



## О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ФЕНОМЕНОВ КОМПЛЕКСНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ПОСТРОЕННЫХ ИЗ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ДЕМОНИСТРИРУЮЩИХ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

*О.Б. Исаева*

Исследуется возможность наблюдения феноменов комплексной аналитической динамики в физических системах и их реалистичных моделях. Для этого предлагается подход, основанный на использовании связанных систем, причем парциальные системы должны демонстрировать переход к хаосу через последовательность удвоений периода. Продемонстрировано присутствие объектов, аналогичных множествам Мандельброта и Жюлиа, соответственно, в пространстве параметров и фазовом пространстве дискретных отображений и потоковых систем. В качестве парциальных систем рассматриваются: отображение Эно, неавтономный квадратичный осциллятор и автономный осциллятор Ресслера. Обсуждается связь феноменов комплексной аналитической динамики с проблемой синхронизации

### Введение

Как известно [1, 2], комплексная аналитическая динамика, изучающая поведение комплексных отображений, включает целый ряд интересных феноменов, таких, например, как присутствие в пространстве параметров и фазовом пространстве фрактальных множеств Мандельброта и Жюлиа.

Рассмотрим квадратичное отображение

$$z' \rightarrow \lambda - z^2, \quad (1)$$

где  $\lambda$  - комплексный параметр,  $z$  - комплексная переменная. Множеством Мандельброта (рис. 1, а) называется множество точек на плоскости комплексного параметра  $\lambda$ , для которых траектория экстремума отображения  $z=0$  в процессе итерирования не убегает на бесконечность. Множество Мандельброта содержит так называемый «кактус Мандельброта» (обозначен на рисунке серым цветом) - это множество точек на плоскости параметра  $\lambda$ , для которых траектория экстремума отображения сходится к периодическому аттрактору.

«Кактус Мандельброта» состоит из большой кардиоиды, соответствующей существованию устойчивой неподвижной точки, а также бесконечного количества «лепестков», соответствующих существованию устойчивых циклов всевозможных

периодов. Например, вдоль действительной оси располагаются лепестки удваивающегося периода. Возможны и другие последовательности бифуркаций. В частности, в работах Гольберга, Синая и Ханина [3], Цвиғановича и Мирхейма [4, 5] подробно изучена точка накопления бифуркаций утроения периода.

Бифуркация, отвечающая возникновению «лепестка», соответствует потере устойчивости «родительского» цикла с единичным по модулю комплексным мультипликатором при рациональном (в единицах  $2\pi$ ) аргументе. Если аргумент мультипликатора в момент потери устойчивости иррационален, то в фазовом пространстве наблюдаются области с фрактальными границами, заполненные замкнутыми инвариантными кривыми - так называемые диски Зигеля [6-8].

Обозначенный на рис. 1, *a* черным цветом фрактальный узор, окружающий «кактус Мандельброта», отвечает существованию ограниченной в фазовом пространстве хаотической динамики.

На рис. 1, *б-и* показаны множества Жюлиа, построенные при различных значениях комплексного параметра  $\lambda$ . Множество Жюлиа представляет собой границу между бассейнами притяжения аттрактора на бесконечности (белый цвет) и периодического движения (серый цвет) на плоскости комплексной переменной  $z$ . Различают несколько типов множеств Жюлиа:

- для значений  $\lambda$ , принадлежащих «кактусу Мандельброта», множество Жюлиа является связным наполненным, то есть имеющим внутреннюю область множеством (рис. 1, *б, в, е-и*);
- для значений  $\lambda$ , при которых реализуется хаотическая динамика, множество Жюлиа является связным ненаполненным множеством (рис. 1, *з*);
- для значений  $\lambda$ , не принадлежащих множеству Мандельброта, множество Жюлиа является несвязным множеством (рис. 1, *д*).

