



ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОГО РОТОРА

Н.В. Киселева

Изучаются периодические движения ротора с параметрическим и силовым воздействием, описываемые нелинейным неавтономным дифференциальным уравнением маятникового типа, зависящим от четырех параметров.

Для малых значений параметров с помощью метода Чезари получены уравнения бифуркационных поверхностей, ограничивающих области существования ряда периодических движений колебательного и вращательного типа. В конечной области пространства параметров численными методами построены их бифуркационные диаграммы, содержащие области существования и устойчивости. Выяснены бифуркации, приводящие к возникновению периодических движений и смене характера их устойчивости.

Введение

В работе рассматривается нелинейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + h\dot{x} = b - (a + v\sin t)\sin x, \quad (1)$$

описывающее движения ротора с гармонически колеблющейся осью вращения [1]. Здесь x - угол отклонения ротора от вертикали, параметры b , a , h , v характеризуют постоянный вращающий момент, момент силы тяжести, коэффициент линейного вязкого трения, амплитуду колебаний оси вращения. Уравнение (1) представляет интерес не только для теории механических вибросистем. Оно моделирует движение заряженной частицы в электромагнитном поле, движение солитона в поле стоячей волны в неизотермической плазме [2, 3].

При изучении математической модели (1) прежде всего возникает задача отыскания и исследования периодических движений ротора, синхронных с колебаниями его оси. Им соответствуют решения $\Gamma_{p,q}$: $x=x(t)$, удовлетворяющие условию $x(t+2\pi p)=x(t)+2\pi q$, $p=1,2,\dots$; $q=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. При $q=0$ решение $\Gamma_{p,q}$ отвечает $2\pi p$ -периодическому колебанию ротора, при $q \neq 0$ - периодическому вращению: за период $2\pi p$ происходит $|q|$ оборотов ротора в положительном ($q>0$) или отрицательном ($q<0$) направлении.

В случае $b=0$ бифуркационные диаграммы периодических решений уравнения (1) достаточно полно изучены в [4]. Влияние вращающего момента на динамику движения ротора при $a=0$ (ротор с вертикальной осью вращения)

рассмотрено в [5]. В настоящей работе выясняется влияние вращающего момента на бифуркационные диаграммы периодических решений в случае $a > 0$.

В первой части работы аналитическим методом Чезари [6] проведено исследование решений $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров. Учет различных порядков малости параметров b, a, h, v позволил получить формулы для границ области существования периодических решений $\Gamma_{1,0}, \Gamma_{1,1}$ и $\Gamma_{1,-1}$, установить число синхронизмов каждого типа и выяснить бифуркации, приводящие к их возникновению. Вторая часть работы посвящена продолжению этих решений в конечную область пространства параметров численными методами [7], основанными на методе точечных отображений [8]. Построены бифуркационные диаграммы периодических решений, содержащие области существования и устойчивости. Выяснены бифуркации, приводящие к их возникновению и смене характера устойчивости.

1. Изучение периодических решений $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров

Уравнение (1) при $b=h=v=0$ имеет бесконечное множество решений

$$x(t) = (q/p)t + \alpha, \quad |\alpha| < 2\pi, \quad (2)$$

которые находятся в соответствии с простой дробью q/p из интервала $(-\infty, \infty)$. Выделим среди них решения, порождающие периодические решения $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров. Для этого с помощью метода Чезари [6] найдем значения α , соответствующие порождающим решениям.

