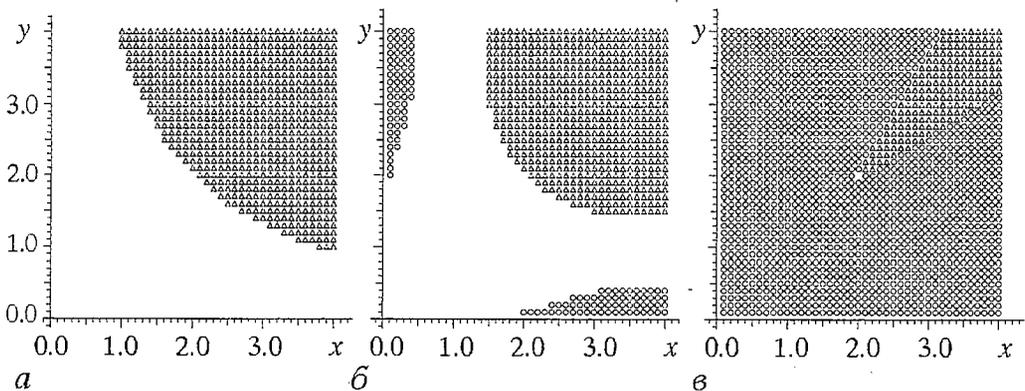


Рис. 4. Инициально–финальные отображения системы (1) для случая III ($c_1=c_2=c_3=c_4=1$) при $b_1=b_2=0.5$ для различных величин времени запаздывания τ : а – 0.0005 (нулевое запаздывание), б – 0.3000, в – 0.9000

д) анализ предложенных инициально-финальных отображений показывает, что рост запаздывания ведет к доминированию области, соответствующей угасанию обоих научных направлений, а область, соответствующая неограниченному росту их продуктивности, примыкает к асимптоте $x=y$ и в пределе вырождается в луч, лежащий на ней.

Случай IV. Когда научные направления противоположных типов кооперируются, то есть взаимодействуют по принципу положительной обратной связи ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$), условие существования прямой (2) не выполняется, а для прямой (3) это условие сводится к равенству $b_1=b_2$. Нелинейная динамика направлений отличается следующим.

Вариант 4.1. $b_1=b_2=0.8$, $x_0=y_0=0.1$. При наличии относительно малого запаздывания ($\tau=0.08050$) характер эволюции научных направлений подобен случаю, когда $\tau=0$ (рис. 8, а [2]), и их продуктивность неограниченно нарастает со временем.

Но с ростом запаздывания минимум продуктивности «затухающего» научного направления X снижается, достигая нуля при $\tau=0.4782497$ (используя метод Эйлера мы брали шаг расчета по времени равным 0.0005). Однако падение x до нуля является временным. По мере увеличения запаздывания продолжительность времени, в течение которого $x=0$, возрастает (рис. 5, а). При переходе от запаздывания $\tau=0.4782497$ к $\tau=0.4782498$ падение x до нуля становится необратимым. «Гибель» направления X влечет ограничение роста продуктивности направления Y (рис. 5, б). Приблизительно при этом же τ эволюция макропеременной u в направлении ее предельного значения приобретает колебательный характер. Размах колебаний возрастает с увеличением запаздывания (рис. 5, в).

Вариант 4.2. $b_1=b_2=0.8$, $x_0=2.5$, $y_0=0.05$. Общие закономерности в характере эволюции продуктивности научных направлений наступают при больших значениях запаздывания, чем в *варианте 4.1*. Макропеременная x достигает нуля при $\tau=0.2030$, причем необратимо, вызывая ограничение роста y . Начиная с $\tau=0.4905$, на графике становятся заметными колебания продуктивности и их размах возрастает с увеличением запаздывания.

Вариант 4.3. $b_1=1.5$, $b_2=0.8$, $x_0=y_0=0.1$. В отличие от *вариантов 4.1* и *4.2* уже при $\tau=0.458$ минимум продуктивности x достигает нуля, а динамика y становится колебательной. Чтобы выявить особенности динамики взаимодействия научных направлений, построим фазовые портреты.

Когда $b_1=b_2=0.8$, пока величина τ мала, фазовый портрет имеет тот же вид, что и структура разбиений фазовой плоскости на траектории на рис. 7, а в [2]. С ростом величины τ фазовые траектории становятся способны пересечь прямую (3), и тогда возникают их колебания около прямой (рис. 6, а). Дальнейшее увеличение запаздывания приводит к тому, что некоторые фазовые траектории практически сразу достигают одну из осей, а другие сначала описывают

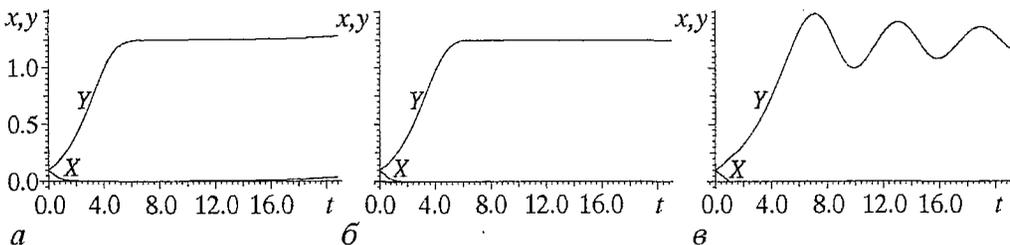


Рис. 5. Решение системы уравнений (1) для *варианта 4.1* при различных величинах времени запаздывания τ : а – 0.4205, б – 0.4805, в – 1.421

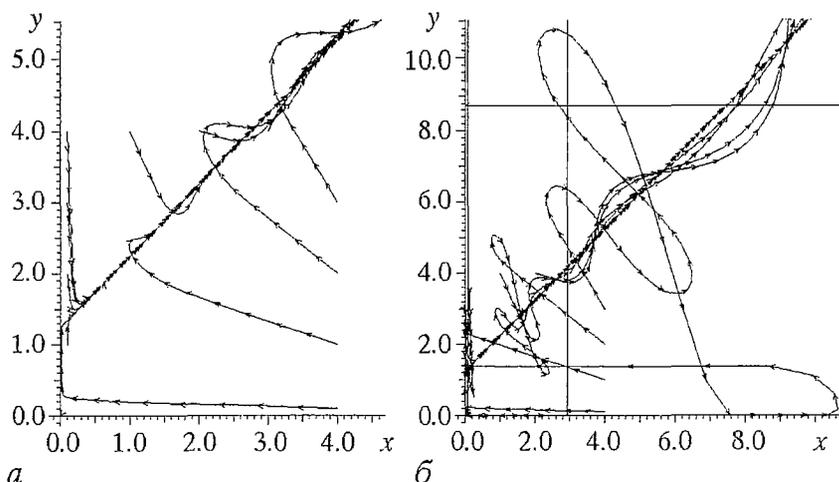


Рис. 6. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.1500, б - 0.3000

замысловатые фигуры, после чего растут в колебательном режиме (подобно случаю III), а затем касаются какой-либо из осей (рис. 6, б).

Когда $b_1=b_2=1.5$, при малых значениях τ фазовый портрет имеет тот же вид, что и структура разбиений фазовой плоскости на траектории на рис. 7, б в [2]. С увеличением τ фазовые траектории, как и в предыдущем варианте, начинают колебаться, пересекая прямую (3), но теперь они стремятся в область малых значений x, y (рис. 7). В отличие от предыдущего варианта с ростом запаздывания траектории, напоминающие ломаные линии, быстро достигают той или иной оси, не успевая приобрести сложную конфигурацию.