Одномерное аналитическое комплексное отображение может быть представлено эквивалентным образом как двумерное действительное отображение

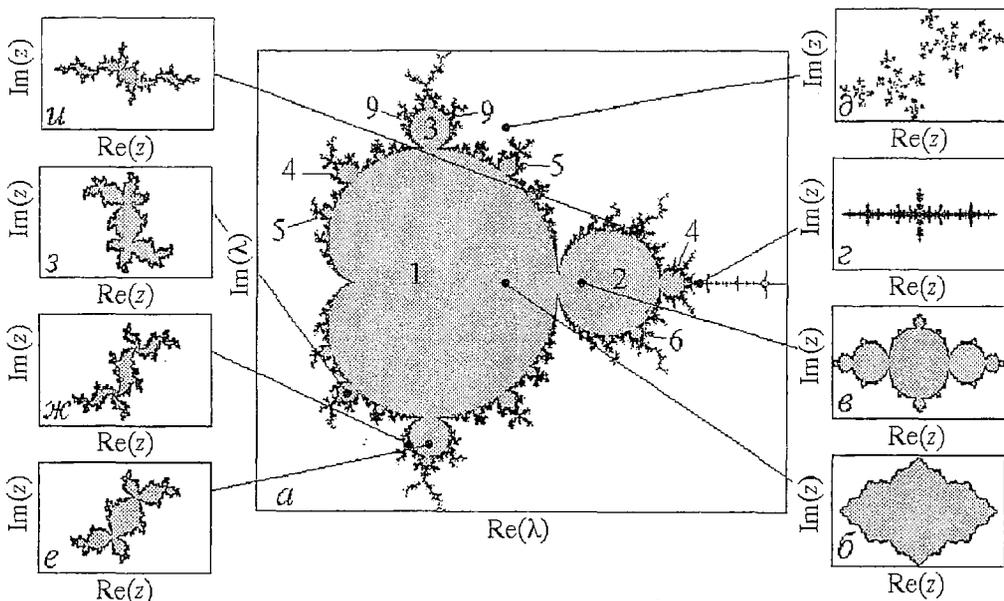


Рис. 1. Множество Мандельброта (*a*) и множества Жюлиа для квадратичного комплексного отображения при различных значениях параметра  $\lambda$ : 0.5 (*б*), 0.8 (*в*), 1.42 (*з*),  $0.5+0.7i$  (*д*),  $0.123-0.745i$  (*е*),  $0.0315-0.7908i$  (*ж*),  $-0.282+0.530i$  (*з*),  $1.16+0.25i$  (*и*). Серым цветом на рисунках обозначены области, которым соответствует существование периодической динамики (периоды указаны цифрами); черным цветом обозначены точки, в которых реализуется ограниченная в фазовом пространстве хаотическая динамика; белый цвет означает убегание траекторий на бесконечность

(для этого следует просто отделить действительную и мнимую части в уравнении). Однако феномены комплексной аналитической динамики характерны только для очень специального класса действительных двумерных отображений, а именно, для отображений аналитических, то есть удовлетворяющих условиям Коши - Римана. Нарушение условия аналитичности приводит к значительным изменениям динамики отображения [9-11]. В связи с этим возникает вопрос: можно ли указать реальные физические системы, демонстрирующие феномены комплексной аналитической динамики? В последнее время этот вопрос привлекает заметное внимание. Известны физические приложения комплексной динамики для таких задач, как ренормгрупповой подход в теории фазовых переходов и теории перколяции [12, 13]. В работе Бека [14] обосновывается возможность возникновения множества Мандельброта при анализе движения заряженной частицы в двугорбой потенциальной яме и в зависящем от времени магнитном поле.

В настоящей работе предлагается более простой и универсальный метод получения множества Мандельброта и других феноменов комплексной аналитической динамики в реалистичных физических системах, а также в эксперименте [15]. Он основан на использовании связанных систем, способных демонстрировать переход к хаосу через удвоения периода. Как известно, такое поведение характерно для очень широкого класса нелинейных диссипативных систем различной физической природы.