Предполагаем, что величины b, a, h, v являются малыми разного порядка малости. Положим

$$b = L_m v^m + o(v^{m+1}), \quad h = N_l v^l + o(v^{l+1}), \quad a = M_n v^n + o(v^{n+1}), \quad (3)$$

где m, l, n - целые положительные числа, L_m, N_l, M_n - постоянные. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\ddot{x} + (N_l v^l + o(v^{l+1}))\dot{x} = L_m v^m + o(v^{m+1}) - (M_n v^n + o(v^{n+1}) + v \sin t) \sin x.$$

Сделаем замену $u = x - (q/p)t$, получим уравнение

$$\ddot{u} + N_l v^l + o(v^{l+1})(\dot{u} + q/p) = L_m v^m + o(v^{m+1}) - (M_n v^n + o(v^{n+1}) + v \sin t) \sin((q/p)t + u). \quad (4)$$

В соответствии с [6] рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \ddot{u} = -N_l v^l + o(v^{l+1})(\dot{u} + q/p) + L_m v^m + o(v^{m+1}) - \\ - (M_n v^n + o(v^{n+1}) + v \sin t) \sin((q/p)t + u) - V(\alpha, v), \\ 1/(2\pi p) \int_0^{2\pi p} u dt = 0, \end{cases} \quad (5)$$

решением которой являются функции $u = u(t, \alpha, v)$, $V = V(\alpha, v)$, удовлетворяющие условию $u(t, \alpha, 0) = \alpha$, $V(\alpha, 0) = 0$. Это решение представимо рядами

$$\begin{cases} u(t, \alpha, v) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t, \alpha) v^k, \\ V(\alpha, v) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(\alpha) v^k, \end{cases} \quad (6)$$

где $u_k(t, \alpha)$ - $2\pi p$ -периодические функции переменного t .

Необходимым и достаточным условием существования единственного $2\pi p$ -периодического решения $u=u(t, \nu)$ уравнения (4), переходящего при $\nu \rightarrow 0$ в порождающее решение $u(t, 0)=\alpha$, является существование простого корня $\alpha(\nu)$ бифуркационного уравнения $V(\alpha, \nu)=0$.

Если в (6) $V_1(\alpha)=V_2(\alpha)=\dots=V_{k-1}(\alpha)\equiv 0$, $V_k(\alpha)\neq 0$ и существует такое значение α_0 , что $V_k(\alpha_0)=0$, $dV_k(\alpha_0)/d\alpha\neq 0$, то бифуркационное уравнение $V(\alpha, \nu)=0$ имеет простой аналитический корень $\alpha(\nu)\rightarrow\alpha_0$ при $\nu\rightarrow 0$. Поэтому для отыскания корней бифуркационного уравнения при $\nu\rightarrow 0$ достаточно найти первый коэффициент $V_k(\alpha)\neq 0$ и исследовать корни уравнения $V_k(\alpha)=0$. Тем самым определяются значения α в (2), соответствующие порождающим решениям.

Решение $\Gamma_{p,q}$, согласно [6], будет устойчивым, если для соответствующего ему корня α , выполняется соотношение

$$dV_k(\alpha_i)/d\alpha < 0. \quad (7)$$

Применяя описанный метод исследования периодических решений, подставим (6) в систему (5) и разложим синус в ряд Тейлора. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ν , получим систему с бесконечным числом уравнений для определения $u_k(t, \alpha)$ и $V_k(\alpha)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_1 = -N_l \dot{u}_{1-l} - (q/p)N_l \delta_{1l} + L_m \delta_{1m} - (\sin t + M_n \delta_{1n}) \sin((q/p)t + \alpha) - V_1, \\ \ddot{u}_2 = -N_l \dot{u}_{2-l} - (q/p)N_l \delta_{2l} + L_m \delta_{2m} - \\ \quad - [(\sin t + M_n \delta_{1n}) \cos((q/p)t + \alpha)]u_1 - M_n \delta_{2n} \sin((q/p)t + \alpha) - V_2, \\ \dots \\ \int_0^{2\pi p} u_k(t, \alpha) dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots), \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi p} u_k(t, \alpha) dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots), \quad (9)$$

где $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } k=l \\ 0, & \text{если } k\neq l \end{cases}$ и $\dot{u}_{k-1}(t, \alpha) \equiv 0$ при $l \geq k$.

