Бифуркации в динамических системах различной природы

Изв. вузов «ПНД», т.9, № 6, 2001 УДК 531.36

МЕТОД КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В ИССЛЕДОВАНИИ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ К СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко

На основе метода квазипотенциала исследуется устойчивость предельных циклов нелинейных систем к малым случайным возмущениям. Для аппроксимации квазипотенциала используется орбитальная квадратичная форма, задаваемая некоторой определенной на цикле матричной функцией. Эта функция (функция чувствительности) характеризует реакцию рассматриваемой системы на случайные возмущения: позволяет описать разброс случайных траекторий вблизи цикла, указать участки цикла, наиболее и наименее чувствительные к помехам. Построение функции чувствительности сводится к решению некоторой краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова. Для решения этой краевой задачи строится итерационный метод, обсуждаются условия и скорость его сходимости. Результаты иллюстрируются на примере анализа стохастически возмущенного цикла модели Лоренца.

Многие процессы в механических и биологических системах, электронных генераторах и химических реакциях носят автоколебательный характер. Исходной математической моделью для них, как правило, служит нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \qquad (1)$$

где x - n-мерный вектор, $f(x)$ - достаточно гладкая вектор-функция.

Возможность периодических автоколебаний связана с существованием у системы (1) T-периодического решения $x=\xi(t)$, фазовая траектория которого (цикл Г) является экспоненциально устойчивой. Последнее означает, что в малой окрестности D цикла Г при некоторых $K>0$, $l>0$ для всякого решения $x(t)$ системы (1) выполняется неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \le K\, e^{-lt}\|\Delta(x_0)\|.$$

Здесь $\Delta(x)=x-\gamma(x)$ - отклонение точки x от цикла Г, $\gamma(x)$ - ближайшая к x точка цикла Г.

В ходе функционирования реальные системы испытывают внешние воздействия самой различной природы. Исследование автоколебаний нелинейных систем в присутствии случайных возмущений было начато в [1] и продолжено в большом числе работ (см., например, [2-7]). Обзор некоторых последних результатов можно найти в [8].

Для систем со случайными возмущениями стандартной моделью является стохастическая система (с формализмом Ито или Стратоновича)

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{w}, \tag{2}$$

где $w(t)$ - n-мерный винеровский процесс; $\sigma(x)$ - достаточно гладкая $n\times n$-функция, определяющая зависимость помех от состояния системы; ε - параметр интенсивности возмущений. Предполагается, что $\det\sigma(x)|_\Gamma \neq 0$ - шумы на орбите Г являются невырожденными. В результате действия возмущений случайные траектории системы (2) формируют вокруг предельного цикла Г некоторый пучок.

Исчерпывающее описание (плотность распределения $\rho(t,x,\varepsilon)$) этого пучка для модели Ито дается уравнением Фоккера - Планка - Колмогорова (ФПК)

$$\partial\rho/\partial t = L\rho, \qquad L\rho = \varepsilon^2/2\,\Sigma_{i,j=1}^{n}\partial^2(a_{ij}\,\rho)/\partial x_i\partial x_j - \Sigma_{i=1}^{n}\partial(f_i\,\rho)/\partial x_i\,, \qquad a_{ij} = [\sigma\sigma^\mathrm{T}]_{ij},$$

где T - знак транспонирования.

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся в (2) режим стохастических автоколебаний, то можно ограничиться исследованием стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК

$$L\rho = 0.$$

Аналитическое исследование уравнения ФПК даже в простейшем случае цикла на плоскости (n=2) представляет весьма сложную задачу. При малых шумах здесь возникают известные трудности, связанные с малыми коэффициентами при старших производных.

Соответствующая асимптотика стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$ в случае малых шумов для моделей Ито и Стратоновича совпадает и задается квазипотенциалом

$$v(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\rho(x,\varepsilon),$$

где

$$\rho(x,\varepsilon) \approx N\exp[-v(x)/\varepsilon^2].$$

Квазипотенциал был введен в работах А.Д.Вентцеля и М.И.Фрейдлина [9] в связи с решением известной задачи Колмогорова о выходе случайной траектории из области, содержащей устойчивую точку покоя, и рассматривался далее в [10, 11]. Отметим, что метод квазипотенциала широко использовался в [12, 13] для решения задач статистической неравновесной термодинамики.