Надо заметить, что исследование явления потери синхронизации в связанных системах, демонстрирующих переход к хаосу через удвоения периода, является одной из важных задач нелинейной динамики и имеет большое фундаментальное и прикладное значение в различных областях науки и техники. Полученные в данной статье результаты показывают, что область частичной синхронизации определенным образом связанных систем на плоскости параметров представляет собой множество Мандельброта, а в фазовом пространстве подобной системы присутствуют объекты, соответствующие множествам Жюлиа.

## 1. Система связанных логистических отображений

Начнем с довольно очевидного замечания, что система двух связанных квадратичных отображений при определенном способе введения связи эквивалентна одномерному комплексному квадратичному отображению.

Отделим в комплексном уравнении (1) действительную и мнимую части

$$z'_{re} \rightarrow \lambda_{re} - z_{re}^2 + z_{im}^2, \quad z'_{im} \rightarrow \lambda_{im} - 2z_{re} z_{im}. \quad (2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{re} + \beta z_{im}, & x_2 &= z_{re} - \beta z_{im}, \\ \lambda_1 &= \lambda_{re} + \beta \lambda_{im}, & \lambda_2 &= \lambda_{re} - \beta \lambda_{im}. \end{aligned} \quad (3)$$

Получаем систему двух связанных логистических отображений

$$\begin{cases} x'_1 \rightarrow \lambda_1 - x_1^2 + \varepsilon(x_2 - x_1)^2, \\ x'_2 \rightarrow \lambda_2 - x_2^2 + \varepsilon(x_1 - x_2)^2, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\varepsilon = (1 + \beta^2) / (4\beta^2)$  - параметр связи. Следует отметить специальный характер связи в этих уравнениях. Она может интерпретироваться как одинаковый одновременный сдвиг управляющих параметров в обеих парциальных системах на каждом шаге дискретного времени, пропорциональный квадрату разности динамических переменных. Очевидно, что значение коэффициента  $\varepsilon$  для любых  $\beta$  больше  $1/4$ . Тем не менее, формально мы вправе исследовать систему (4) при произвольных  $\varepsilon$ .

На рис. 2 представлены диаграммы на плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  для связанных логистических отображений при различных значениях параметра  $\epsilon$ . При  $\epsilon=0.5$  можно видеть обычное множество Мандельброта, повернутое на угол  $45^\circ$ . Для  $0.25 < \epsilon < +\infty$  на плоскости параметров существует деформированное множество Мандельброта, лепестки «кактуса» которого отвечают периодическим режимам различного периода. При  $\epsilon=0.25$  множество, отвечающее тому, что стартующая из начала координат точка не убегает на бесконечность, на плоскости параметров имеет вид системы полос (где реализуются циклы удваивающегося периода). При  $\epsilon < 0.25$  она трансформируется в ромбовидную структуру, в частности, при  $\epsilon=0$  это квадрат.