Найдем решение $u_1(t, \alpha)$. Для этого проинтегрируем первое уравнение системы (8). Получим

$$u_1 = [L_m \delta_{1m} - (q/p)N_l \delta_{1l}] t^2/2 + M_n \delta_{1n} \sin((q/p)t + \alpha)/(q^2/p^2) +$$

$$+ 1/2 \{ \cos(\alpha - (1-q/p)t)/(1-q/p)^2 - \cos(\alpha + (1+q/p)t)/(1+q/p)^2 \} - V_1 t^2/2,$$

если $q \neq 0$, $q/p \neq \pm 1$;

$$u_1 = [L_m \delta_{1m} \mp N_l \delta_{1l} \mp 1/2 \cos \alpha] t^2/2 + M_n \delta_{1n} \sin(\alpha \pm t) \mp 1/8 \cos(\alpha \pm 2t) - V_1 t^2/2,$$

если $q/p = \pm 1$;

$$u_1 = [L_m \delta_{1m} - M_n \delta_{1n} \sin \alpha] t^2/2 + \sin \alpha \sin t - V_1 t^2/2,$$

если $q=0$.

Используя условие (9), определим коэффициент

$$V_1(\alpha) = L_m \delta_{1m} - (q/p)N_l \delta_{1l}, \quad \text{если } q/p \neq 0, \pm 1;$$

$$V_1(\alpha) = L_m \delta_{1m} \mp N_l \delta_{1l} \mp 1/2 \cos \alpha, \quad \text{если } q/p = \pm 1;$$

$$V_1(\alpha) = L_m \delta_{1m} - M_n \delta_{1n} \sin \alpha, \quad \text{если } q/p = 0.$$

Отсюда следует, что для $p=1, q=1$ при

$$|L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l}| < 1/2 \quad (10)$$

уравнение $V_1(\alpha)=0$ имеет два простых корня

$$\alpha_1 = \arccos [2(L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l})], \quad \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1,$$

которые соответствуют двум решениям $x_i(t)=t+\alpha_i$ ($i=1,2$), порождающим периодические решения $\Gamma_{1,1}^i$. Значения

$$L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l} = 1/2 \quad (L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l} = -1/2) \quad (11)$$

отвечают слиянию корней α_1 и α_2 в точке $\alpha^\pm=0$ ($\alpha^-=\pi$). При $|L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l}| > 1/2$ корни не существуют.

Таким образом, при малых значениях b, a, h, v уравнение (1) имеет два периодических решения $\Gamma_{1,1}$ в области $D_{1,1}$, определяемой соотношениями (3) и (10), которые можно переписать в виде одного неравенства

$$|b - h| < v/2 + o(v^2).$$

Выясним характер устойчивости этих решений. Проверяя условие (7), находим, что решение $\Gamma_{1,1}^1$, соответствующее корню α_1 , имеет седловой тип, а решение $\Gamma_{1,1}^2$, отвечающее корню α_2 , является устойчивым в первом приближении.

Соотношения (3), (11) определяют поверхности

$$L_{1,1}^\pm: \pm(b-h)=v/2+o(v^2), \quad (12)$$

ограничивающие область $D_{1,1}$ и соответствующие существованию периодического решения, отвечающего корню α^\pm уравнения $V_1(\alpha)=0$. Величина $dV_1(\alpha^\pm)/d\alpha=0$, а $d^2V_1(\alpha^\pm)/d\alpha^2 \neq 0$, следовательно, это негрубое периодическое решение типа седло-узел, если $h>0$, и сложное негрубое периодическое решение, если $h=0$.

Получаем, что поверхности $L_{1,1}^+$ и $L_{1,1}^-$ являются бифуркационными, соответствующими слиянию решений $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$ в негрубое периодическое решение $\Gamma_{1,1}$.