Квазипотенциал связан с некоторой вариационной задачей минимизации функционала действия и удовлетворяет уравнению Гамильтона - Якоби

$$(f(x), \partial v/\partial x) + \tfrac{1}{2}(\partial v/\partial x, \sigma(x)\sigma^\mathrm{T}(x)\partial v/\partial x)=0 \tag{3}$$

с условиями

$$v|_\Gamma = 0, \qquad v|_{D\setminus\Gamma} > 0. \tag{4}$$

Здесь $(f,g)=\Sigma_{i=1}^{n}f_i g_i$ - скалярное произведение векторов f и g. Квазипотенциал $v(x)$ в окрестности D является функцией Ляпунова для системы (1) и позволяет показать асимптотическую устойчивость цикла Г. Действительно, функция $v(x)$ в точках цикла Г обращается в нуль, а вне цикла - положительна; производная $\dot{v}(x)$ функции $v(x)$ в силу системы (1) благодаря (3) имеет вид

$$\dot{v} = (f(x), \partial v/\partial x) = -{}^1\!/_2\, \partial v/\partial x,\ \sigma(x)\sigma^{\mathrm{T}}(x)\partial v/\partial x) \le 0$$

и обращается в нуль только в точках цикла Г. Функция v строго убывает и стремится к нулю на всяком решении системы (1), выходящем из начальной точки, расположенной около цикла.

Уравнение Гамильтона - Якоби (3) выглядит проще, нежели исходное уравнение ФПК, однако и его точное решение является по-прежнему весьма сложной задачей. Здесь возможен конструктивный подход [14], связанный с введением еще одной асимптотики - малой окрестности исследуемого цикла.

В первом разделе настоящей работы дается локальное описание квазипотенциала вблизи предельного цикла. Аппроксимацией квазипотенциала служит орбитальная квадратичная форма

$$\varphi(x) = {}^1\!/_2\,(\Delta(x),\ \Phi^{+}(\gamma(x))\Delta(x)),$$

задаваемая определенной на Г симметрической $n\times n$-матрицей $\Phi(\gamma)$*. В результате асимптотика стационарной плотности распределения для рассматриваемого в работе случая, когда малы как шумы, так и отклонения от цикла, может быть записана в форме нормального распределения с ковариационной матрицей $\varepsilon^2\,\Phi(\gamma)$, дающей простое описание отклика рассматриваемой нелинейной системы на малые случайные возмущения. Функцию $\Phi(\gamma)$ можно рассматривать как функцию чувствительности цикла, позволяющую сравнивать реакцию различных его частей на вносимые помехи, предсказывая достаточно тонкие эффекты случайных воздействий. Возможности такого анализа для случая цикла на плоскости (n=2) рассмотрены в [15, 16] на примере осциллятора Ван дер Поля. В [17] для брюсселятора с помощью функции чувствительности удалось найти зону параметров, при которых очень малые (по сути, фоновые) помехи переводят систему в хаотический режим. В данной работе рассматривается метод построения функции чувствительности в общем n-мерном случае.

Во втором разделе построение функции чувствительности сводится к решению некоторой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Дается вероятностная интерпретация, связывающая искомое решение с некоторым установившимся режимом в линейной стохастической системе с периодическими коэффициентами.

В третьем разделе излагается итерационный метод построения решения данной краевой задачи, обсуждаются условия и скорость его сходимости.

В четвертом разделе результаты работы иллюстрируются примером анализа чувствительности стохастически возмущенного цикла модели Лоренца.

1. Аппроксимация квазипотенциала. Функция чувствительности

Квазипотенциал $v(x)$ вместе со своими частными производными первого порядка благодаря условиям (4) во всех точках предельного цикла Г равен нулю. Поэтому в малой окрестности цикла Г первым приближением функции $v(x)$ является орбитальная квадратичная форма (подробности см. в [14, 18])

$$\varphi(x) = {}^1\!/_2\,(\Delta(x),\ \Psi(\gamma(x))\Delta(x)), \qquad v(x) = \varphi(x) + O(\|\Delta(x)\|^3),$$

задаваемая определенной на Г функцией $\Psi(\gamma)=\partial^2 v(\gamma)/\partial x^2$. В каждой точке γ цикла Г значение функции $\Psi(\gamma)$ - симметрическая неотрицательно определенная $n\times n$-матрица. Из равенства $\partial v(\gamma)/\partial x=0$ непосредственно следует $\partial^2 v(\gamma)/\partial x^2 f(\gamma)=0$.