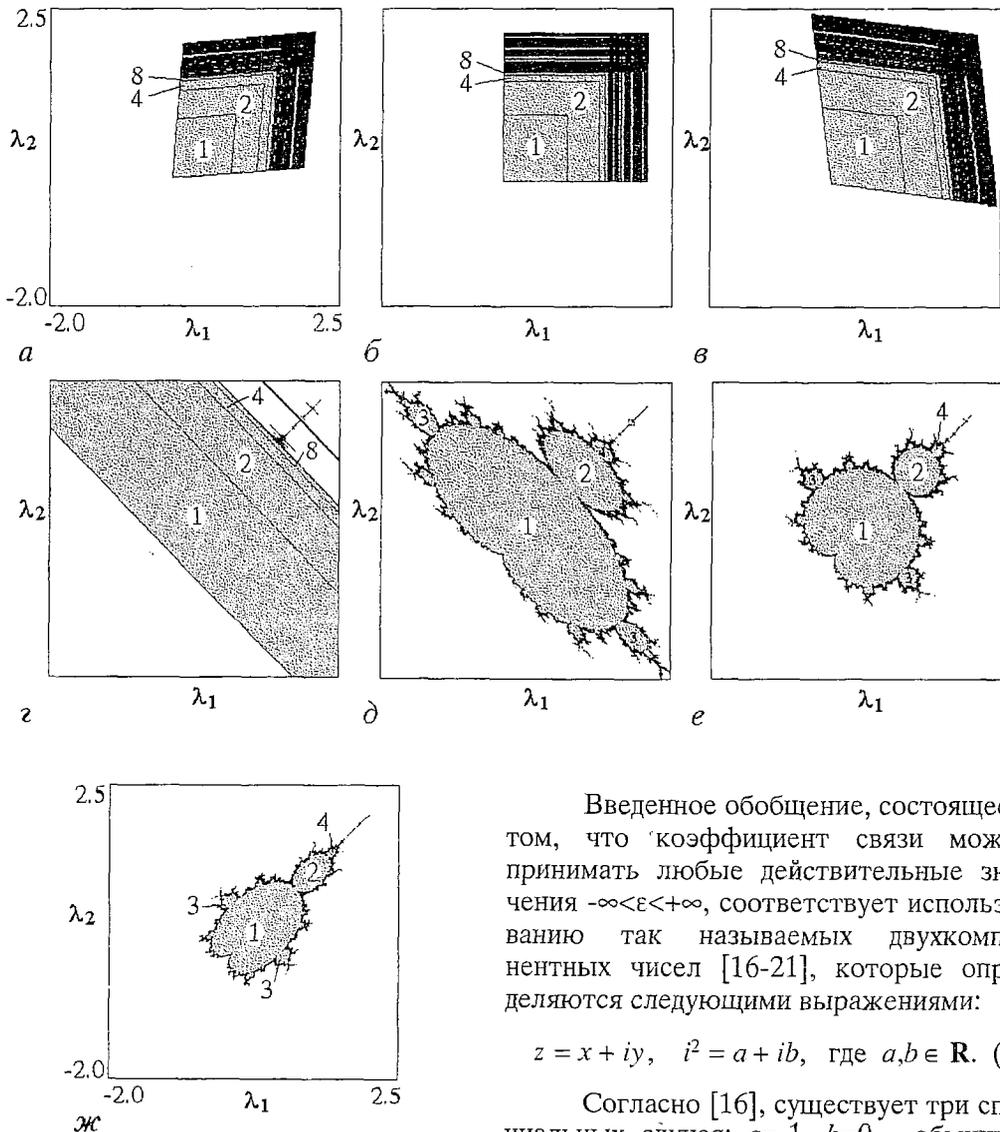


Рис. 2. Плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  для связанных логистических отображений (4) при различных значениях параметра связи  $\epsilon$ : -0.1 (а), 0.0 (б), 0.1 (в), 0.25 (г), 0.3 (д), 0.5 (е), 1.0 (ж). Рисунки (а-в) соответствуют гиперболическим числам, (г) - параболическим, а (д-ж) - эллиптическим числам

Введенное обобщение, состоящее в том, что коэффициент связи может принимать любые действительные значения  $-\infty < \epsilon < +\infty$ , соответствует использованию так называемых двухкомпонентных чисел [16-21], которые определяются следующими выражениями:

$$z = x + iy, \quad i^2 = a + ib, \quad \text{где } a, b \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

Согласно [16], существует три специальных случая:  $a=-1, b=0$  - обычные комплексные числа;  $a=+1, b=0$  - двойные числа;  $a=b=0$  - двойственные числа. Все другие системы чисел изоморфны комплексным, двойным или двойственным числам в зависимости от того, является ли величина  $(a+b^2)/(4b^2)$  положительной,

отрицательной или равной нулю, и называются, соответственно, эллиптическими, гиперболическими или параболическими. Для значений параметра  $\epsilon$  эти условия выглядят следующим образом:

- $\epsilon > 0.25$  соответствует эллиптическим числам, которые изоморфны комплексным, реализующимся при  $\epsilon = 0.5$ ;
- $\epsilon < 0.25$  соответствует гиперболическим числам, которые изоморфны двойным, реализующимся при  $\epsilon = 0$ ;
- $\epsilon = 0.25$  соответствует параболическим или двойственным числам.