Для $p=1, q=-1$ при $|L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l}| < 1/2$ уравнение $V_1(\alpha)=0$ имеет два простых корня

$$\alpha_1 = \arccos [2(L_m \delta_{1m} - N_l \delta_{1l})], \quad \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1,$$

соответствующие двум решениям $x_i(t)=-t+\alpha_i$ ($i=1,2$). Решение $x_1(t)$ порождает устойчивое периодическое решение $\Gamma_{1,-1}^1$, решение $x_2(t)$ - седловое периодическое решение $\Gamma_{1,-1}^2$. При $L_m \delta_{1m} + N_l \delta_{1l} = 1/2$ ($L_m \delta_{1m} + N_l \delta_{1l} = -1/2$) происходит слияние корней α_1 и α_2 в точке $\alpha=\pi$ ($\alpha=0$).

Итак, при малых значениях параметров уравнение (1) в области $D_{1,-1}$: $|b+h| < v/2 + o(v^2)$ имеет два периодических решения $\Gamma_{1,-1}$ (устойчивое и седловое). Рождение (исчезновение) этих решений происходит на бифуркационных поверхностях

$$L_{1,-1}^\pm: \pm(b+h)=v/2+o(v^2), \quad (13)$$

соответствующих негрубому периодическому решению $\Gamma_{1,-1}$.

Для $q=0$ случай $M_n=0$ исследован в [5], поэтому в дальнейшем предполагаем, что $M_n \neq 0$. Пусть $q=0, m=1, n=1$, тогда при условии

$$|L_1| < |M_1| \quad (14)$$

уравнение $V_1(\alpha)=0$ имеет два простых корня

$$\alpha_i = (-1)^{\omega_i} \arcsin(L_1/M_1) + \pi\omega_i,$$

$$\omega_i = \begin{cases} i-1, & \text{если } L_1/M_1 \geq 0, \\ i, & \text{если } L_1/M_1 < 0, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Корни α_i соответствуют двум решениям $x_i(t)=\alpha_i$, порождающим периодические решения $\Gamma_{1,0}^i$ колебательного типа.

Величина $dV_1(\alpha_i)/d\alpha$ в случае $L_1/M_1 \geq 0$ отрицательна для α_1 и положительна для α_2 . При $L_1/M_1 < 0$, наоборот, $dV_1(\alpha_1)/d\alpha > 0$, а $dV_1(\alpha_2)/d\alpha < 0$. Значение $L_1/M_1 = 1$ ($L_1/M_1 = -1$) отвечает слиянию корней α_1 и α_2 в точке $\alpha = \pi/2$ ($\alpha = 3\pi/2$).

Таким образом, при малых значениях параметров в области $|b| < |a| + o(v^2)$ существуют два решения $\Gamma_{1,0}$, одно из них - устойчивое, а второе - седловое. Бифуркационные поверхности

$$L_{1,0}^{\pm}: \pm |b| = |a| + o(v^2) \quad (15)$$

соответствуют негрубому периодическому решению $\Gamma_{1,0}$.

В случае $q=0$, $m \neq 1$, $n \neq 1$ коэффициент $V_1(\alpha) \neq 0$, поэтому переходим ко второму уравнению системы (8). Подставляя в него выражение для $u_1(t, \alpha)$ и интегрируя, получаем решение

$$u_2(t, \alpha) = [L_m \delta_{2m} - M_n \delta_{2n} \sin \alpha - 1/2 \sin \alpha \cos \alpha] t^2 / 2 + \\ + N_l \delta_{1l} \sin \alpha \cos t - 1/8 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2t - V_2 t^2 / 2.$$

