Изв. вузов «ПНД», т.9, № 6, 2001

УДК 531.01:517.9

МОДЕЛИ АВТОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДАХ С ДИФФУЗИЕЙ И УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ

В.М. Журавлев

Рассматривается задача построения и изучения точных решений моделей автоволновых процессов в средах с диффузией в двумерном и четырехмерном координатных пространствах для некоторых типов нелинейных источников, имеющих тесную связь с уравнением Лиувилля. Показана особая роль уравнения Лиувилля в теории двумерных нелинейных процессов с диффузией. Найдены новые классы точных решений в задачах автоволн в двумерной среде, в том числе, в четырехмерном координатном пространстве.

Введение

Одной из наиболее типичных задач теории автоволновых процессов в активных средах с диффузией является задача о распространении волн горения [1, 2]. В общем случае эта задача моделируется нелинейным уравнением теплопроводности вида [1,2]

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(k\,(T)\,\nabla T) = J\,(T). \qquad (1)$$

Здесь $k(T)$ - коэффициент теплопроводности, а $C(T)$ - коэффициент теплоемкости среды, зависящие от ее температуры $T=T(x,y,t)$; $J(T)$ - нелинейный источник тепла, также зависящий от температуры. В более общем случае, например, в случае автоволновых химических реакций [3], динамика модели описывается системой нелинейных уравнений аналогичного вида

$$C_i(\mathbf{u})\frac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla(D_i(\mathbf{u})\,\nabla u_i) = J_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, n, \qquad (2)$$

где $\mathbf{u}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ - вектор параметров состояния среды. Наиболее часто встречающейся формой нелинейности коффициентов диффузии и источников в таких моделях являются степенные законы

$$k(T) \sim d_0T^k, \;\; C(T) \sim c_0T^l, \;\; J(T) = j_0T^s,$$

где d_0, c_0, j_0, k, l и s - некоторые вещественные постоянные.

Один из наиболее эффективных аналитических методов исследования решения уравнений для таких моделей реализуется с помощью автомодельных решений [1, 2]. Обычной формой автомодельных решений являются стационарные решения со степенной зависимостью от координат и времени, которые описывают одиночные локализованные образования, например, ударные волны или процессы с обострением [2, 4]. Однако волновые процессы, состоящие из совокупности локализованных возбуждений, или процессы, близкие к периодическим, например, волны типа ведущий центр, такие методы исследовать не позволяют .

Для специального класса нелинейных моделей типа (2), так называемых диффузионных цепочек Тоды, в работах [5, 6, 7] был найден способ построения достаточно широкого класса точных решений, описывающих волновые состояния активной среды с различными свойствами локализации возбуждений и динамикой, близкой к периодической. Основой этого подхода служили решения уравнения Лиувилля и цепочек Тоды в виде квадратичных форм, первоначально найденные в работах [8], и в несколько иной форме в работе [9]. В дальнейшем этот метод был обобщен и распространен на случай многомерных уравнений Лиувилля и цепочек Тоды [10].

В настоящей работе расширяется класс моделей типа диффузионные цепочки Тоды, найденный и исследованный в [5, 6]. В том числе, рассмотрены диффузионные модели в четырехмерном координатном пространстве и построены их точные решения. Исследованы некоторые общие свойства этих моделей, связанные со свойствами уравнения Лиувилля, в частности, с трансформационными свойствами этого уравнения по отношению к точечным источникам в правой части.

1. Свойства уравнения Лиувилля и его точных решений

Согласно [9, 5, 6], решения уравнения Лиувилля

$$\Delta\Phi = \Omega e^{-2\Phi}, \tag{3}$$

где Δ - оператор Лапласа в двумерном координатном пространстве, а Ω - вещественная постоянная, могут быть представлены в виде $\Phi=\ln\Psi$, где Ψ - квадратичная форма

$$\Psi(z, \bar{z}) = a|\psi_1|^2 + b|\psi_2|^2 + c\psi_1\psi_2^* + c^*\psi_1^*\psi_2 \tag{4}$$

относительно аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ комплексного аргумента $z=x+iy$. Коэффициентами этой квадратичной формы являются вещественные постоянные a и b и комплексная постоянная c, связанные с Ω соотношением $\Omega=ab-|c|^2$. Функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}\psi_1(z) = \phi_1(z)[W(z)]^{-1/2}, \quad \psi_2(z) = \phi_2(z)[W(z)]^{-1/2}, \\ W(z) = \phi_1(z)\frac{d}{dz}\phi_2(z) - \phi_2(z)\frac{d}{dz}\phi_1(z),\end{gathered} \tag{5}$$

где $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ - две произвольные линейно независимые аналитические функции.

Обратим внимание дополнительно на то, что для уравнения Лиувилля существует преобразование, отображающее множество его решений на себя. Пусть $\Phi(z, \bar{z})$ - решение уравнения Лиувилля, тогда функция

$$\Phi \to \tilde{\Phi}(z, \bar{z}) = \Phi(\zeta(z),\ \ \zeta^*(\bar{z})) + f(z) + f^*(\bar{z}) \tag{6}$$

при произвольной аналитической функции $f(z)$ и условии

$$d\zeta/dz = e^{-2f(z)}$$

вновь является решением уравнения Лиувилля.