* Индекс «+» означает псевдообращение (см. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. М.: Наука, 1967).

Последнее означает, что $\Psi(\gamma)f(\gamma)=0$ - матрица $\Psi(\gamma)$ является вырожденной. При невырожденных шумах $\det\sigma(\gamma)\neq 0$ матрица $\Psi(\gamma)$ имеет ранг, равный n-1.

Введем матричную функцию $\Phi(\gamma)=\Psi^{+}(\gamma)$. Тогда для стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$ может быть получено приближение $\rho_*(x,\varepsilon)$ - асимптотика в форме нормального распределения

$$\rho(x,\varepsilon) \approx \rho_*(x,\varepsilon) = N\exp[-(\Delta(x),\ \Phi^{+}(\gamma(x))\Delta(x))/(2\varepsilon^2)].$$

Здесь $\varepsilon^2\Phi(\gamma)$ - ковариационная матрица распределения $\rho_*(x,\varepsilon)$. Она характеризует разброс точек пересечения случайных траекторий системы (2) с гиперплоскостью, ортогональной циклу Γ в точке γ.

Пусть $\lambda_1(\gamma)\geq\lambda_2(\gamma)\geq\ldots\geq\lambda_n(\gamma)$ - собственные числа, а $h_1(\gamma)$, $h_2(\gamma),\ldots,h_n(\gamma)$ - ортонормированный базис собственных векторов матрицы $\Phi(\gamma)$. Поскольку при каждом $\gamma\in\Gamma$ матрица $\Phi(\gamma)$ вырождена (распределение сосредоточено в нормальной гиперплоскости), то $\lambda_n(\gamma)\equiv 0$ и соответствующий собственный вектор $h_n(\gamma)=$ $=f(\gamma)/\|f(\gamma)\|$ направлен по касательной к циклу. Остальные собственные числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ при невырождающихся на орбите Γ шумах системы (2) строго положительны и задают при каждом γ разброс случайных траекторий вокруг цикла в направлении векторов h_1, ..., h_{n-1} (базиса нормальной гиперплоскости).

Матрица $\Phi(\gamma)$ характеризует реакцию системы (2) вблизи цикла на случайные входные воздействия. Если систему (2) рассматривать как некоторый преобразователь стохастического входа (стационарный винеровский процесс $w(t)$) в стохастический выход (стационарное распределение пучка случайных траекторий вокруг цикла), то ее собственные значения задают коэффициенты усиления ($\lambda_i>1$) и ослабления ($\lambda_i<1$) этого преобразователя. Функция $\Phi(\gamma)$ - функция чувствительности цикла - позволяет описать неравномерность ширины пучка вдоль цикла по всем направлениям, указать участки цикла, наиболее и наименее чувствительные к помехам.

2. Периодическое решение матричного уравнения Ляпунова и его вероятностный смысл

Значения функции $\Phi(\gamma)$ в точках цикла удобно искать в параметрической форме. Решение $\xi(t)$, связывая точки цикла Γ с точками интервала $[0,T)$, задает естественную параметризацию: $\Phi(\xi(t))=W(t)$. Матрица $W(t)$ для экспоненциально устойчивого цикла Γ является единственным решением уравнения Ляпунова [14]

$$\dot{W} = F(t)W + WF^{\mathrm{T}}(t) + P(t)S(t)P(t) \tag{5}$$

с условиями

$$W(0) = W(T), \tag{6}$$

$$W(t)\,r(t) \equiv 0. \tag{7}$$

Здесь

$$F(t) = \partial f(\xi(t))/\partial x,\quad S(t) = \sigma(\xi(t))\sigma^{\mathrm{T}}(\xi(t)),\quad r(t) = f(\xi(t)),\quad P(t) = P_{r(t)},$$

где $P_r=I-rr^{\mathrm{T}}/(r^{\mathrm{T}}r)$ - матрица проектирования на подпространство, ортогональное вектору $r\neq 0$. Рассмотрим Σ - пространство T-периодических симметрических $n\times n$-матриц $W(t)$, определенных и достаточно гладких для $t\in(-\infty,\ \infty)$ и удовлетворяющих условию (7).