Таким образом, существование на плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  трех топологически разных структур, а именно, фрактальной структуры, подобной множеству Мандельброта, ромбовидной структуры и системы полос, объясняется существованием трех алгебраических систем чисел - эллиптической, гиперболической и параболической, соответственно.

Заметим, что совокупность областей периодической динамики, соответствующих лепесткам «кактуса Мандельброта», может рассматриваться как область обобщенной частичной синхронизации. Под обобщенной частичной синхронизацией мы здесь понимаем динамическое состояние системы, при котором величина  $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$  ограничена и изменяется периодически. Это означает, что траектории одной из связанных подсистем не убегают далеко от траекторий другой подсистемы. На рис. 3 приведены фазовые плоскости для

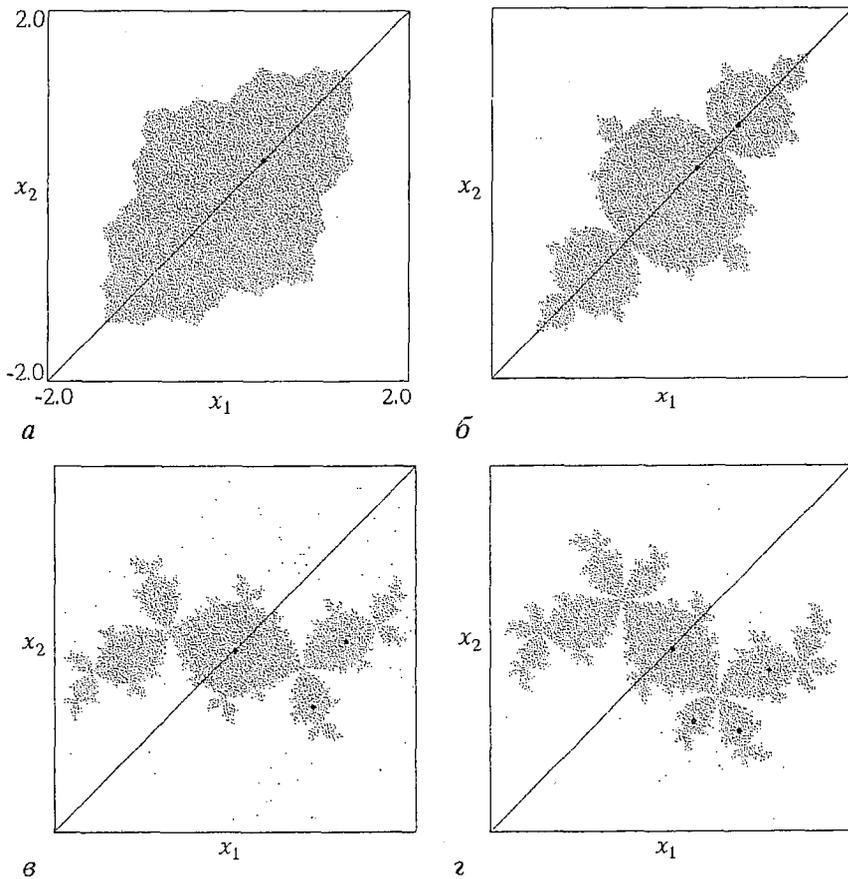


Рис. 3. Фазовые плоскости  $(x_1, x_2)$  для связанных логистических отображений при значении параметра связи  $\epsilon = 0.5$  для следующих значений параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$  (а);  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$  (б);  $\lambda_1 = 0.868, \lambda_2 = 0.622$  (в);  $\lambda_1 = 0.248, \lambda_2 = 0.812$  (г). Точками обозначены аттракторы, а серым цветом - их бассейны притяжения. Приведены рисунки для неподвижной точки (а) и циклов периода 2 (б), 3 (в), 4 (г)