Еще одним важным, но малоизвестным свойством уравнения Лиувилля является существование преобразования, связывающего решения этого уравнения без источников с решениями этого уравнения с совокупностью точечных источников. Рассмотрим неоднородное уравнение Лиувилля следующего вида:

$$\Delta\Phi = \Omega e^{-2\Phi} + J(x,y), \tag{7}$$

где в простейшем случае $J(x,y)=k\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$, k - вещественная постоянная, $\delta(x)$-δ-функция Дирака. Решение $u(z,\bar{z})$ в комплексных координатах неоднородного уравнения Лапласа с точечным источником

$$\Delta u_0 = k\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \tag{8}$$

может быть представлено следующим образом (см. [11, с. 333]):

$$u_0(z, \bar{z}) = -(k/2) \ln|z - z_0|^2 = -(k/2) [\ln(z - z_0) + \ln(\bar{z} - \bar{z}_0)],$$

где $z_0=x_0+iy_0$. Используя это соотношение для уравнения (7), рассмотрим вспомогательную функцию

$$U = \Phi - u_0.$$

В силу (8) функция U удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = \Omega(z - z_0)^k (\bar{z} - \bar{z}_0)^k e^{-2U}.$$

Сделаем замену переменных

$$\zeta(z) = (z-z_0)^{1-k}/(1-k),\quad \zeta^*(\bar{z}) = (\bar{z}-\bar{z}_0)^{1-k}/(1-k),\quad k\neq 1, \tag{9}$$

$$\zeta(z) = \ln(z - z_0),\quad \zeta^*(\bar{z}) = \ln(\bar{z} - \bar{z}_0),\quad k=1. \tag{10}$$

В результате функция U как функция новых переменных ζ и ζ^* удовлетворяет однородному уравнению Лиувилля (3). Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Существование точечного источника в правой части уравнения Лиувилля эквивалентно точечной неаналитичности функций $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ либо в точке, где сосредоточен источник (при $k\geq 1$), либо на бесконечности (при $k<1$). Этот результат обобщается на случай произвольного конечного числа точечных источников в правой части уравнения Лиувилля (7)

$$J(x,y) = \Sigma_{\alpha=0}^{N} k(\alpha)\delta(x - x_\alpha)\delta(y - y_\alpha).$$

В этом случае рассмотрим функцию u_N, удовлетворяющую неоднородному уравнению Лапласа

$$\Delta u_N = \Sigma_{\alpha=0}^{N} k(\alpha)\delta(x - x_\alpha)\delta(y - y_\alpha) \tag{11}$$

и имеющую вид

$$u_N = -\Sigma_{\alpha=0}^{N} (k(\alpha)/2) \ln|z - z_\alpha|^2 = -\Sigma_{\alpha=0}^{N} (k(\alpha)/2) [\ln(z - z_\alpha) + \ln(\bar{z} - \bar{z}_\alpha)],$$

где $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Тогда функция

$$U = \Phi - u_N$$

как функция координат

$$\zeta(z) = \int \prod_{\alpha=1}^{N} (z - z_\alpha)^{-k(\alpha)} dz, \quad \zeta^*(\bar{z}) = \int \prod_{\alpha=1}^{N} (\bar{z} - \bar{z}_\alpha)^{-k(\alpha)} d\bar{z}$$

удовлетворяет однородному уравнению Лиувилля.

2. Модели с двухмодовым возбуждением и простым условием автономности

Рассмотрим диффузионные уравнения общего вида

$$C_i(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln u_i = J_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

среди которых выделим два основных класса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i = F_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i \Delta \ln v_i = G_i(\boldsymbol{v}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

Все эти уравнения могут рассматриваться как уравнения многокомпонентной среды с диффузией, состояние которой в каждой точке пространства и времени определяется векторами $\mathbf{u}=\{u_1,u_2,\ldots,u_N\}$ и $\boldsymbol{v}=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$, соответственно. Первый класс уравнений будем называть уравнениями с линейной диффузией, а второй - с нелинейной диффузией. Для первого класса систем коэффициент диффузии постоянен для каждого элемента состояния среды, а для второго - является функцией данного элемента среды: $D_i v_i^{-1}$. Основная идея использования представления решений уравнений Лиувилля в форме (4) в задачах, связанных с автоволнами в двумерных средах с диффузией, сводится к следующему.