Решению $W(t)$ матричного дифференциального уравнения (5) в пространстве Σ можно дать простую вероятностную интерпретацию. Для этого рассмотрим две линейные системы:

детерминированную

$$\dot{z} = F(t)z \tag{8}$$

и стохастическую

$$\dot{z} = F(t)z + P(t)\dot{\eta}, \tag{9}$$

где z - n-мерный вектор, $\eta(t)$ - n-мерный винеровский процесс с матрицей вторых моментов $E(d\eta d\eta^{T})=S(t)dt$ (E - знак математического ожидания). Благодаря экспоненциальной устойчивости цикла Г нелинейной системы (1), система (8) является P-устойчивой [18]. Последнее означает, что при некоторых $K>0$, $l>0$ для всякого решения $z(t)$ системы (8) с начальным условием $z(0)=z_0$ выполняется неравенство

$$\|P(t)z(t)\| \le Ke^{-lt}\|P(0)z_0\|.$$

Ковариационная матрица $V(t)=\mathrm{cov}(z(t),z(t))$ произвольного решения $z(t)$ стохастической системы (9) удовлетворяет уравнению

$$\dot{V} = F(t)V + VF^{T}(t) + P(t)S(t)P(t). \tag{10}$$

Пусть $z^{\cdot}(t)$ - решение (9) со случайным вектором начальных данных $z^{\cdot}(0)=z_0$, удовлетворяющим условию $E(z_0)=0$, $\mathrm{cov}(z_0,z_0)=W(0)$. Тогда $V(t)\equiv W(t)$ на $[0,T]$. При этом решение $V(t)$ уравнения (10) на всем интервале $[0,\infty)$ является T-периодической функцией.

Таким образом, в стохастической системе (9) существует некоторый периодический режим, связанный с решением $z^{\cdot}(t)$. Ковариационной матрицей периодического случайного процесса $z^{\cdot}(t)$ и является искомое решение $W(t)$ системы (5)-(7). Рассмотрим теперь произвольное решение $z(t)$ системы (9) и его проекцию $z_P(t)=P(t)z(t)$. Обозначим $V_P(t)=\mathrm{cov}(z_P(t),z_P(t))$.

Утверждение 1. Пусть детерминированная система (8) является P-устойчивой. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{t\to\infty} (V_P(t) - W(t)) = 0, \tag{11}$$

$$\lim_{t\to\infty} E\,\|z_P(t) - z^{\cdot}(t)\|^2 = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Из соотношений $V_P(t)=P(t)V(t)P(t)$ и $W(t)=P(t)W(t)P(t)$, где $V(t)=\mathrm{cov}(z(t),z(t))$ удовлетворяет (10), следует равенство $V_P(t)-W(t)=$ $=P(t)\Delta(t)P(t)$. Здесь $\Delta(t)=V(t)-W(t)$ - решение однородного уравнения

$$\dot{\Delta} = F\Delta + \Delta F^{T}.$$

Оно представимо в виде $\Delta(t)=Z(t)\Delta(0)Z^{T}(t)$, где $Z(t)$ - фундаментальная матрица системы (8). P-устойчивость (8) означает, что $P(t)Z(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и как следствие влечет соотношение (11).

Утверждение (12) следует из (11) и соотношений

$$E\|z_P(t)-z^{\cdot}(t)\|^2 \le 2E\|z_P(t)-P(t)z^{\cdot}(t)\|^2 + 2E\|P(t)z^{\cdot}(t)-z^{\cdot}(t)\|^2,$$

$$E\|z_P(t)-P(t)z^{\cdot}(t)\|^2 = \mathrm{Tr}(P(t)\Delta(t)P(t)),$$

$$E\|P(t)z^{\cdot}(t)-z^{\cdot}(t)\|^2 = \mathrm{Tr}((P(t)-I)W(t)(P(t)-I)) = 0.$$

Как видим, P-устойчивость детерминированной системы (8) означает, что в стохастической системе (9) проекция $z_P(t)=P(t)z(t)$ любого решения $z(t)$ сходится в среднем квадратичном к периодическому решению $\tilde{z}(t)$. При этом (см. (11)) проекция $V_P(t)=P(t)V(t)P(t)$ любого решения $V(t)$ системы (10) сходится к периодическому решению $W(t)$ системы (5)-(7).