Когда $b_1=1.5, b_2=0.8$, фазовый портрет при $\tau=0$ изображен на рис. 8, а. Видимо, из-за технической ошибки рис. 7, в из статьи [2] повторяет рис. 7, б там же, что противоречит смыслу рис. 8, в [2]. С ростом величины τ (например, до значения 0.100) фазовые траектории пересекают прямую (3) и их колебания являются затухающими, как и в прежних вариантах. При больших τ некоторые из траекторий быстро достигают одной из осей (рис. 8, б). Примечательно, что для запаздывания, превышающего некоторое пороговое значение, существует особая

область начальных условий: если траектория начинается в ней, то имеет место незатухающий колебательный режим. Рассмотрим условия его реализации более подробно.

Проследим за трансформацией проекции фазовой траектории, начинающейся в точке $x_0=1, y_0=2$. Вычисления велись в течение модельного времени равного $15000c_1$ в предположении, что за это время все переходные процессы завершаются. Затем в течение модельного времени $7000c_1$ расчетные значения отображались на графике - фазовом портрете. Величина запаздывания варьировала с шагом $0.0005c_1$.

Оказалось, что в диапазоне зна-

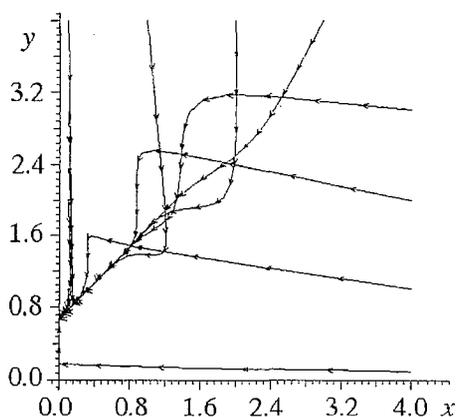


Рис. 7. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$) при $b_1=b_2=1.5$ и $\tau=0.1000$

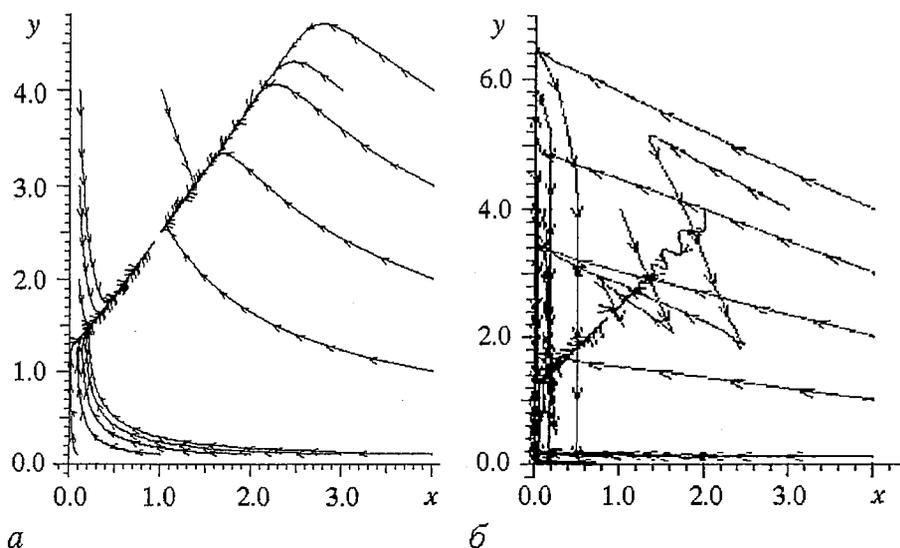


Рис. 8. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$) при $b_1=1.5$ и $b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.0005 (нулевое запаздывание), б - 0.3000

чений τ от 0.45 до 0.59 возникают незатухающие колебания (с периодом 2.00 при $\tau=0.50$ и периодом 2.39 при $\tau=0.5960$), предельный цикл для которых имеет характерный вид «восьмерки» (рис. 9, а). С увеличением запаздывания до $\tau=0.5985$ «восьмерка» испытывает равномерное утолщение, что свидетельствует о появлении модуляции среднего значения макропеременных. С ростом запаздывания очертания «восьмерки» расплываются (рис. 9, б), что служит симптомом хаотизации. Структуру хаотического движения иллюстрирует рис. 9, в, при построении которого интервал модельного времени был существенно меньше $7000c_1$. Форма последнего позволяет диагностировать динамику взаимодействия научных направлений как движение на эргодическом торе [6]. Увеличение запаздывания τ вызывает модуляцию формы поперечного сечения эргодического тора (рис. 9, г) (при построении этого рисунка время накопления было также существенно меньше $7000c_1$).

Рост τ влечет как увеличение, так и снижение степени сложности динамики: она минимальна в узких (с шириной не более $0.001c_1$) «окна периодичности», где имеет место резонанс на торе. Они наблюдались, например, при запаздывании $\tau=0.6065$ и 0.6110 (с периодом 26.77 и 29.46, соответственно). На рис. 9, д и е отчетливо видно наличие модуляции поперечных размеров тора. Рост запаздывания ($\tau=0.6070$, $\tau=0.6115$) вновь возвращает динамику к ситуации эргодического тора.

Когда $b_1=0.2$, $b_2=1.5$, при малых значениях τ фазовый портрет тот же, что и на рис. 7, г [2], причем в области, прилегающей к осям, его вид близок к портрету на рис. 7, б в [2], а в остальной части – к портрету на рис. 7, а в [2]. Такое сходство сохраняется в целом и при увеличении τ .

Как и прежде, обратимся к инициально-финальным отображениям.

Для варианта, когда $b_1=b_2=0.8$, из структуры фазового портрета (рис. 7, а [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, равномерно покрытого треугольниками (продуктивность обоих научных направлений неограниченно растет со временем). Такой вид отображения и был получен в расчетах. С увеличением запаздывания в верхнем правом углу квадрата образуется и расширяется область, соответствующая угасанию обоих научных

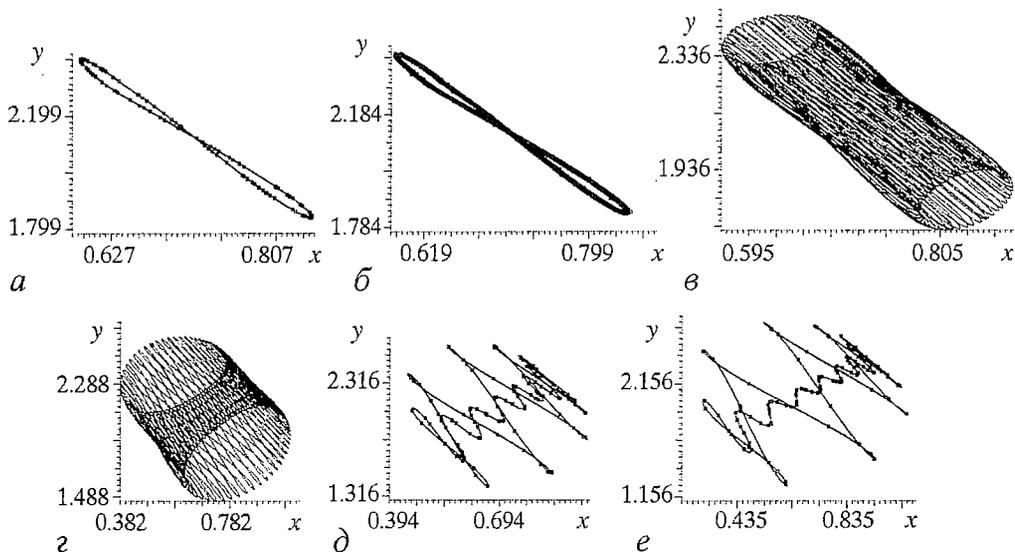


Рис. 9. Фазовая траектория системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$) при $b_1=1.5$, $b_2=0.8$, $x_0=1.0$ и $y_0=2.0$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.596, б - 0.5985, в - 0.5995, г - 0.6045, д - 0.6065, е - 0.6110. Интервал модельного времени при построении рисунков в и г был много меньше $7000c_1$