Рассмотрим набор из N квадратичных форм Ψ_i вида (4), у которых координатные функции ψ_1, ψ_2 и коэффициенты a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Для уравнений первого класса введем функции $u_i = \ln\Psi_i$ и рассмотрим действие оператора линейной диффузии на эти функции. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i \Delta u_i &= (1/\Psi_i^2) \left[\Psi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i (a_i b_i - |c_i|^2)\right] = \\ &= e^{-2u_i}\left[e^{u_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i (a_i b_i - |c_i|^2)\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Одно из основных требований, которое накладывается на нелинейный источник в теории автоволн, это его автономность, то есть источник должен зависеть только от элементов состояния самой среды. Отсюда следует, что если найти условия автономности правой части последнего тождества, то это тождество можно рассматривать как уравнение автоволн с полученным источником в правой части. Нетрудно заметить, что условие автономности (15) эквивалентно двум условиям

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\Psi_j, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{16}$$

$$D_i[a_i(t)b_i(t) - |c_i(t)|^2] = l_i = \text{const} \tag{17}$$

при дополнительном требовании, что коэффициенты матрицы $\mathbf{M}=\{M_{ij}\}$ - постоянные. При выполнении этих условий уравнения автоволн в многокомпонентной среде примут вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - D_i\Delta u_i = e^{-2u_i}[e^{u_i}\Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, e^{u_j} - l_i, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Чтобы получить модели с уравнениями второго класса (14), функции v_i выберем в виде $v_i=\Psi_i^n$, где n - некоторое вещественное число; Ψ_i - квадратичные формы вида (4), коэффициенты которых a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Тогда имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i\,\Delta\ln v_i &= \frac{\partial \Psi_i^n}{\partial t} - D_i n\Delta\ln\Psi_i = \\ &= n\Psi_i^{n-1}\Big[\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i(a_ib_i - |c_i|^2)\Psi_i^{-n-1}\Big] = \\ &= nv_i^{(n-1)/n}\Big[\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} - D_i(a_ib_i - |c_i|^2)v_i^{-(n+1)/n}\Big]. \end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, условия автономности правой части этого тождества эквивалентны условиям (16), (17). Если они выполнены, то уравнения модели будут выглядеть так:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i\Delta\ln v_i = nv_i^{(n-1)/n}[\Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}v_j^{1/n} - l_iv_i^{-(n+1)/n}], \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{20}$$

Примеры моделей типа (20) для некоторых значений n приведены ниже.

n = 1: $$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i\Delta\ln v_i = [\Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}v_j - l_iv_i^{-2}],$$

n = -1: $$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i\Delta\ln v_i = -v_i^{-2}[\Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}v_j^{-1} - l_i],$$

n = -1/2: $$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i\Delta\ln v_i = -\tfrac{1}{2}\, v_i^3\, [\Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}v_j^{-2} - l_iv_i],$$

n = 1/2: $$\frac{\partial v_i}{\partial t} - D_i\Delta\ln v_i = \tfrac{1}{2} v_i^{-1}[\Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, v_j^2 - l_i\, v_i^{-3}].$$

Пользуясь тем, что при любом n тождества (19) относятся к одной и той же квадратичной форме Ψ_i, можно получить более общий тип модели, чем (20). Действительно, складывая почленно тождества (19), предварительно умножив их на постоянные $a_n=V^{[n]}(0)/n!$, где $V(x)$ - некоторая аналитическая в нуле функция, приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial V(\Psi_i)}{\partial t} - D_i\, V'(1)\,\Delta\ln\Psi_i = V'(\Psi_i)\Sigma_j^{N} M_{ij}\,\Psi_j - l_iV'(1)\Psi_i^{-2}, \tag{21}$$

где l_i и $\mathbf{M}$ - те же, что и в (16) и (17), а $V'(1)=[dV(x)/dx]_{x=1}$. Совокупность тождеств (21), рассматриваемых как уравнения относительно Ψ, представляет наиболее общий класс моделей с «простыми» условиями автономности (16) и (17).

Пространственная структура решений всех рассмотренных в разделе уравнений указывает на их тесную связь с уравнением Лиувилля. Как и в случае уравнения Лиувилля пространственная структура решений описывается двумя произвольными аналитическими функциями ϕ_1 и ϕ_2, входящими в определение квадратичной формы Ψ. Это позволяет рассматривать задачи с начальными условиями достаточно общего вида. Кроме того, уравнения этих моделей инвариантны относительно преобразований (6). В свою очередь, это определяет возможность преобразования неоднородной системы уравнений со статическими δ-образными источниками в однородную систему уравнений, что имеет место и в случае уравнения Лиувилля.

Как видно, центральное место в построении точных решений рассмотренных уравнений, с точки зрения их зависимости от времени, занимают условия (16), (17), а пространственная структура этих решений целиком определяется структурой решений уравнения Лиувилля. Разрешимость системы (16), (17) при $N=2$ была исследована в [5], а в [6] были рассмотрены общие принципы построения решений для случая $N>2$, там же был приведен конкретный пример построения решений для $N=3$. Заметим, что в случае $N=1$ условия (16), (17) приводят лишь к тривиальным решениям. Общее решение системы (16), (17) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_i = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, w_j.$$