связанных логистических отображений при различных значениях  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . На них точками указаны реализующиеся периодические аттракторы, а серым цветом обозначены бассейны притяжения этих аттракторов. Нетрудно видеть, что в случае  $\lambda_1 = \lambda_2$  в системе имеет место полная синхронизация (аттрактор располагается на диагонали). В случае, когда параметры подсистем  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не равны, но принадлежат «кактусу Мандельброта», имеет место обобщенная синхронизация (периодический аттрактор располагается в окрестности диагонали).

## 2. Связанные отображения Эно

Более реалистичной моделью, чем логистическое отображение, является отображение Эно [22, 23]

$$\begin{cases} x' \rightarrow \lambda - x^2 - d \cdot y, \\ y' \rightarrow x, \end{cases} \quad (6)$$

которое является двумерным обратимым отображением и, следовательно, может служить сечением Пуанкаре для некоторой потоковой системы с размерностью фазового пространства 3 - минимальной размерностью, обеспечивающей возможность сложной динамики и хаоса.

Покажем, что комплексную аналитическую динамику можно реализовать в системе двух связанных отображений Эно. Для этого проведем следующие рассуждения, отправной точкой которых является комплексификация индивидуального отображения (6).

Будем считать динамические переменные  $x$  и  $y$  и управляющий параметр  $\lambda$ , отвечающий за переход к хаосу через удвоения периода, комплексными, то есть  $x = x_{re} + i x_{im}$ ,  $y = y_{re} + i y_{im}$ ,  $\lambda = \lambda_{re} + i \lambda_{im}$ . Параметр  $d$  оставим действительным. Отделяя действительные и мнимые части, получим

$$\begin{cases} x'_{re} \rightarrow \lambda_{re} - x_{re}^2 + x_{im}^2 - d \cdot y_{re}, \\ x'_{im} \rightarrow \lambda_{im} - 2x_{re} x_{im} - d \cdot y_{im}, \\ y'_{re} \rightarrow x_{re}, \\ y'_{im} \rightarrow x_{im}. \end{cases} \quad (7)$$

Введем новые переменные и параметры

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= x_{re} \pm \beta x_{im}, & y_{1,2} &= y_{re} \pm \beta y_{im}, \\ \lambda_{1,2} &= \lambda_{re} \pm \beta \lambda_{im}, \\ \varepsilon &= (1 + \beta^2)/(4\beta^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда комплексифицированное отображение Эно, записанное в форме связанных отображений, будет выглядеть как

$$\begin{cases} x'_1 \rightarrow \lambda_1 - x_1^2 - d \cdot y_1 + \varepsilon (x_1 - x_2)^2, \\ y'_1 \rightarrow x_1, \\ x'_2 \rightarrow \lambda_2 - x_2^2 - d \cdot y_2 + \varepsilon (x_2 - x_1)^2, \\ y'_2 \rightarrow x_2. \end{cases} \quad (9)$$