направлений (рис. 10, а). Но далее в пределах этой области возникают и увеличиваются районы, где продуктивность научных направлений безгранично растет, и районы, где сохраняется только направление Y. Последний формируется также вдоль оси x в правой ее части (рис. 10, б). Напомним, что выявление областей, где продуктивность научных направлений безгранично растет, связано с выполнением критерия прекращения вычислений: $x > 10^{500}$ или $y > 10^{500}$. Заметим, что если выбрать иной критерий: $x > 10^{100}$ или $y > 10^{100}$ ($x > 10^{700}$ или $y > 10^{700}$), то строение инициально-финального отображения изменяется. Так, при увеличении параметра критерия размер области безграничного роста продуктивности уменьшается за счет расширения области исчезновения обоих направлений либо области исчезновения направления X (рис. 10, г, в). Следовательно, не все точки, принадлежащие области, обозначенной треугольниками, соответствуют случаю неограниченного роста продуктивности.

Дальнейший рост запаздывания изменяет структуру отображения в пользу области, где сохраняется лишь направление Y (рис. 10, д, е). А область угасания обоих направлений ориентируется вдоль фазовой траектории, принадлежащей прямой (3), чье уравнение в случае IV сводится к виду $y=(xb_1+1)/b_2$. Эта фазовая траектория изображена на рис. 7, а [2].

Но в силу тезиса 2 (см. стр. 120) траектории, принадлежащие этой прямой, должны стремиться к бесконечности. Другими словами, на инициально-финальных отображениях должна присутствовать прямая (3), обозначаемая треугольниками. Но поскольку начальные значения макропеременных x, y не попадают точно на прямую (3), то такая линия на представленных ранее отображениях не наблюдается. Если же соответствующим образом изменить алгоритм выбора начальных условий, то вне зависимости от величины запаздывания в структуре отображения появляется прямая (3), обозначаемая треугольниками.

Для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$, из структуры фазового портрета (рис. 7, б [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, покрытого пустыми квадратиками (продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению) и/или покрытого заполнен-

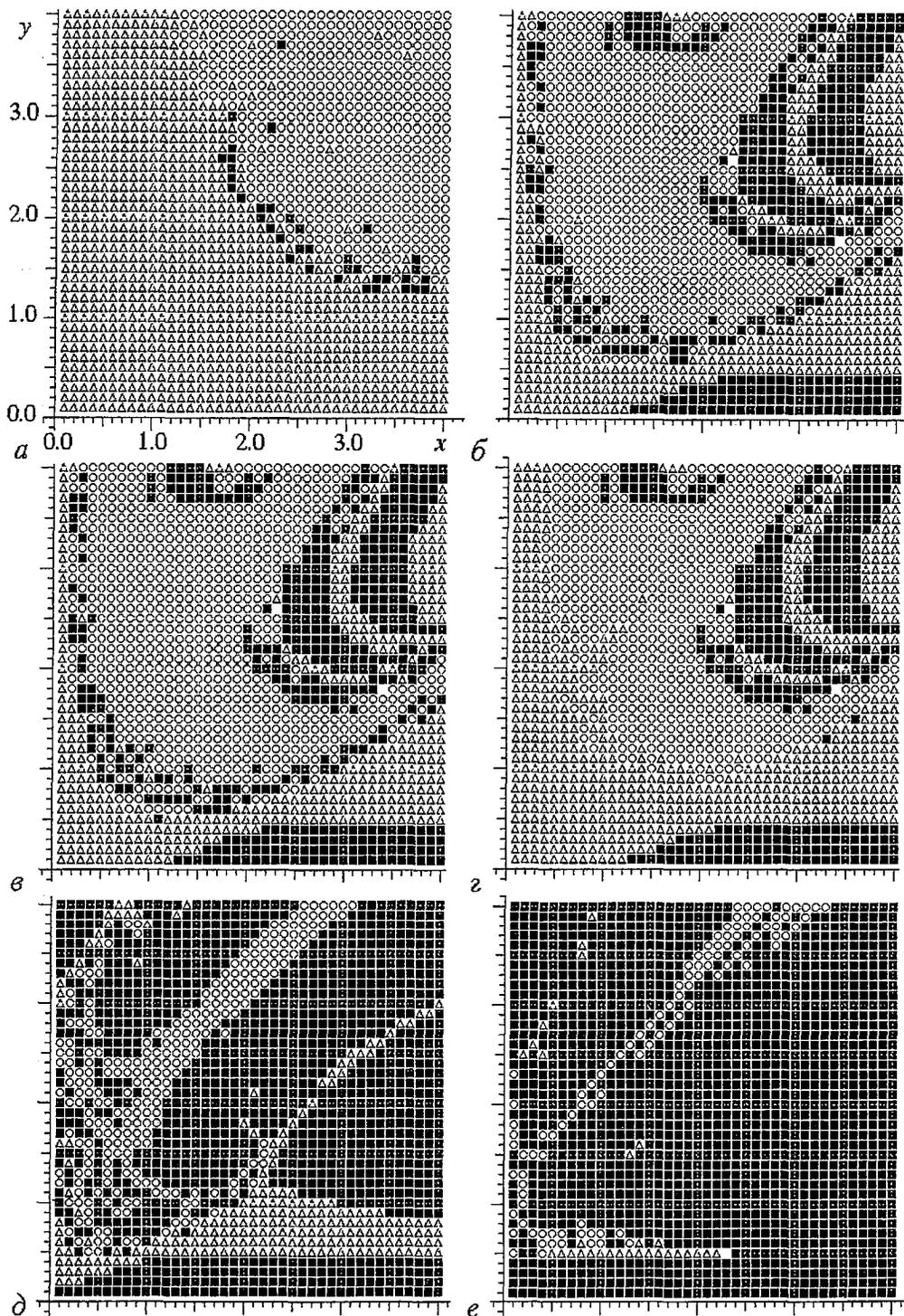


Рис. 10. Инициально-финальные отображения системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.1000, б - 0.3000, в - 0.3000, г - 0.3000, д - 0.5000, е - 0.9000. При построении рисунков в и г использовались модифицированные критерии прекращения вычислений: в - $x > 10^{700}$ или $y > 10^{700}$, г - $x > 10^{100}$ или $y > 10^{100}$

ными квадратиками (научное направление X угасает). Однако в вычислительном эксперименте мы наблюдаем инициально-финальное отображение в виде ничем не

заполненного квадрата (т.е. выполняется критерий 6 прекращения счета: $t > t_{\max}$ – ничего нельзя сказать о финале эволюции научных направлений). Такое несовпадение вида полученного отображения с ожидаемым происходит по двум причинам.