Пусть $\mathbf{m}_a=\{m_a^{\,i}\}$ - собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$, соответствующие собственным числам μ_a (индекс a - номер вектора, верхний индекс i - номер компоненты вектора). Тогда решения (17) для векторов коэффициентов a_i, b_i , c_i форм Ψ_i можно записать в виде

$$a_i(t) = \Sigma_{a=1}^{N} m_a^{\,i} A_a e^{\mu_a t},\quad b_i(t) = \Sigma_{a=1}^{N} m_a^{\,i} B_a e^{\mu_a t},\quad c_i(t) = \Sigma_{a=1}^{N} m_a^{\,i} C_a e^{\mu_a t},$$

где A_a, B_a, C_a - постоянные. Постоянные и структура матрицы $\mathbf{M}$ должны подбираться таким образом, чтобы выполнялись условия (17). При этом требуется, чтобы a_i и b_i были вещественными. Эти условия сводятся к решению системы алгебраических уравнений относительно совокупности постоянных A_a, B_a, C_a и элементов собственных векторов $m_a^{\,i}$ матрицы $\mathbf{M}$, которые, как известно, образуют унитарную матрицу. Возможность разрешить эту систему в значительной степени определяется кратностью собственных чисел матрицы $\mathbf{M}$. При большей кратности решить эту систему проще.

Существует другой подход к построению решений условий автономности (16), (17). В рамках этого подхода полагаем коэффициенты a_i, b_i, c_i форм не зависящими от времени, а зависимость от времени вводим в координатные функции форм Ψ_i, причем

$$\dot{\psi}_\alpha = \Sigma_{\beta=1}^{2} \lambda_{\alpha\beta}\psi_\beta,\quad \alpha = 1, 2, \tag{22}$$

где $\Lambda=\{\lambda_{\alpha\beta}\}$ - некоторая постоянная матрица. Тогда условие (17) выполняется автоматически, а условие (16) сводится к решению системы алгебраических матричных уравнений

$$\Lambda^{*}\mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j\Lambda = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\,\mathbf{h}_j,\quad i, j = 1 \ldots, N. \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{h}=\{h_{\alpha\beta}\}$ - матрица коэффициентов квадратичной формы (4): $a_i=h_{11,i}$, $b=h_{22,i}$, $c=h_{12,i}=h^*_{21,i}$.

3. Модели со сложными условиями автономности

Заметим, что в [6] обобщенные модели с двухмодовым возбуждением типа (2) не рассматривались. Однако в этой работе рассматривались двухмодовые модели с иными условиями автономности и трехмодовые модели. Вкратце опишем эти модели.

Рассмотрим вместо квадратичной формы (4) форму аналогичного вида, но с функциями $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, которые определяются не соотношением (5), а соотношением следующего вида:

$$W(z) = \psi_1(z)\,\frac{d\psi_2(z)}{dz} - \psi_2(z)\,\frac{d\psi_1(z)}{dz} = A\psi_1(z) + B\psi_2(z), \tag{24}$$

где A и B - некоторые комплексные постоянные. Тогда, пользуясь тождеством

$$\Delta\Psi = (ab - |c|^2)|W|^2/\Psi^2 = (ab - |c|^2)|A\psi_1 + B\psi_2|^2/\Psi^2, \tag{25}$$

выполняющимся для любой формы вида (4), при условии (24) приходим к новому тождеству

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta \ln u = [\,-\frac{\partial \Psi}{\partial t} + D(ab - |c|^2)|A\psi_1 + B\psi_2|^2]/\,\Psi^2, \tag{26}$$

где $u=\Psi^{-1}$. Предполагая, что от t зависят только коэффициенты a, b, c формы Ψ, приходим к условиям автономности правой части тождества (26) в форме следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &-\dot a + D(ab - |c|^2)|A|^2 = \lambda a, \quad -\dot b + D(ab - |c|^2)|B|^2 = \lambda b,\\ &-\dot c + D(ab - |c|^2)\,AB^* = \lambda c, \quad -\dot c^* + D(ab - |c|^2)\,A^*B = \lambda c^*, \end{aligned} \tag{27}$$

где λ - некоторая вещественная постоянная. Эти уравнения определяют общую динамику модели. Уравнение (24) имеет решение

$$\psi_2(z) = \psi_1(z)(C\exp\{B\theta(z)\} - A/B) = \psi_1(z)C\eta(z), \tag{28}$$

где $\theta(z)=\int dz/\psi_1(z)$,

$$\eta(z) = \exp\{B\theta(z)\} - A/(CB), \tag{29}$$

C - постоянная интегрирования.Такие многокомпонентные модели были более подробно рассмотрены в [6], а однокомпонентная модель - в [7].

4. Замечания о многомерных моделях

Частично рассмотренный подход к конструированию точно решаемых моделей нелинейных волн в средах с диффузией, основанный на использовании свойств уравнения Лиувилля, может быть перенесен и на многомерный случай. В работе [10] был применен метод n-форм к построению точных решений уравнения Лиувилля в многомерных пространствах. В основе этого метода лежит так называемое внедиагональное представление операторов Лапласа и Д’Аламбера.