Замечание 1. Равенство $\varepsilon^2 W(t)=\varepsilon^2\Phi(\xi(t))$ означает, что ковариационная матрица $\operatorname{cov}(\tilde{z}^{\varepsilon}(t),\tilde{z}^{\varepsilon}(t))=\varepsilon^2 W(t)$ периодического решения $\tilde{z}^{\varepsilon}(t)$ линейной стохастической системы

$$\dot{z} = F(t)z + \varepsilon P(t)\dot{\eta}$$

в момент t является одновременно и ковариационной матрицей нормального распределения, аппроксимирующего стационарную плотность нелинейной системы (2) в точке $\gamma=\xi(t)$ орбиты Г.

3. Итерационный метод построения периодического решения матричного уравнения Ляпунова

Решение $W(t)$ задачи Коши для матричного уравнения Ляпунова (5) с начальным условием $W(0)=W_0$ можно записать в виде

$$W(t) = Z(t)[W_0 + \int_0^t Z(-\tau)P(\tau)S(\tau)P(\tau)Z^{\mathrm{T}}(-\tau)d\tau]\, Z^{\mathrm{T}}(t),$$

где $Z(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (8). Последовательные значения $W_m = W(mT)$ этого решения связаны рекуррентной формулой

$$W_{m+1} = \mathcal{L}[W_m] + Q.$$

Здесь оператор $\mathcal{L}$ имеет вид $\mathcal{L}[W]=Z(T)WZ^{\mathrm{T}}(T)$, а

$$Q = \int_0^T Z(T\text{-}\tau)P(\tau)S(\tau)P(\tau)Z^{\mathrm{T}}(T\text{-}\tau)\, d\tau = \hat{W}(T),$$

где $\hat{W}(t)$ - решение уравнения (5) с условием $\hat{W}(0)=0$.

Пусть Σ_0 - подпространство симметрических $n\times n$-матриц V с условием $Vf(\xi(0))=0$.

Условие (6) приводит к задаче отыскания матрицы $\bar{W}$, являющейся решением уравнения

$$W = \mathcal{L}[W] + Q. \qquad (13)$$

Для системы (8) матрица монодромии $B=Z(T)$ имеет собственный вектор $r=f(\xi(0))$ с собственным значением $\lambda_1=1$: $Br=r$. Остальные точки $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ спектра $\sigma(B)$ в силу P-устойчивости (8) лежат внутри единичного круга

$$q = \max_{2\le i\le n} |\lambda_i| < 1.$$

У оператора $\mathcal{L}$ все собственные значения имеют вид $\lambda_{i,j}(\mathcal{L})=\lambda_i\lambda_j$, $i,j = 1,\ldots,n$. Отметим, что $\lambda_{1,1}=\lambda_1^2=1$ отвечает собственному вектору rr^{T}. При этом остальная часть спектра $\mathcal{L}$ принадлежит кругу $|\lambda|\le q$.

Спектральный радиус $\rho(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ равен единице, поэтому система (13) является вырожденной. Наряду с решением $\bar{W}$ она имеет бесконечное множество решений вида $W=\bar{W}+Crr^{\mathrm{T}}$, где C - любое число. Условие (7) выделяет из всех решений (13) единственное - матрицу $\bar{W}\in\Sigma_0$. Здесь для $\bar{W}$ может быть получена невырожденная система.

Рассмотрим наряду с (13) уравнение

$$W = \mathcal{L}_P[W] + PQP \tag{14}$$

с оператором $\mathcal{L}_P[W]=PBWB^{\mathrm{T}}P$, где $P=P(0)$. Используя разложение Шура [19], легко доказать, что $\sigma(PB)=\{0,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ и, следовательно, $\rho(\mathcal{L}_P)=q^2$.