1. Научное направление X угасает, приближаясь к 0 асимптотически ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$). Следовательно, критерий 2 (см. табл.) полного угасания X не может выполняться за конечное время расчета.

2. В критерии 5 стремления продуктивностей научных направлений к стационарному значению фигурируют неравенства: $|(dy/dt)/y| < 2 \cdot 10^{-6}$, $|(dx/dt)/x| < 2 \cdot 10^{-6}$. Но при $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow +\infty$) $(dx/dt)/x \rightarrow c_1 y_{st} - c_2 \neq 0$, где стационарное значение макропеременной $y_{st} = 1/b_2$, согласно [2]. Следовательно, $(dx/dt)/x \rightarrow -1/3$ и последнее неравенство критерия 5 не выполняется.

С учетом сказанного отображение, действительно, должно иметь вид квадрата, покрытого заполненными квадратиками.

При наличии запаздывания для некоторых точек плоскости инициально-финального отображения (иначе говоря, плоскости (x, y)) начинает выполняться критерий 2, то есть угасание X . Причем с ростом τ число таких точек растет (рис. 11).

Для варианта, когда $b_1 = 1.5$, $b_2 = 0.8$, из структуры фазового портрета (рис. 12, а) вытекает, что при $\tau = 0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, покрытого пустыми квадратиками (продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению), что и наблюдалось в компьютерном эксперименте.

Рост запаздывания приводит к появлению области отображения, где сохраняется лишь направление Y , причем с ростом τ размер области растет (рис. 12, б, в). Причиной этого служит возникновение (при больших τ) траекторий, быстро достигающих одной из осей (ср. с рис. 8, б).

В то же время на плоскости отображения формируются области, для которых выполняется критерий 6 (рис. 12, г). Выполнение его в центральной части отображения вызвано наличием незатухающих колебаний макропеременных (рис. 9, а). Следовательно, при выборе начальных условий, соответствующих этой части отображения, направления X и Y сохраняются и испытывают незатухающие

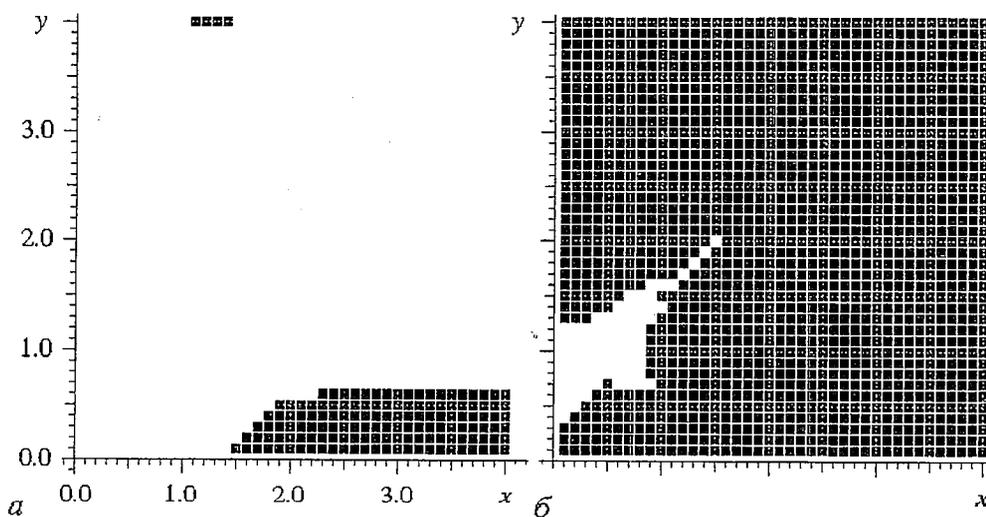


Рис. 11. Инициально-финальные отображения системы (1) для случая IV ($c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = -1$) при $b_1 = b_2 = 1.5$ для различных величин времени запаздывания τ : а – 0.2000, б – 0.7000

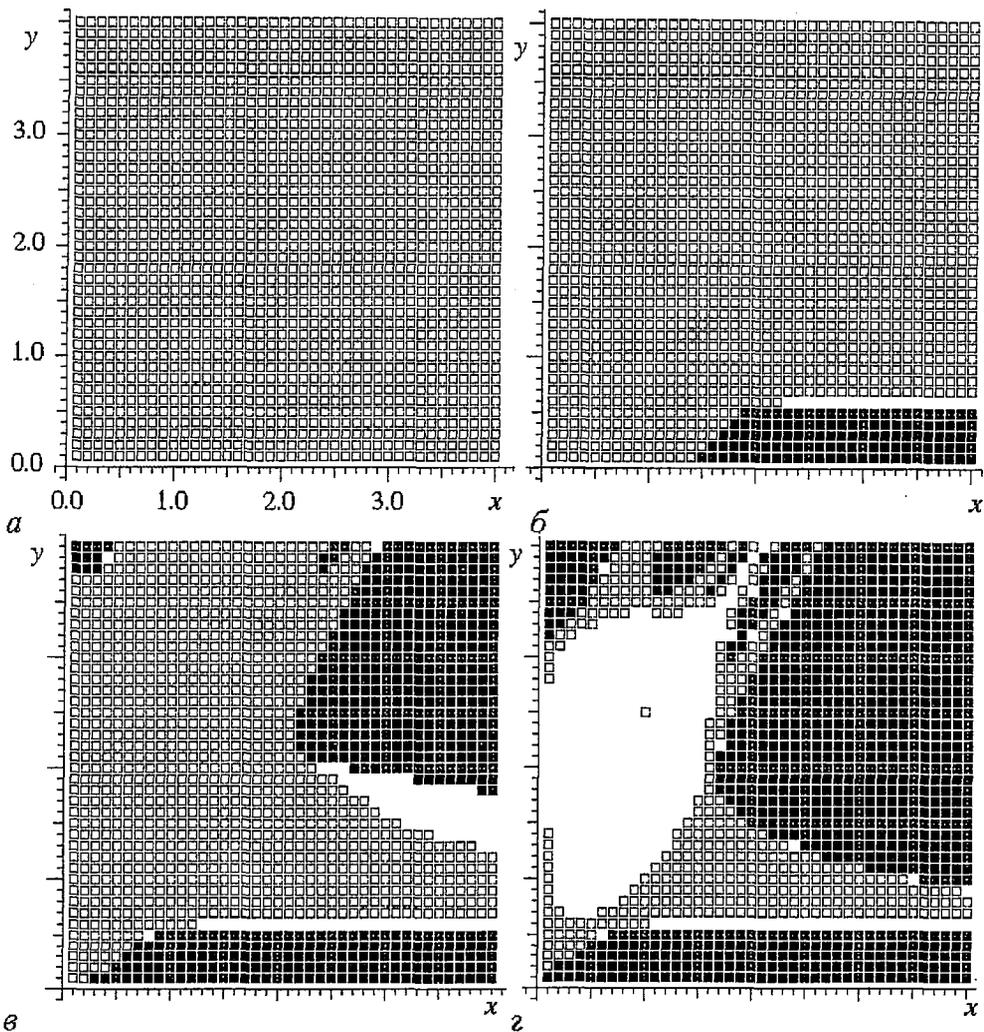
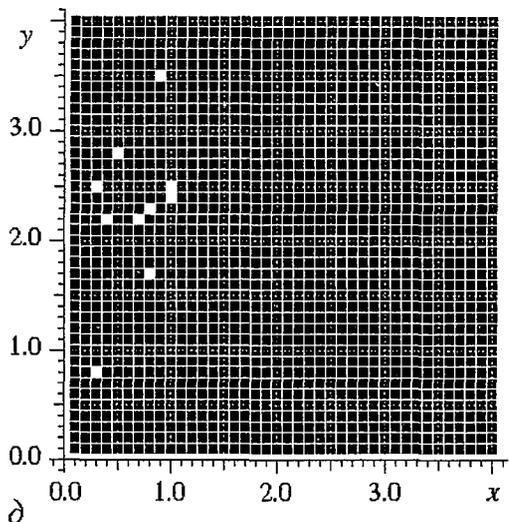


Рис. 12. Инициально-финальные отображения системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1$, $c_4=-1$) при $b_1=1.5$ и $b_2=0.8$ для различных величин времени запаздывания τ : а - 0.0005 (нулевое запаздывание), б - 0.2000, в - 0.4000, г - 0.5000, д - 0.9000

колебания продуктивности. Еще больший рост τ влечет доминирование области отображения, соответствующей необратимой деградации направления X (рис. 12, д).