Внедиагональное представление соответствует такому выбору системы координат, в которой операторы Лапласа и Д'Аламбера содержат в своей координатной записи только смешанные производные [10]. Например, в размерности d=3 оператор Лапласа при выборе комплексных координат

$$z_1 = z + ix, \quad z_2 = z + iy, \quad z_3 = z - ix \tag{30}$$

будет иметь внедиагональный вид

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_1} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_2}. \tag{31}$$

В размерности d=4 оператор Лапласа будет иметь более симметричную внедиагональную форму

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_1^*} + 4\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_2^*} \tag{32}$$

при выборе координат $z_1=x+iy$, $z_2=z+iu$, $z_1^*=x-iy$, $z_2^*=z-iu$. Сравнение (31) и (32) показывает, что в размерности d=3 координаты, в которых оператор Лапласа внедиагонален, не образуют сопряженные пары, в то время как в случае d=4 - образуют. Заметим, что внедиагональная запись в отличие от стандартной диагональной формы оператора Лапласа неоднозначна, однако указанное свойство сопряженности (d=4) и несопряженности (d=3) систем координат оказывается универсальным по отношению к любым четным и нечетным размерностям. Анализ этого факта приводит к выводу, что строить диффузионные модели в случае нечетномерных пространств по изложенной выше схеме невозможно в силу того, что n-формы, представляющие решение, оказываются комплексными. В четномерных пространствах эти же формы могут быть действительными. Фактически это отражает известный факт, что в трехмерном пространстве диффузионные процессы протекают существенно иначе, чем в двумерном. Например, автоволновые структуры в двумерных системах более многообразны, химические волны, как правило, возникают в тонких слоях растворов и т.д. [3]. Поэтому в качестве примера многомерных моделей диффузии, строящихся на базе уравнения Лиувилля, рассмотрим модели в размерности d=4.

5. Уравнение Лиувилля в пространстве размерности d=4

Вначале рассмотрим решения уравнения Лиувилля (3) с оператором (32). Здесь по аналогии с [5, 6] будут рассмотрены решения, для которых Ψ - квадратичная форма следующего вида:

$$\Psi(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = a|\psi_1(\mathbf{Z})|^2 + b|\psi_2(\mathbf{Z})|^2 + c\psi_1(\mathbf{Z})\psi_2^*(\mathbf{Z}^*) + c^*\psi_2(\mathbf{Z})\psi_1^*(\mathbf{Z}^*), \tag{33}$$

где $\psi_1(\mathbf{Z})=\psi_1(z_1,z_2)$, $\psi_2(\mathbf{Z})=\psi_2(z_1,z_2)$, $\mathbf{Z}=\{z_1,z_2\}$, $\mathbf{Z}^*=\{z_1^*,z_2^*\}$. Заметим, что в трехмерном случае такое представление невозможно.

Для решений в форме (33) основное тождество (см. [6, 10]) в случае оператора (32) будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta \ln\Psi = (ab - |c|^2)\Psi^2(|W_1|^2 + |W_2|^2). \tag{34}$$

Здесь

$$W_i = \psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z_i} - \psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial z_i}, \quad i = 1, 2.$$

Для превращения тождества (34) в уравнение Лиувилля (3) достаточно, чтобы имело место равенство

$$|W_1|^2 + |W_2|^2 = \lambda\Psi = \lambda(a|\psi_1|^2 + b|\psi_2|^2 + c\psi_1\psi_2^* + c^*\psi_2\psi_1^*) \tag{35}$$

для некоторой постоянной λ и $\Omega=\lambda(ab-|c|^2)$.

Для выполнения (35) достаточно совместного выполнения двух уравнений

$$W_i = \psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial z_i} - \psi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial z_i} = (1/w)(p_i\psi_1 + q_i\psi_2), \quad i = 1, 2 \tag{36}$$

и трех алгебраических условий

$$P = \Sigma_{i=1}^{2} |p_i|^2 = \lambda a, \quad Q = \Sigma_{i=1}^{2} |q_i|^2 = \lambda b, \quad R = \Sigma_{i=1}^{2} p_i q_i^* = \lambda c. \tag{37}$$

Уравнения (36) перепишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \ln G = (p_i/\psi_2 + q_i/\psi_1), \quad i = 1, 2,$$

где $G(\mathbf{Z})=\psi_2/\psi_1$. Условия совместности этих двух уравнений в предположении неколлинеарности векторов $\mathbf{p}=\{p_1,p_2\}$ и $\mathbf{q}=\{q_1,q_2\}$ в двумерном комплексном пространстве приводят к требованию

$$G(\mathbf{Z}) = G(\xi, \eta), \quad \xi = p_1 z_1 + p_2 z_2, \quad \eta = q_1 z_1 + q_2 z_2.$$

При этом следствием (36) являются два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \ln G = 1/\psi_2, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \ln G = 1/\psi_1. \tag{38}$$

Отсюда получаем, что функция G должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = G \frac{\partial G}{\partial \xi}. \tag{39}$$

Это уравнение в действительных координатах (в данном случае ξ и η - комплексные) носит название уравнения Хопфа и возникает в ряде задач математической физики, например, в задачах формирования ударных волн в недиспергирующей идеальной среде. Однако в комплексных координатах это уравнение эквивалентно системе двух вещественных уравнений гидродинамического типа и имеет существенно иные свойства, чем действительное уравнение Хопфа.