Проверяя условие (9), находим коэффициент

$$V_2(\alpha) = L_m \delta_{2m} - M_n \delta_{2n} \sin \alpha - 1/2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Рассмотрим уравнение $V_2(\alpha)=0$. Его решение нельзя записать аналитически, поэтому для отыскания бифуркационных поверхностей поступим следующим образом. Уравнение $V_2(\alpha)=0$ имеет кратные корни при выполнении условий

$$\begin{cases} V_2(\alpha) = L_m \delta_{2m} - M_n \delta_{2n} \sin \alpha - 1/2 \sin \alpha \cos \alpha = 0; \\ dV_2(\alpha)/d\alpha = -M_n \delta_{2n} \cos \alpha - 1/2 \cos^2 \alpha + 1/2 \sin^2 \alpha = 0. \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение в виде

$$\cos^2 \alpha + M_n \delta_{2n} \cos \alpha - 1/2 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $\alpha_1 = \arccos([-M_n \delta_{2n} \pm (M_n^2 \delta_{2n}^2 + 2)^{1/2}]/2)$, $\alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$, соответствующие порождающим решениям, при условии $|-M_n \delta_{2n} \pm (M_n^2 \delta_{2n}^2 + 2)^{1/2}| \leq 2$. Подставив α_i в уравнение $V_2(\alpha)=0$, получим в окрестности начала координат

пространства параметров бифуркационные поверхности $L_{1,0}^{\pm}$, при переходе через которые возникает пара периодических решений типа седло-узел. Они определяются соотношениями

$$\begin{cases} 8bv^2 - [3a \pm (a^2 + 2v^4)^{1/2}] \{2[v^4 - a^2 \pm a(a^2 + 2v^4)^{1/2}]\}^{1/2} + o(v^3) = 0, \\ a \leq v^2/2 + o(v^3). \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом, область $D_{1,0}$ существования периодических решений $\Gamma_{1,0}$ колебательного типа ограничена бифуркационными поверхностями $L_{1,0}^{\pm}$ и $\overline{L_{1,0}^{\pm}}$ вида (15) и (16), соответственно. В случае $a=0$ поверхности $L_{1,0}^{\pm}$ не существуют, а для поверхности $\overline{L_{1,0}^{\pm}}$ получаем соотношение $\pm|b| = \frac{1}{4}v^2 + o(v^3)$, что совпадает с результатами работы [5].

2. Бифуркационные диаграммы периодических решений $\Gamma_{p,q}$

Продолжение решений $\Gamma_{p,q}$ в область конечных значений параметров $\{0 < b \leq 0.5, 0 < a \leq 2, 0 < h \leq 0.1, 0 < v \leq 3\}$ проводилось на основе метода точечных отображений [8] с помощью комплекса алгоритмов и программ [7]. Для каждого

решения определялись координаты начальной точки $(x(0), \dot{x}(0))$ и вычислялись его мультипликаторы ρ_1 и ρ_2 , характеризующие устойчивость. В качестве первого приближения начальной точки при малых значениях параметров использовались значения $x(0) = \alpha, \dot{x}(0) = q/p$ для порождающих решений, найденных в разделе 1.

На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,0}$ в плоскости параметров a, v . Область существования двух периодических решений $\Gamma_{1,0}^1$ и $\Gamma_{1,0}^2$ лежит выше кривой $l_{1,0}^1$. Вблизи этой кривой одно решение $\Gamma_{1,0}^1$ устойчиво, второе решение $\Gamma_{1,0}^2$ имеет седловой тип. Кривая $l_{1,0}^1$ отвечает слиянию их в сложное периодическое решение типа седло-узел.

Решение $\Gamma_{1,0}^2$ сохраняет седловой тип во всей области существования. На кривых l^1, l^2 и l^3 мультипликатор устойчивого решения $\Gamma_{1,0}^1$ становится равным (-1). При переходе через кривые l^1 и l^3 в область R_1 решение $\Gamma_{1,0}^1$ становится седловым, при этом возникает устойчивое периодическое решение $\Gamma_{2,0}$ удвоенного периода 4π . Выход из области R_1 через кривую l^2 сопровождается возникновением периодического колебания $\Gamma_{2,0}$ седлового типа.