Всякое решение $W\in\Sigma_0$ уравнения (13) является решением уравнения (14). Неравенство $\rho(\mathcal{L}_P)<1$, гарантируя существование и единственность решения $\tilde{W}$ уравнения (14), обеспечивает сходимость итерационного процесса

$$W_{m+1} = \mathcal{L}_P(W_m) + PQP, \qquad W_0 = 0. \tag{15}$$

При этом

$$\tilde{W} = \lim_{m\to\infty} W_m = \Sigma_{k=0}^{\infty}\mathcal{L}_P{}^k[PQP] = \Sigma_{k=0}^{\infty}B^k{}_1 Q_1 (B_1{}^{\mathrm{T}})^k, \tag{16}$$

$$B_1 = PB, \quad Q_1 = PQP.$$

Ряд (16) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q^2<1$. Искомое решение $W(t)$ системы (5) - (7) может быть найдено по формуле

$$W(t) = P(t)Z(t)\tilde{W}\ Z^{\mathrm{T}}(t)P(t) + \hat{W}(t). \tag{17}$$

В результате для построения решения $W(t)$ системы (5)-(7) может быть предложен следующий алгоритм.

1. Найти на интервале $[0,T]$ матрицу $\hat{W}(t)$ - решение уравнения (5) с начальным условием $\hat{W}(0)=0$.
2. Найти на $[0,T]$ $Z(t)$ - фундаментальную матрицу решений системы (8).
3. Подсчитав $r=f(\xi(0))$, $P=I-rr^{\mathrm{T}}/(r^{\mathrm{T}}r)$, $Q_1=P\hat{W}(T)P$, $B_1=PZ(T)$, найти с требуемой точностью матрицу $\tilde{W}$ - сумму ряда (16).
4. Используя данные, полученные в 1, 2, 3, найти решение $W(t)$ по формуле (17).

Замечание 2. Эффективность данного итерационного алгоритма зависит от скорости сходимости ряда (16). Если цикл Г хорошо устойчив (q мало), то ряд (16) сходится быстро. Для слабо устойчивого цикла (q близко к единице), когда ряд сходится медленно, можно привлечь прямые методы [19], использующие ортогональные преобразования.

Замечание 3. Представленный здесь итерационный метод (15) можно трактовать как некоторый метод установления для отыскания решения $W(t)$ системы (5)-(7). Действительно, рассмотрим последовательность матричных функций $W_m(t)$, определенных на $[0,T]$ следующим образом: каждая функция $W_m(t)$ (m=0,1,2,...) есть решение уравнения (5) с начальным условием $W_m(0)=PW_{m-1}(T)P$, при этом $W_0(0)=0$. Функции $W_0(t),W_1(t),...$ можно рассматривать как последовательные звенья единого решения системы (5), определенного на $[0,+\infty)$ и имеющего разрывы, задаваемые оператором проектирования, в моменты времени, кратные периоду T. Последовательность функций $W_m(t)$ связана с последовательностью матриц W_m из (15) соотношениями $W_m(0)=W_m$. Сходимость последовательности W_m к $\bar{W}$ означает сходимость функций $W_m(t)$ к периодическому решению $W(t)$, при этом $W(0)=W(T)=\bar{W}$.

4. Пример: модель Лоренца со случайными возмущениями

Рассмотрим стохастическую систему

$$\dot{x} = \sigma(-x + y) + \varepsilon\dot{w}_1,$$

$$\dot{y} = rx - y - xz + \varepsilon\dot{w}_2,$$

$$\dot{z} = -bz + xy + \varepsilon\dot{w}_3,$$

полученную добавлением малых аддитивных случайных возмущений в классическую модель Лоренца [20]. Здесь $w_i(t)$ $(i=1,2,3)$ - независимые стандартные винеровские процессы. При $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=300$ у детерминированной

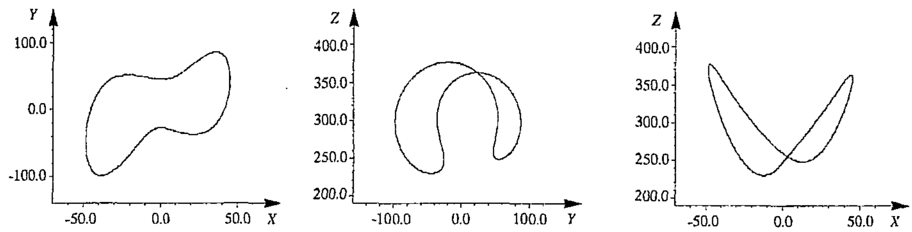


Рис. 1. Проекции пучка детерминированной модели Лоренца $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=300$, $\varepsilon=0$

системы ($\varepsilon=0$) существует устойчивый предельный цикл Г, задаваемый T-периодическим решением $\xi(t)$, $T=0.4199$. На рис. 1 изображены проекции цикла Г на координатные плоскости.