Общее решение этого уравнения может быть представлено в неявном виде

$$\Theta(G, \eta G+\xi) = \Theta_0 = \text{const}, \tag{40}$$

где $\Theta(u,v)$ - дифференцируемая функция двух комплексных аргументов ($u=G$, $v=\eta G+\xi$), а Θ_0 - комплексная постоянная, которые определяются из начальных условий. Действительно, дифференцируя (40) по η и ξ, получаем два уравнения

$$\Theta_u \frac{\partial G}{\partial \eta} + \Theta_v \left(G + \eta \frac{\partial G}{\partial \eta}\right) = 0,$$

$$\Theta_u \frac{\partial G}{\partial \xi} + \Theta_v \left(1 + \eta \frac{\partial G}{\partial \xi}\right) = 0.$$

Условием совместности этих двух уравнений является (39).

Если решение для G найдено, то функции ψ_1 и ψ_2 вычисляются по формулам

$$\psi_1 = \left[\frac{\partial}{\partial\eta} \ln G\right]^{-1}, \quad \psi_2 = \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \ln G\right]^{-1}. \qquad (41)$$

Сравнивая полученные решения с решениями, найденными в [6, 10], можно обнаружить принципиально иной характер решений (41). Почти все нетривиальные решения уравнения (39) являются во вспомогательных комплексных координатах многозначными. Многозначность может приводить к существенному усложнению топологической структуры решений. Решения такого типа являются новым классом объектов, возникающих в многомерных волновых системах. В двумерных задачах такие структуры в решениях уравнений для аналогичных по форме нелинейности моделей не обнаруживаются (см. [6]). В связи с этим существенным является анализ решений после их редукции к действительным координатам. Особо отметим, что редукция к действительным координатам не приводит к вырождению решений в том смысле, что они будут зависеть только от двух действительных коодинатных переменных (вместо четырех x, y, z, u) или их комбинаций. Кроме этого, сама по себе многозначность функции G еще не означает многозначности действительных решений (33) с функциями (41) для уравнения Лиувилля (3), удовлетворяющих заданным граничным условиям. Последнее было бы неизбежным, если бы функция G описывалась уравнением Хопфа в действительных координатах. Вместе с тем неоднозначность G требует дополнительного анализа устойчивости полученных решений. Можно предположить, что вблизи точек ветвления функции G многолистные решения легко теряют устойчивость и соответствующие автоволновые возмущения, рассматриваемые ниже, разрушаются или резко меняют свою пространственную структуру. Обратим внимание на то, что уравнение (39) принадлежит к уравнениям гидродинамического типа. Специфические решения уравнений Лиувилля, строящиеся с помощью вспомогательной системы уравнений гидродинамического типа, но не сводящейся к (39), были недавно получены в работах [12]. Комплексные уравнения типа (39) встречаются также в нелинейной электродинамике и алгебродинамике [13]. Это указывает на то, что системы гидродинамического типа, аналогичные (39), являются достаточно универсальным явлением в структуре решений различного рода многомерных нелинейных физических задач и играют в них важную роль. В связи с этим найденные многолистные решения также следует рассматривать как достаточно общее явление при переходе к многомерным волновым процессам.

В качестве простого примера из класса полученных решений приведем одно из них, соответствующее следующему выбору функции Θ:

$$gG^2 + h(\eta G + \xi)^2 = \Theta_0,$$

где g, h, Θ_0 - произвольные комплексные постоянные. Приводя последнее соотношение к виду

$$(g + h\eta^2)G^2 + 2h\eta\xi G + h\xi^2 - \Theta_0 = 0,$$

находим двухлистное решение

$$G_\pm(\xi, \eta) = -\frac{h\eta\xi \pm (\Theta_0(g + h\eta^2) - h\xi^2)^{1/2}}{g + h\eta^2}.$$

Это простейшее решение для G после подстановки в (41) и затем в (33) приводит к достаточно громоздким выражениям для Φ, детальное исследование которых представляет собой отдельную проблему, поэтому здесь такой анализ проводиться не будет. Отметим лишь, что листы пересекаются вдоль многообразия, задаваемого двумя действительными уравнениями

$$\mathrm{Re}\{h(\xi^2 - \Theta_0\eta^2) - \Theta_0 g\} = 0, \quad \mathrm{Im}\{h(\xi^2 - \Theta_0\eta^2) - \Theta_0 g\} = 0.$$

Поскольку ξ и η - линейные функции координат x, y, z, u, то последние два уравнения представляют собой уравнения квадратичных поверхностей в трехмерном действительном пространстве. Эти уравнения определяют положение особенностей в структуре решений, которые в случае сингулярного характера этих особенностей в решении должны порождаться дополнительными сингулярными источниками в правой части (3).