В точке W один из мультипликаторов периодического решения $\Gamma_{1,0}^1$ обращается в +1. Происходит ветвление решения $\Gamma_{1,0}^1$: оно распадается на два устойчивых $\Gamma_{1,0}^{11}, \Gamma_{1,0}^{12}$ и одно седловое $\Gamma_{1,0}^{13}$. Область R_2 их существования ограничена кривыми g^1 и g^2 , выходящими из точки W .

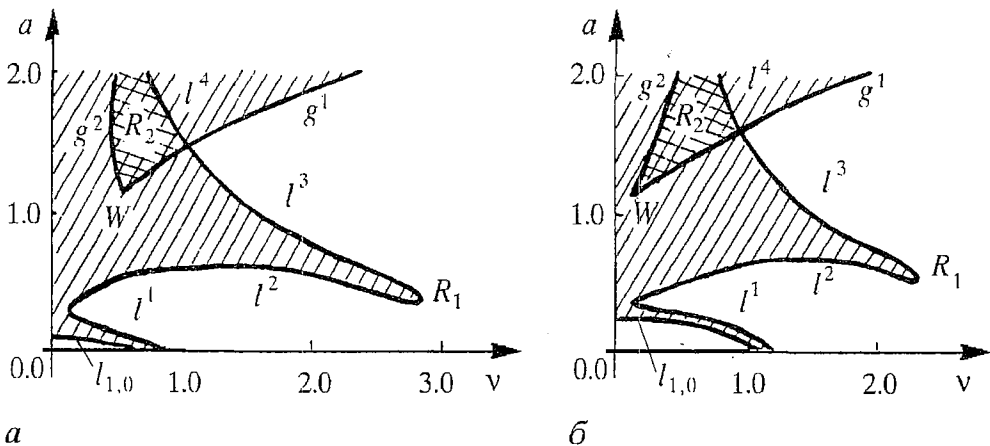


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,0}$ при $h=0.05$ и фиксированных значениях b : а - 0.1; б - 0.25

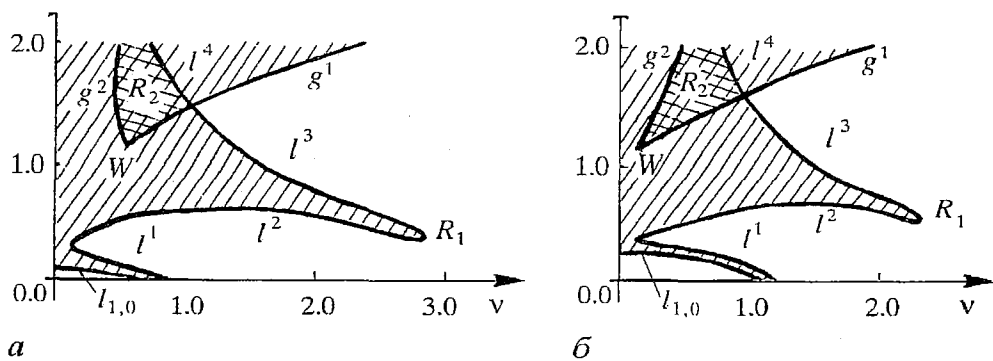


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма периодических вращений $\Gamma_{1,1}$ при $h=0.05$ и фиксированных значениях b : а - 0.1; б - 0.25

Решения $\Gamma_{1,0}^{11}$ и $\Gamma_{1,0}^{13}$ не меняют свой тип в рассматриваемой области изменения параметров. Решение $\Gamma_{1,0}^{12}$ становится седловым при переходе через кривую l^4 . При этом один из его мультипликаторов обращается в (-1) . Граница g^1 соответствует слиянию в сложное периодическое решение типа седло-узел и последующему исчезновению решений $\Gamma_{1,0}^{11}$ и $\Gamma_{1,0}^{13}$, граница g^2 - решений $\Gamma_{1,0}^{12}$ и $\Gamma_{1,0}^{13}$.