В результате действия случайных возмущений траектории системы сходят с детерминированного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок, проекции которого изображены на рис. 2. Случайная траектория этого пучка была получена прямым численным моделированием (метод Рунге - Кутты четвертого порядка с шагом $h=0.0001$) стохастической системы Лоренца, возбуждаемой случайной помехой интенсивности $\varepsilon=0.5$.

В каждой точке γ цикла Г разброс пучка случайных траекторий характеризуется некоторой ковариационной матрицей. Ее эмпирическое значение $D(\gamma)$ можно вычислить по выборке, составленной из точек пересечения случайной траектории с плоскостью, ортогональной циклу в точке γ. Матрица $U(\gamma)=D(\gamma)/\varepsilon^2$ является эмпирической функцией чувствительности цикла Г в точке γ к воздействующим помехам интенсивности ε. Ее положительные собственные значения $\bar{\lambda}_1(\gamma)\geq\bar{\lambda}_2(\gamma)>0$ служат эмпирическими скалярными характеристиками этой чувствительности. В силу вырожденности матрицы $U(\gamma)$ третье собственное значение $\bar{\lambda}_3(\gamma)\equiv0$.

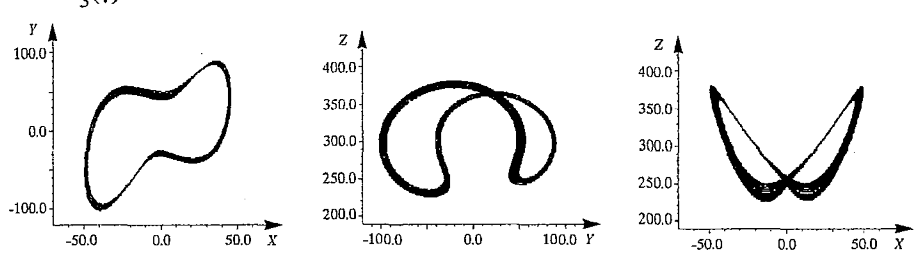
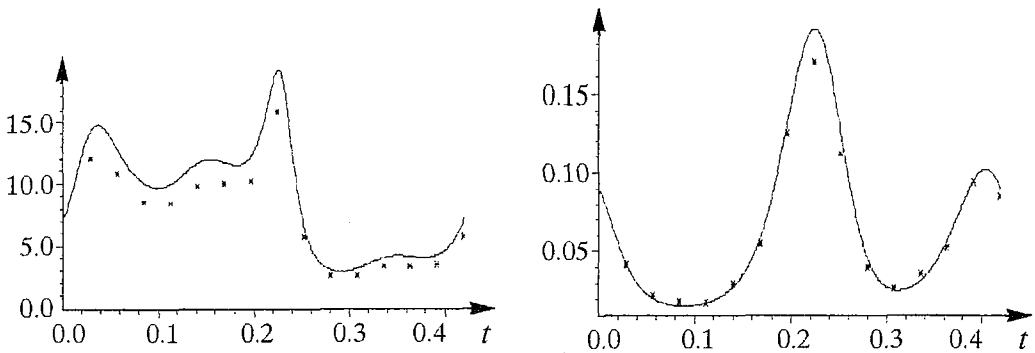


Рис. 2. Проекции пучка стохастической модели Лоренца $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=300$, $\varepsilon=0.5$



а *б*

Рис. 3. Характеристики стохастической чувствительности цикла: *а* - график λ_1 и значения $\bar{\lambda}_1$, *б* - график λ_2 и значения $\bar{\lambda}_2$

Развиваемый в данной работе метод аппроксимации квазипотенциала позволяет найти матрицу $\Phi(\gamma)$ - теоретическую функцию чувствительности. Собственные значения $\lambda_1(\gamma)\geq\lambda_2(\gamma)>0$ матрицы $\Phi(\gamma)$ играют роль теоретических характеристик чувствительности.

Приведем результаты расчета значений $\bar{\lambda}_1(\gamma)$, $\bar{\lambda}_2(\gamma)$ и $\lambda_1(\gamma),\lambda_2(\gamma)$ для рассмотренного выше стохастически возмущенного цикла модели Лоренца. Для получения теоретических характеристик чувствительности использовался итерационный метод, описанный в третьем разделе.