Для варианта, когда $b_1=0.2$, $b_2=1.5$, из структуры фазового портрета (рис. 7, г [2]) следует, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно содержать две области. Первая - покрыта треугольниками (продуктивность обоих научных направлений



растет без видимого предела), вторая область, прилежащая к осям координат, как и для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$, – покрыта пустыми (продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению) и/или заполненными (научное направление X угасает) квадратиками. Однако по данным вычислительного эксперимента вторая область остается пустой. Здесь справедливы замечания, сделанные для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$.

При росте запаздывания τ трансформация первой (второй) области сходна с трансформацией всего инициально–финального отображения для варианта, когда $b_1=b_2=0.8$ ($b_1=b_2=1.5$). Заметим, что в первой области (в отличие от варианта, когда $b_1=b_2=0.8$) отчетливо виден район безграничного роста макропеременных, прилежащий к асимптоте (идущей вдоль диагонали $x=y$). Это наблюдается для всех построенных отображений при варьировании τ (рис. 13). Данное обстоятельство выглядит парадоксальным, поскольку не выполняются условия существования ни для прямой (2), ни для прямой (3). Можно объяснить парадокс тем, что эта асимптота имеет исключительно малую кривизну, представляя собой «квазипрямую». Поэтому тенденция неограниченного роста, возможно, исчезает лишь при очень высоких значениях τ .

Сопоставляя характер эволюции макропеременных x, y для случая IV, можно сделать ряд выводов.

- Сохраняет силу вывод «а» для случая III.
- Рост запаздывания вызывает сокращение размеров областей начальных условий x_0, y_0 на плоскости макропеременных x, y , при которых возможно развитие научного направления X .
- Наличие запаздывания способно повлечь как обратимое (во времени t) так и необратимое падение до нуля макропеременной x .
- Сохраняет силу вывод «г» для случая III.
- Когда $b_1=b_2=0.8$, при $\tau=0$ продуктивность обоих научных направлений неограниченно растет со временем. С увеличением запаздывания на инициально–финальном отображении появляется область угасания обоих научных направлений. В ней возникают и увеличиваются районы, где продуктивность научных направлений безгранично растет, и районы, где сохраняется только направление Y . Затем происходит расширение области исчезновения обоих направлений. При еще больших τ доминирует область, где сохраняется лишь направление Y , а область угасания обоих направлений ориентируется вдоль прямой (3) (безграничного роста X, Y), чье уравнение сводится к виду $y=(xb_1+1)/b_2$.

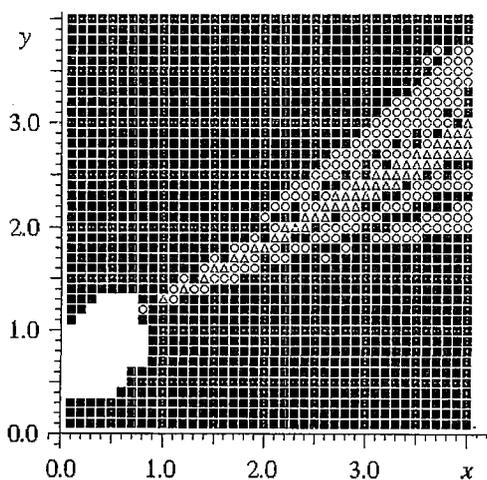


Рис. 13. Инициально–финальное отображение системы (1) для случая IV ($c_1=c_2=c_3=1, c_4=-1$) при $b_1=0.5, b_2=1.5$ и величине времени запаздывания $\tau=0.9000$

• Когда $b_1=b_2=1.5$, при $\tau=0$ инициально–финальное отображение должно иметь вид, соответствующий существованию лишь направления Y , но по данным вычислительного эксперимента ничего нельзя сказать о финале эволюции научных направлений. Несоответствие объясняется несовершенством системы критериев, используемых при построении отображений, и исчезает с увеличением τ .

• Когда $b_1=1.5, b_2=0.8$, при $\tau=0$ продуктивность обоих научных направлений стремится к стационарному значению. Рост запаздывания приводит к появлению области отображения, где

сохраняется лишь направление Y , увеличивая ее, а при этом в центральной части отображения формируются области, в которых продуктивность научных направлений испытывает незатухающие колебания. При еще больших τ доминирует область упадка направления X .

- Когда $b_1=0.2$, $b_2=1.5$, инициально-финальное отображение содержит две области. В первой выполняются закономерности, относящиеся к варианту, когда $b_1=b_2=0.8$; во второй области, прилежащей к осям координат, выполняются те же закономерности, что и для варианта, когда $b_1=b_2=1.5$. Обнаружено парадоксальное обстоятельство: по крайней мере, до $\tau=5$ в первой области присутствует район безграничного роста макропеременных, прилежащий к асимптоте (идущей вдоль диагонали $x=y$), хотя не выполняются условия существования нетривиальных прямолинейных фазовых траекторий. Парадокс предлагается объяснить тем, что эта асимптота имеет исключительно малую кривизну.

- Когда $b_1=1.5$, $b_2=0.8$, для запаздывания, превышающего некоторое пороговое значение, существует область начальных условий, при которых имеют место незатухающие колебания продуктивности научных направлений. Обнаружены предельные циклы с периодами 2.00, 2.39, 26.77, 29.46 (в том числе резонанс на торе), а также хаотический режим (эргодический тор). С ростом запаздывания проявляются «окна периодичности»: эргодический тор чередуется с резонансом на торе

Случай V. Когда «затухающее» направление X отрицательно воздействует на направление Y , развивающееся позитивно и положительно влияющее на X ($c_1=c_2=1$, $c_3=c_4=-1$), условие существования прямых (2) и (3) не выполняется. Выявлены следующие особенности.

Вариант 5.1. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=0.2$. При малых значениях запаздывания изменение продуктивности обоих направлений носит характер затухающих колебаний; при этом средние значения продуктивностей x , y стремятся к своим стационарным значениям, как и при $\tau=0$ (см. рис. 10, а в [2]). С ростом τ полный размах колебаний x , y увеличивается, а при $\tau=0.2100$ затухание колебаний сменяется их нарастанием во времени (рис. 14, а). Авторы предлагают интерпретировать такую смену тенденций как бифуркацию, благодаря которой устойчивый фокус сменяется неустойчивым.