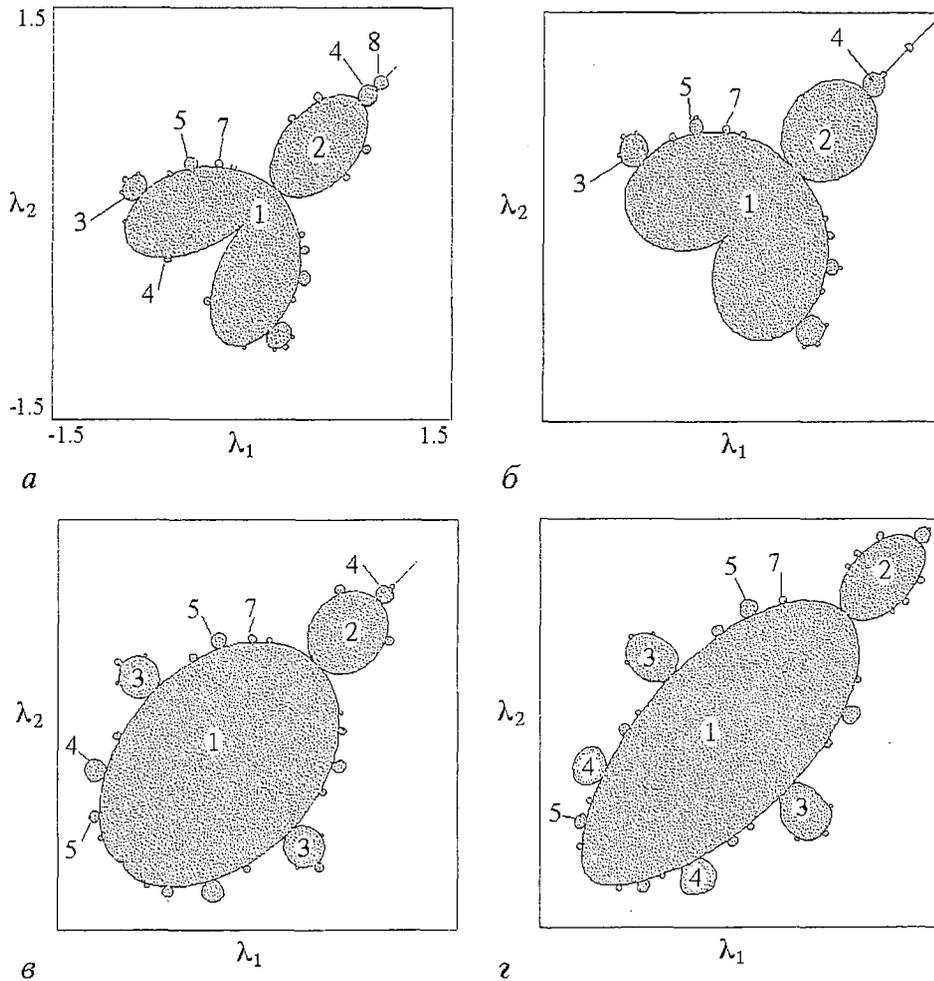


Рис. 4. Множества Мандельброта для связанных отображений Эно (9) при следующих значениях параметра  $d$ : -0.5 (а); -0.3 (б); 0.3 (в); 0.5 (г). Параметр связи  $\epsilon=0.5$

На рис. 4 показан вид плоскости параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  для различных значений параметра  $d$ . Как можно видеть, на них присутствуют образования, аналогичные по виду множеству Мандельброта, деформирующиеся с увеличением  $|d|$ .

На рис. 5 представлены множества Жюлиа для системы (9). Они также имеют очевидное сходство с обычными множествами Жюлиа. Показаны бассейны притяжения неподвижной точки (а), циклов периода 2 (б) и 3 (в) и хаотического аттрактора (г). Здесь и далее представлены рисунки для значения параметра связи  $\epsilon=0.5$ .

### 3. Система связанных нелинейных осцилляторов

Одной из наиболее универсальных моделей, пригодных для описания многих реальных физических систем, служит нелинейный осциллятор. Рассмотрим квадратичный осциллятор с затуханием и гармоническим внешним воздействием