Представленные на рис. 3 отдельные значения $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ (звездочки) для эмпирической функции и графики λ_1, λ_2 (сплошная линия) для теоретической функции чувствительности связаны с помощью функции $\xi(t)$ с интервалом $[0,T]$. Как видно из рисунков, теоретическая функция чувствительности, задающая грубую асимптотику стационарной плотности распределения при малых шумах в малой окрестности цикла Г, хорошо согласуется с экспериментальными данными. Теоретическая функция чувствительности достаточно точно передает важные качественные особенности в поведении пучка: неравномерность ширины пучка вдоль цикла, значительный перепад величины разброса пучка по нормали к циклу.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№ 00-01-00076).

Библиографический список

1. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем// ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.

2. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961.

3. *Рытов С.М.* Введение в стохастическую радиофизику. М.: Наука, 1976.

4. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979.

5. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.

6. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

7. *Soong T.T., Grigorin M.* Random vibration of mechanical and structural systems. RTR Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1993.

8. *Smelyanskiy V.N., Dykman M.I., Maier R.S.* Topological features of large fluctuations to the interior of a limit cycle// Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, № 3. P. 2369.

9. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
10. *Naeh T.,Klosek M.M., Matkowsky B.J., Schuss Z.* A direct approach to the exit problem// SIAM J. Appl.Math. 1990. Vol. 50, № 2. P.595.
11. *Day M.V.* Regularity of boundary quasi-potentials for planar systems// Applied mathematics and optimization. 1994. Vol. 30. P.79.
12. *Graham R., Tel T.* Nonequilibrium potential for coexisting attractors// Phys. Rev. 1986. Vol. 33. P. 13227.
13. *Graham R., Tel T.* Steady state ensemble for the complex Ginzburg - Landau equation with weak noise// Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42. P. 46617.
14. *Мильштейн Г.Н., Ряшко Л.Б.* Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями// Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, вып. 1. С. 51.
15. *Bashkirtseva I.A., Isakova M.G., Ryashko L.B.* Quasipotential in stochastic stability analysis of the nonlinear oscillator orbits// J. Neural, Parallel & Scientific Computations. 1999. Vol. 7(3). P. 299.
16. *Башкирцева И.А., Исакова М.Г., Ряшко Л.Б.* Асимптотическое разложение квазипотенциала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора// Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 10. С. 1319.
17. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б.* Метод квазипотенциала в анализе чувствительности автоколебаний к стохастическим возмущениям// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т.6, № 5. С. 19.
18. *Ряшко Л.Б.* Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений// Прикл.математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 4. С. 582.
19. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
20. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flows// J.Atmos.Sci. 1963. Vol. 12(20). P. 139.

Уральский государственный университет

Поступила в редакцию 7.06.01
после доработки 8.09.01

QUASIPOTENTIAL METHOD IN LOCAL STABILITY ANALYSIS OF THE STOCHASTICALLY FORCED LIMIT CYCLES

I.A. Bashkirtseva, L.B.Ryashko

The stability of nonlinear systems limit cycles with respect to small random disturbances is investigated on the basis of quasipotential method. For quasipotential approximation the orbital quadratic form given by some matrix function defined on a cycle is used. This function (sensitivity function) characterizes the considered system response to random disturbances and allows to describe the random trajectories dispersion near to cycle and to point out sensitive and nonsensitive regions of cycle. The construction of a sensitivity function is reduced to the solution of some boundary value problem for Lyapunov matrix equation. For the solution of this boundary value problem the iterative method is created. The conditions and degree of its convergence are discussed. The results are illustrated on an example of the sensitivity analysis of stochastically perturbed Lorenz model cycle.

Башкирцева Ирина Адольфовна - родилась в 1965 году, окончила Уральский госуниверситет (1987), кандидат физико-математических наук (1997), доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета. Область научных интересов - асимптотический анализ и численное моделирование нелинейных динамических систем. Автор ряда работ по данной тематике.

Ряшко Лев Борисович - родился в 1953 году. Окончил Уральский госуниверситет (1975), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики Уральского госуниверситета, Соросовский доцент (1996, 1998). Область научных интересов - устойчивость, стабилизация и управление стохастическими системами. Автор ряда статей по данной тематике. E-mail: Lev.Ryashko@usu.ru