Область устойчивости периодических колебаний ротора на рис. 1 заштрихована. В области, имеющей двойную штриховку, одновременно существуют два разных колебательных периодических движения ротора периода 2π . Каждое из них имеет свою область притяжения. Движение реализуется в зависимости от начальных условий. Сравнение приведенных на рис. 1 бифуркационных диаграмм показывает, что вращающий момент уменьшает область устойчивости периодических колебаний.

Перейдем к рассмотрению бифуркационной диаграммы периодических вращений $\Gamma_{1,1}$ (рис. 2). Они существуют в области правее кривой $l_{1,1}$. В части этой области, расположенной между кривыми $l_{1,1}$ и g^1 , существуют два решения $\Gamma_{1,1}^1$ и $\Gamma_{1,1}^2$. Одно из них, $\Gamma_{1,1}^2$, имеет седловой тип, второе, $\Gamma_{1,1}^1$, вблизи кривой $l_{1,1}$ устойчиво. На кривой $l_{1,1}$ эти решения сливаются в сложное решение $\Gamma_{1,1}$ типа седло-узел. Кривая g^1 соответствует возникновению еще одного сложного периодического решения $\Gamma_{1,1}$ типа седло-узел, которое при переходе через нее с ростом ν распадается на устойчивое $\Gamma_{1,1}^3$ и седловое $\Gamma_{1,1}^4$. Таким образом, в области

правее кривой g^1 существуют четыре периодических решения $\Gamma_{1,1}^i$ ($i=1,4$), причем два из них, $\Gamma_{1,1}^2$ и $\Gamma_{1,1}^4$, являются седловыми. Смена устойчивости решения $\Gamma_{1,1}^1$ происходит на кривых l^1 , l^2 и l^3 . Переход через l^1 и l^3 сопровождается возникновением устойчивого периодического решения $\Gamma_{2,2}$ удвоенного периода, переход через кривую l^2 - возникновением седлового решения $\Gamma_{2,2}$. Решение $\Gamma_{1,1}^3$ становится седловым при переходе через кривую g^2 , при этом одновременно возникает устойчивое периодическое решение $\Gamma_{2,2}$. При нарастании вращающего момента область существования синхронизмов $\Gamma_{1,1}$ смещается вправо, область устойчивости (на рис. 2 она заштрихована) значительно уменьшается.

Аналогичный вид имеет бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,-1}$ (рис. 3). В области между линиями $l_{1,-1}$ и g^1 существуют два решения $\Gamma_{1,-1}^1$ и $\Gamma_{1,-1}^2$ правее кривой g^1 - четыре решения $\Gamma_{1,-1}^i$ ($i=1,4$). Синхронизмы $\Gamma_{1,-1}^2$ и $\Gamma_{1,-1}^4$ всюду в области существования имеют седловой тип. Область устойчивости

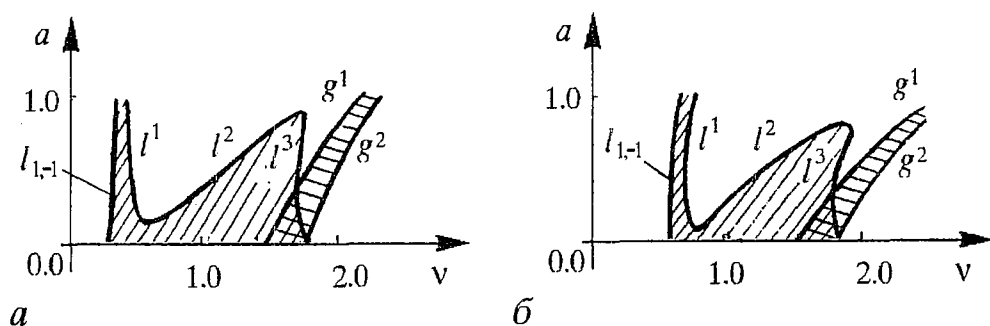


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма периодических решений $\Gamma_{1,-1}$ при $h=0.05$ и фиксированных значениях b : а - 0.1; б - 0.25

решений $\Gamma_{1,-1}^1$ и $\Gamma_{1,-1}^3$ заштрихована. Смена их типа сопровождается возникновением решений $\Gamma_{2,-2}$ удвоенного периода.