6. Диффузионные модели

Применим полученный результат к моделям типа диффузионные цепочки Тоды. Рассмотрим два основных класса моделей (см. [6]), описываемых общей системой уравнений

$$\frac{\partial N_i^{(\alpha)}}{\partial t} = D_i \Delta \Phi_i + F_i^{(\alpha)}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N), \quad i = 1, \ldots, N,$$

где для моделей первого класса (нелинейная диффузия), соответствующих α=1,

$$N_i^{(1)} = \Psi_i^{-1}, \quad \Phi_i = \ln\Psi_i,$$

а для моделей второго класса (линейная диффузия), соответствующих α=2,

$$N_i^{(2)} = \Phi_i = \ln\Psi_i.$$

В обеих моделях решения Ψ_i по аналогии с [5, 6] являются квадратичными формами вида (33) с зависящими от времени коэффициентами $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$

$$\Psi_i(t, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = a_i(t)|\psi_1(\mathbf{Z})|^2 + b_i(t)|\psi_2(\mathbf{Z})|^2 + \\ + c_i(t)\psi_1(\mathbf{Z})\psi_2^*(\mathbf{Z}^*) + c_i^*(t)\psi_2(\mathbf{Z})\psi_1^*(\mathbf{Z}^*), \tag{42}$$

где $\psi_1(\mathbf{Z})=\psi_1(z_1,z_2)$, $\psi_2(\mathbf{Z})=\psi_2(z_1,z_2)$ по-прежнему от времени не зависят.

Для моделей первого класса, используя тождества (34) и условия (36), получаем следующую систему уравнений для коэффициентов квадратичной формы, как функций времени:

$$\dot{a}_i = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij} a_j + (a_i b_i - |c_i|^2)P, \quad \dot{b}_i = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij} b_j + (a_i b_i - |c_i|^2)Q,$$

$$\dot{c}_i = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij} c_j + (a_i b_i - |c_i|^2)R, \quad \dot{c}_i^* = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij} c_j^* + (a_i b_i - |c_i|^2)R^*.$$

Здесь постоянные P, Q, R определены соотношениями (37). В этом случае сами уравнения диффузионных цепочек Тоды можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -D_i \Delta \ln u_i + u_i^2 \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij} u_j^{-1}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{43}$$

где $u_i=\Phi_i^{-1}$; M_{ij} - элементы вещественной квадратичной марицы размерности $N\times N$. В такой форме система (43) представляет собой уравнения моделей типа реакция - диффузия с нелинейными коэффициентами диффузии $K_i=-D_i u_i^{-1}$.

Для моделей второго класса система уравнений относительно коэффициентов квадратичной формы имеет вид

$$\dot{a_i} = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, a_j, \quad \dot{b_i} = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, b_j, \quad \dot{c_i} = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, c_j, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Эти уравнения необходимо дополнить N условиями

$$a_i b_i - |c_i|^2 = l_i = \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{44}$$

и условием, что матрица M_{ij} должна иметь хотя бы одно нулевое собственное значение, то есть должен существовать вектор **w** с компонентами w_i такой, что

$$\Sigma_{j=1}^{N} w_j M_{ji} = 0.$$

Уравнения диффузионных цепочек Тоды для этого типа моделей

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = D_i \Delta \Phi_i + \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, e^{\Phi_j - 2\Phi_i} + \lambda_i e^{-\Phi_0}, \quad i = 0, \ldots, N$$

представляют собой систему уравнений моделей реакция - диффузия с линейным коэффициентом диффузии. Здесь λ_i - некоторые вещественные постоянные, связанные с l_i и M_{ij}.

Динамика моделей второго класса описывается линейными уравнениями с дополнительной нелинейной связью. Решения этой системы были рассмотрены в [5, 6]. Динамика же моделей первого класса существенно иная по сравнению с двумерным случаем, рассмотренным в [6]. Введем следующие вспомогательные функции

$$\delta_i(t) = (1/Q) b_i(t) - (1/P) a_i(t), \quad \theta_i(t) = (1/R) c_i(t) - (1/P) a_i(t), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{45}$$

Эти функции удовлетворяют линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, \delta_j, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, \theta_j, \tag{46}$$

построить решение которых не составляет труда, поэтому из уравнений для a_i можно исключить b_i и c_i. В результате получаем

$$\dot{a}_i = \Sigma_{j=1}^{N} M_{ij}\, a_j - [PQ\delta_i - |R|^2(\theta_i + \theta_i^*)] a_i + + \frac{QP - |R|^2}{P} a_i^2 - |R|^2 P |\theta_i|^2, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{47}$$

В качестве простого примера можно рассмотреть случай однокомпонентной системы типа (43). Уравнение этого типа встречается в ряде задач нелинейной гидродинамики (см., например, [14]). В этом случае уравнение (47) линеаризуется подстановкой

$$a = a_1 = \alpha \frac{d}{dt} \ln v(t), \quad \alpha = P/(QP - |R|^2). \tag{48}$$