Из-за упомянутого увеличения размаха колебаний траектория на фазовом портрете рано или поздно достигает одной из осей. При этом наблюдается необратимое исчезновение направления X , а Y в зависимости от начальных значений x_0 и y_0 может как угаснуть совсем, так и прийти к стационарному значению (рис. 15).

При $\tau=0.2605$ макропеременная x во втором минимуме принимает нулевое значение, и это падение ее оказывается необратимым. Как видно из рис. 14, б, при таком запаздывании сохраняется лишь первый максимум каждой из макропеременных. Увеличение τ отодвигает момент наступления максимумов (рис. 14, в).

При $\tau=0.5965$ макропеременная x длительное время (сравнимое с 1) находится очень близко к нулю. Поэтому спустя время, равное τ , макропеременная y достигает значения, близкого к стационарному для случая, когда $x=0$. А возрастание x приводит к падению y . В итоге на графике $y(t)$ появляется плато (рис. 14, г).

При $\tau=0.5975$ продуктивность научного направления X монотонно убывает и достигает нуля раньше, чем Y . Поэтому продуктивность направления Y , не обращаясь в нуль, стремится к своему стационарному значению. Судя по рис. 14, д, это стремление имеет колебательный характер. Размах колебаний возрастает с увеличением запаздывания (рис. 14, е).

Вариант 5.2. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=0.5$, демонстрирует те же закономерности, что и вариант 5.1. При $\tau=0.3605$ происходит необратимое падение макропеременной x (во втором минимуме) до нуля; продуктивность x монотонно убывает до нуля, а y , не обращаясь в нуль, стремится к своему стационарному значению ($\tau=1.1405$).

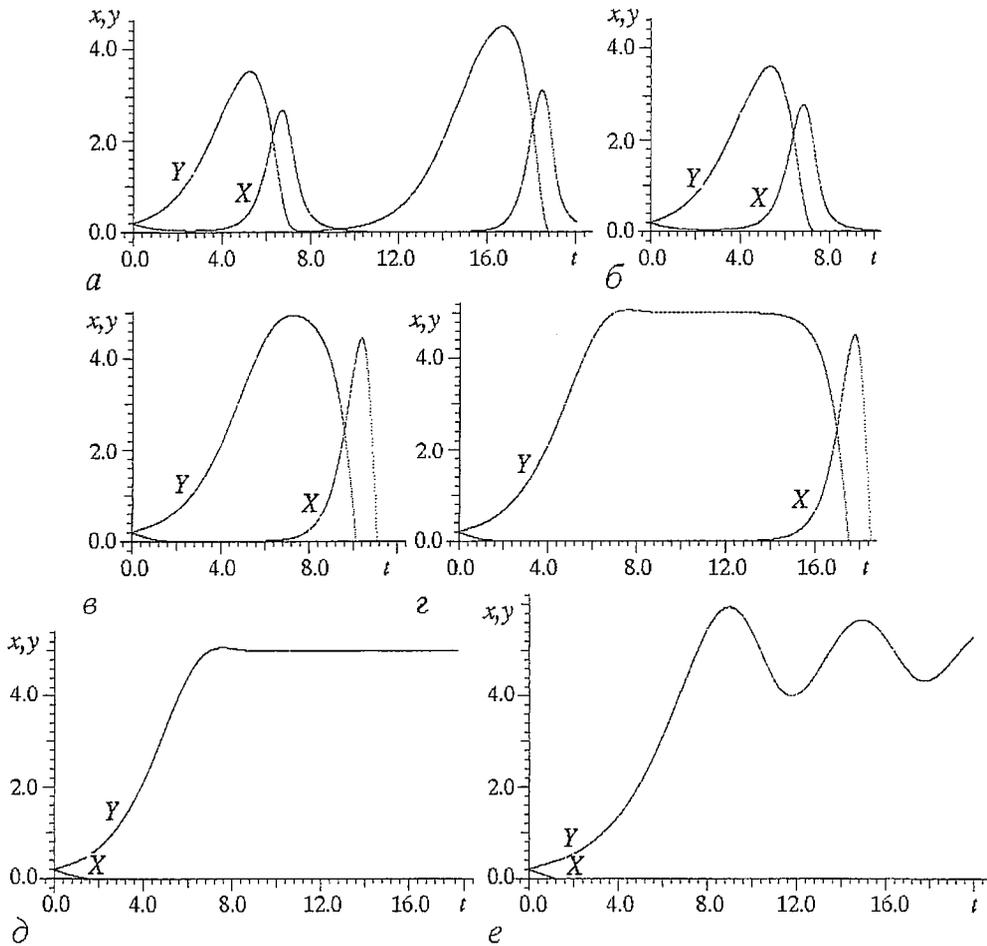


Рис. 14. Решение системы уравнений (1) для варианта 5.1 при различных величинах времени запаздывания τ : а - 0.2405, б - 0.2605, в - 0.5805, г - 0.5965, д - 0.6005, е - 1.421

Вариант 5.3. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=1$, аналогичен вариантам 5.1 и 5.2. При $\tau=0.3590$ макропеременная x в третьем минимуме необратимо падает до нуля (рис. 16, а), а затем ($\tau=0.3605$) то же происходит и с y . При $\tau=0.4605$ макропеременная x испытывает необратимое падение во втором минимуме, а продуктивность направления Y , не обращаясь в нуль, стремится к своему стационарному значению (рис. 16, б). При запаздывании $\tau=0.5205$ повторяется ситуация, которой соответствует рис. 14, б. Но рис. 16, в ($\tau=1.3800$) отличается от рис. 14, г тем, что стремление макропеременной y к стационарному состоянию носит колебательный характер, поэтому на графике для y плато отсутствует. Ситуации при запаздывании $\tau=1.3900$ соответствует рис. 14, д.

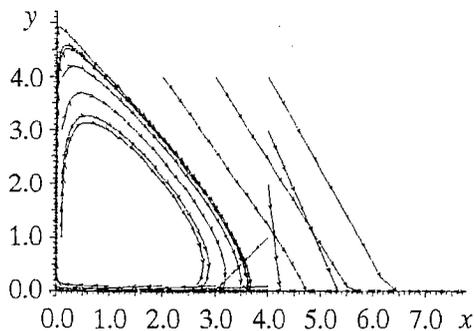


Рис. 15. Структура фазового пространства системы уравнений (1) для случая V ($c_1=c_2=1$, $c_3=c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.1$ и величине времени запаздывания $\tau=0.3600$

Вариант 5.4. $b_1=b_2=0.2$, $x_0=y_0=2.5$. При $\tau=0.18980$ ни одна из макропеременных не достигает нуля (напомним, что вычисления велись методом Эйлера с шагом равным 0.0005). Примечательно,

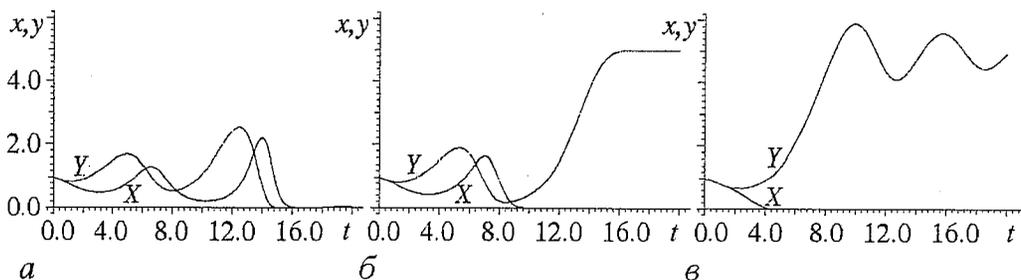


Рис. 16. Решение системы уравнений (1) для варианта 5.3 при различных величинах времени запаздывания τ : а – 0.3590, б – 0.4605, в – 1.380

что еще до того, как наступает бифуркация, благодаря которой устойчивый фокус сменяется неустойчивым, макропеременная y достигает нуля в первом минимуме. Это происходит обратимо при $\tau=0.18988$, поэтому на графике $y(t)$ возникает плато, хорошо различимое на рис. 17. Обратимое достижение нуля происходит, возможно, потому, что бифуркация еще не произошла и фазовая траектория стремится к устойчивому фокусу, то есть стремится удалиться от осей. Поскольку макропеременная x стремится к 0 асимптотически (оставаясь положительной), то при «возрождении» направления Y значение x резко возрастает, то есть направление X сохраняется. Необратимое падение y до нуля наблюдается при $\tau=0.18989$. Если $y=0$ необратимо, то x асимптотически стремится к 0.