Проведенное исследование показало, что бифуркационные поверхности, ограничивающие область существования периодических решений $\Gamma_{p,q}$ при малых значениях параметров b, a, h, v , уравнения которых получены в 1 разделе, продолжают существовать в область конечных значений параметров. При этом полученные уравнения пригодны и для не малых значений $\{0 < b \leq 0.5, 0 < a \leq 1, 0 < h \leq 0.1, 0 < v \leq 1\}$. Так, для кривой $l_{1,1}^1$ на рис. 2, а ($b=0.1, h=0.05$) из уравнения (12) поверхности $L_{1,1}^+$ получаем уравнение $v=0.1$. Для кривой $l_{1,1}^2$ на рис. 2, б ($b=0.25, h=0.05$) имеем уравнение $v=0.4$. Для кривой $l_{1,-1}^1$ на рис. 3 из уравнения (13) поверхности $L_{1,-1}^+$ легко получаются уравнения $v=0.3$ ($b=0.1, h=0.05$) и $v=0.6$ ($b=0.25, h=0.05$). Для кривой $l_{1,0}$ на рис. 1, а ($b=0.1, h=0.05$) из (15) при $v=0$ получаем $a=0.1$, при $a=0$ из (16) находим $v=(0.4)^{1/2} \approx 0.63$. Для той же кривой на рис. 1, б ($b=0.25, h=0.05$) имеем точки $(v=0, a=0.25)$ и $(v=1, a=0)$.

Библиографический список

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
2. Власова О.Ф., Заславский Г.М. Влияние диссипации на образование хаоса при перекрытии двух резонансов // Препринт СО АН СССР № 245Ф. Красноярск, 1983.
3. Арансон И.С., Горшков К.А., Рабинович М.И. Возникновение стохастичности при взаимодействии солитона модуляции с низкочастотными волнами // ЖЭТФ. 1984. Т. 86, вып. 3. С. 929.
4. Баталова З.С., Белякова Г.В. Области существования и устойчивости стационарных и периодических движений параметрически возбуждаемого маятника // Динамика систем: Динамика и управление. Межвуз. сб. научн. тр. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. С. 63.
5. Баталова З.С., Бухалова Н.В. Исследование периодических решений дифференциального уравнения маятникового типа // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 3. С. 516.
6. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Препринт ИПМ РАН № 105. М., 1976.
7. Неймарк Ю.И., Баталова З.С., Белякова Г.В. и др. Алгоритмы и программы численного исследования динамических систем. Горький: ГГУ, 1983.
8. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.

STUDY OF A PARAMETRICALLY EXCITED ROTOR WITH PERIODIC MOTIONS

N.V. Kiseleva

The periodic motions of a rotor described by nonlinear nonautonomous differential equation with four parameters are studied. For small values of parameters equations of bifurcation surfaces limiting existence regions of oscillatory and rotatory periodic motions are obtained. In the bounded region of the parameter space their bifurcation diagrams containing regions of existence and stability are constructed. Bifurcations leading to excitation of periodic motions and to change of stability type are found.



Киселева (Бухалова) Наталья Владимировна - окончила Нижегородский государственный университет. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Доцент кафедры теории управления и динамики машин ННГУ. Область интересов - качественная теория дифференциальных уравнений, фазовый портрет, бифуркации и хаос в нелинейных неавтономных динамических системах. Имеет более 30 печатных работ.

E-mail: KIS@tudm.unn.ac.ru