Имеем

$$\ddot{v} - [m + PQ\delta(t) - |R|^2(\theta(t) + \theta^*(t))]\dot{v} - |R|^2\,(QP - |R|^2)\,|\theta(t)|^2 v = 0.$$

Здесь, в соответствии с (46), $\theta(t)=\theta_1(t)=le^{mt}$, $\delta(t)=\delta_1(t)=ke^{mt}$, где $m=M_{11}$, l - комплексная, а k - действительная постоянная. Если ввести теперь новую переменную $\tau=e^{mt}$, то последнее уравнение сведется к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} - A\frac{dV}{d\tau} - \frac{B}{m}V = 0,$$

где

$$A = \frac{PQk - |R|^2 (l + l^*)}{m}, \quad B = \frac{|R|^2 (QP - |R|^2)\, |l|^2}{m}.$$

Последнее уравнение интегрируется без труда. В совокупности соотношения (45) и (48) дают полное решение задачи о динамике решений уравнения (43) в случае N=1. В случае N>1 (произвольной размерности модели) уравнения (47) не линеаризуются, что указывает на существенное усложнение динамики таких систем уже в случае N=2.

Заключение

Таким образом, в работе построены новые классы многокомпонентных моделей типа автоволновых процессов в двумерном и трехмерном координатном пространстве, допускающие точные нестационарные решения волнового типа. Найденные в явном виде классы таких точных решений уравнений Лиувилля и моделей типа диффузионных цепочек Тоды содержат топологические особенности, или дефекты. Эти особенности, по-видимому, являются важным отличительным признаком трехмерных и, вообще, многомерных волновых структур и автоволн. Опираясь на полученные здесь и в [10] результаты, можно также утверждать, что предложенный подход без существенных изменений может быть перенесен на задачи с координатной размерностью выше, чем 3+1. Решения с топологическими дефектами будут при этом возникать и в моделях с высшими размерностями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00260).

Бибилиографический список

1. *Васильев В.А. , Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы / Под ред. Д.С.Чернавского. М.:Наука. 1987.

2. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997. С. 318.

3. *Жаботинский А.М.*Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.

4. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

5. *Журавлев В.М.* Об одном классе моделей автоволн в активных средах с диффузией, допускающих точные решения // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65, вып. 3. С.285.

6. *Журавлев В.М.* Диффузионные цепочки Тоды в моделях нелинейных волн в активных средах // ЖЭТФ. 1998. Т. 114, вып. 6.

7. *Журавлев В.М.* Точные решения уравнения нелинейной диффузии $u_t=\Delta \ln u+\lambda u$ в двумерном координатном пространстве // ТМФ. 2000. Т. 124, №. 2. С. 265.

8. *Leznov A., Savel 'ev M.* // Physica 3D, 1981, p. 6272; Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.

9. *Журавлев В.М.* О новом представлении двумерных уравнений динамики несжимаемой жидкости // ПММ. 1994. Т. 58, № 6. С. 61.

10. *Журавлев В.М.* Точные решения уравнения Лиувилля в многомерных пространствах // ТМФ. 1999. Т. 120, №. 1. С. 3.

11. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

12. *Leznov A.N.,* math-ph/9908012, math-ph/9908013; *Fairle D.B., Leznov A.N.,* solv-int/9909011-9909014.

13 *Кассандров В.В.* Алгебраическая структура пространства - времени и алгебродинамика. М.: Изд-во РУДН, 1992.

14. *Аристов С.Н.* Периодические и локализованные точные решения уравнения $h_t=\Delta \ln h$ // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 22; *Пухначев В.В.* ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 23.

Ульяновский государственный университет

Поступила в редакцию 20.12.2000
после доработки 10.07.2001

MODELS OF AUTO-WAVE PROCESSES IN NONLINEAR MEDIA WITH DIFFUSION AND LIOUVILLE EQUATIONS

V.M.Zhuravlev

The models of auto-wave processes in media with diffusion in two-dimensional and four-dimensional spaces with some types of nonlinear sources connected with the Liouville equations are considered. The special role of the Liouville equation in the theory of two-dimensional nonlinear processes with diffusion is shown. The new classes of the exact solutions in the auto-waves problem in two-dimensional and four-dimensional spaces are found.

Журавлев Виктор Михайлович - родился в Алма-Ате (1953). Окончил физический факультет Московского государственного университета (1976). После окончания МГУ работал в Морском гидрофизическом институте АН УССР. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГИ АН УССР (1987) в области физики взаимодействия атмосферы и океана. С 1992 года - преподаватель Ульяновского государственного университета. В настоящее время - декан физико-технического факультета этого университета. Опубликовал более 80 научных статей по направлениям: физика взаимодействия атмосферы и океана, обработка данных, теория нелинейных волновых процессов, теория гравитации и космология.

E-mail: zhuravl@sv.uven.ru