(Многочисленные вычисления приводят к выводу о том, что при $\tau_1=0.1898885920532704$ зависимость $y(t)$ имеет участок с плато, но уже при $\tau_2=0.1898885920532705$ y необратимо становится равным 0.)

В силу того, что необратимое угасание направления Y происходит до указанной бифуркации, она не приводит к существенным изменениям динамики направлений X, Y . И дальнейшее увеличение запаздывания влечет лишь рост максимума x . Научное направление X сохраняется дольше, чем при меньших значениях τ , так что справедлива оценка: время жизни направления X больше τ .

Обратимся к инициально-финальным отображениям. Из структуры фазового портрета (рис. 9 в [2]) вытекает, что при $\tau=0$ инициально-финальное отображение должно иметь вид квадрата, равномерно покрытого пустыми квадратиками (продуктивность обоих научных направлений стремится к некоей константе). Именно такое отображение и было получено в вычислительном эксперименте. Но уже при $\tau=0.1$ в верхнем правом углу квадрата образуется малая область, соответствующая ситуации исчезновения обоих научных направлений. По мере увеличения запаздывания эта область расширяется (рис. 18, а, б), практически полностью заполняя исследуемую область начальных условий при $\tau=0.3$ (рис. 18, в). Рост величины τ приводит к возникновению спиралевидной области, соответствующей случаю, когда сохраняется лишь направление Y (рис. 18, г). Число витков (длина) спирали уменьшается, а ширина увеличивается (рис. 18, д). Сравнивая динамику макропеременных x, y для случая V, можно сделать ряд выводов.

- Сохраняют силу выводы «б», «в» для случая III.

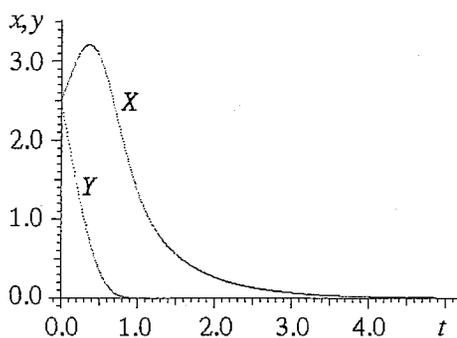


Рис. 17. Решение системы уравнений (1) для варианта 5.4 при величине времени запаздывания $\tau=0.18988859$

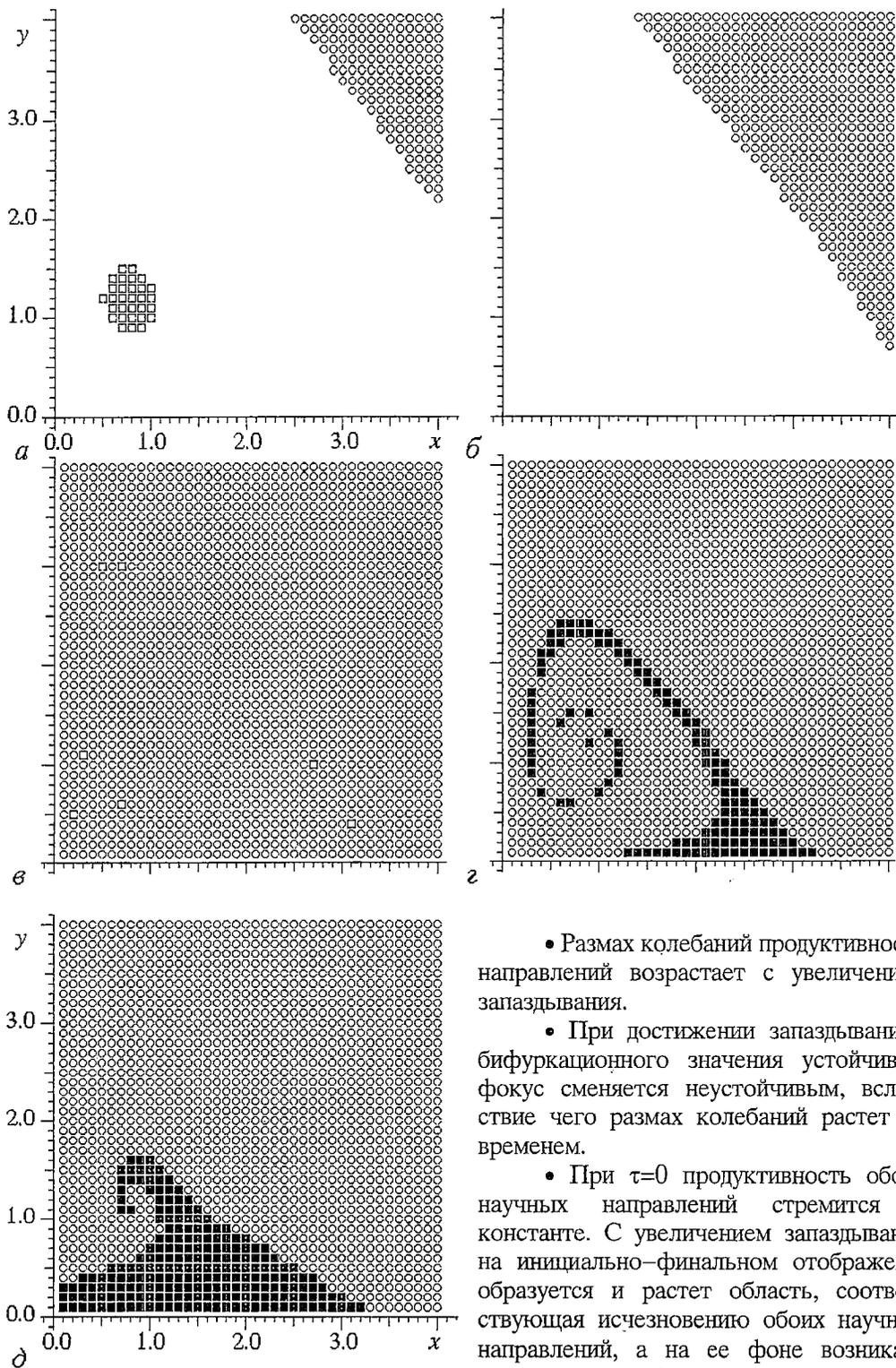


Рис. 18. Инициально-финальное отображение системы (1) для случая V ($c_1=c_2=1$, $c_3=c_4=-1$) при $b_1=b_2=0.2$ для различных величин времени запаздывания τ : $a - 0.1300$, $б - 0.1800$, $в - 0.3000$, $г - 0.4000$, $д - 2.000$

- Размах колебаний продуктивности направлений возрастает с увеличением запаздывания.

- При достижении запаздыванием бифуркационного значения устойчивый фокус сменяется неустойчивым, вследствие чего размах колебаний растет со временем.

- При $\tau=0$ продуктивность обоих научных направлений стремится к константе. С увеличением запаздывания на инициально-финальном отображении образуется и растет область, соответствующая исчезновению обоих научных направлений, а на ее фоне возникает спиралевидная область, соответствующая сохранению лишь направления Y .

Заключение

Предпринятое изучение модели взаимодействия двух научных направлений с квадратичным ограничением роста достижений [2], дополненной учетом инерционности восприятия сообществом «своих» и «чужих» научных достижений [4], приводит к результатам, которые можно обобщить в нескольких аспектах.

А. Ритмический аспект. Наличие инерционности восприятия научных достижений, превышающей некоторые пороговые значения, в зависимости от типа (и параметров) взаимодействия научных направлений X, Y вызывает:

- затухающие колебания их продуктивности x, y ;
- незатухающие колебания x, y (предельные циклы, в том числе резонанс на торе и эргодический тор);
- рост амплитуды затухающих колебаний;
- разрушение колебательных процессов;
- (не) обратимое во времени t снижение до нуля продуктивности.

Эта инерционность допускает время от времени повторение уровня показателей продуктивности, когда $x(t)=x(t')$, $y(t)=y(t')$. Но оно не гарантирует в будущем воспроизведение имевшей место эволюции научных направлений (не приводит к образованию предельных циклов).

Особенности прямолинейных фазовых траекторий таковы:

- фазовая траектория остается прямой при любых значениях запаздывания τ ;
- если движение системы происходит в направлении к (устойчивой особой) точке, (не) являющейся предельной точкой фазового пространства системы с $\tau=0$, то наличие запаздывания не влияет на монотонный характер изменения x, y (существует значение $\tau>0$, при котором имеют место затухающие колебания вокруг особой точки).

Б. Бифуркационный аспект. При достижении запаздыванием τ (инерционностью восприятия научных достижений) бифуркационного значения затухающие колебания продуктивности, характеризующей научные направления X, Y , сменяются:

- нарастающими колебаниями, в итоге чего деградируют либо оба направления, либо «затухающее» направление X ;
- предельными циклами.

С ростом запаздывания проявляются «окна периодичности»: эргодический тор чередуется с резонансом на торе.

В. Инициально-финальный аспект. Предложен конструкт – инициально-финальное отображение, задающее графически отображение (функцию) множества начальных условий x_0, y_0 во множество финалов эволюции x, y . Оно позволяет установить, как влияют начальные условия на заключительное состояние динамики научных направлений, а также – путем построения серий отображений – роль некоторого фактора (параметра модели) в формировании структуры отображения.

С помощью построенных серий инициально-финальных отображений на плоскости макропеременных x, y обнаружены области начальных условий, при которых имеют место незатухающие колебания продуктивности научных направлений.

Установлено, что рост запаздывания – в зависимости от типа (и параметров) взаимодействия научных направлений – вызывает многообразные трансформации областей начальных условий, при которых наступают те или иные финалы эволюции X, Y (оба научных направления угасают; исчезает только X ; неограниченный рост x, y ; статический режим), например:

- сокращение размеров областей начальных условий, при которых возможно развитие того или иного научного направления;
- доминирование области начальных условий, соответствующей угасанию обоих научных направлений;

• формирование области угасания обоих научных направлений, в которой возникают и увеличиваются районы, где продуктивность X , Y безгранично растет, и районы, где сохраняется только направление Y ;

• образование и рост области угасания X , Y , на фоне которой возникает спиралевидная область существования лишь направления Y .

Таким образом, совместный учет ограничения экспоненциального роста (в форме квадратичной нелинейности [2]) и инерционности восприятия научных достижений (введением запаздывающего аргумента у макропеременных) позволяет выявить в модели (1) многообразные виды поведения двух взаимодействующих научных направлений, одно или оба из которых «затухающие».

В работе использованы материалы, полученные при выполнении проекта № 990675 в рамках научной программы «Фундаментальные исследования высшей школы в области естественных и гуманитарных наук. Университеты России».

Библиографический список

1. Качак В. В., Мчедлова Е. С. Модель взаимодействия и эволюции двух научных направлений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 4. С. 110.

2. Качак В. В., Мчедлова Е. С. Модель взаимодействия двух научных направлений с учетом ограничения экспоненциального роста достижений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 85.

3. Качак В. В., Усанов Д. А. К вопросу о взаимодействиях научных школ, или Об одном аргументе «за» интеграции образовательных структур // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 95.

4. Измайлов И.В., Поизнер Б.Н., Раводин В.О. Модель взаимодействия двух развивающихся научных направлений с учетом ограничения роста достижений и запаздывания // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С. 70.

5. Храмов А.Е. Сложная динамика когерентных структур в двухпоточковом виркаторе // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6, № 2. С. 42. рис. 3.

6. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем / под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.

*Томский государственный
университет*

Поступила в редакцию 22.02.01

MODEL OF TWO SCIENTIFIC FIELDS INTERACTION (ONE OR BOTH ARE «DAMPED») WITH RESTRICTION OF ACHIEVEMENTS GROWTH AND DELAY

I.V. Izmailov, B.N. Poizner, V.O. Ravodin

Model of two scientific fields interaction with quadratic restriction of achievements growth (analogous of model suggested by V.V. Kachak, E.S. Mchedlova) taking into account inertia with which scientific fellowship perceives «own» and «strange» scientific achievements is investigated.

It is offered to supplement a construction of phase portraits and temporal realizations by a construction of initial-final maps (term of the authors) for clearing up of joint effect of delay, initial conditions and types of two scientific fields interaction on dynamics of its efficiency.

The limit cycles (including resonance on torus) and also chaotic regime (an ergodic torus) are discovered. «The windows of periodicity» are exhibited due to growth of delay: ergodic torus alternates a resonance on torus. It is showed that achievements perception inertia is capable to complicate process of scientific fields interaction.



Измайлов Игорь Валерьевич - родился в 1976 году в Алма-Ате. Поступил на радиофизический факультет Томского государственного университета (1993). Аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники (1999). Область научных интересов: моделирование процессов в нелинейных системах различной природы, применение нелинейной динамики для обработки и скрытой передачи информации.



Поизнер Борис Николаевич - родился в Томске (1941), окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Защитил кандидатскую диссертацию по теории колебаний и волн (1970), доцент кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Читает лекции по нелинейной оптике, физике, физике лазеров, принципам управления лазерным излучением, основам синергетики. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Имеет много статей по указанной тематике. Инициатор подготовки и редактор семи библиографических указателей (в том числе «Синергетика и сопредельные науки», «Университетское образование и его социальная роль», «Интеллигенция в российском обществе и университете», «Психика и интеллект обучаемого»). Действительный член Всероссийского общества библиофилов.



Раводин Владимир Олегович - родился в Томске (1976). Закончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1999). В настоящее время аспирант кафедры квантовой электроники и фотоники ТГУ. Область научных интересов: компьютерное моделирование нелинейной динамики бинарных систем. Автор нескольких научных публикаций.

E-mail: deka@ic.tsu.ru