$$\dot{x} + x + \gamma x^3 + x^2 = F \cos \omega t, \quad (10)$$

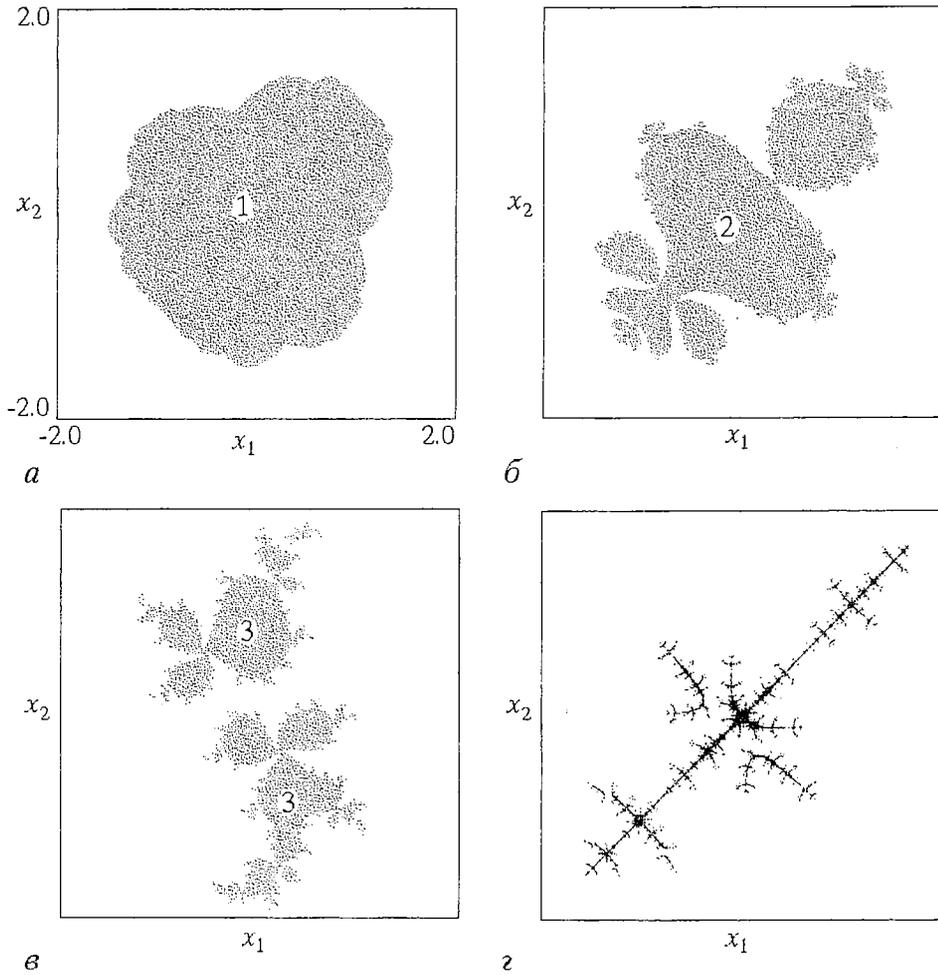


Рис. 5. Множества Жюлиа для связанных отображений Эно при  $d=-0.3$  для следующих значений параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :  $\lambda_1=\lambda_2=0.1$  (а);  $\lambda_1=\lambda_2=0.5$  (б);  $\lambda_1=-0.8, \lambda_2=0.5$  (в);  $\lambda_1=\lambda_2=1.05$  (г)

где  $x$  - динамическая переменная,  $\gamma$  - параметр затухания,  $F$  и  $\omega$  - амплитуда и частота внешнего воздействия. Известно, что в подобной системе существует возможность перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, например, путем изменения параметра  $F$  при фиксированных  $\omega$  и  $\gamma$  [24, 25].

Сконструируем систему двух связанных осцилляторов, демонстрирующую феномены комплексной аналитической динамики, используя ту же схему, по которой мы действовали в предыдущем разделе. Сначала комплексифицируем уравнение для квадратичного осциллятора, чтобы управляющий параметр  $F$  и переменная  $x$  были комплексными, а затем сделаем замены

$$x_{1,2} = x_{re} \pm \beta x_{im}, \quad F_{1,2} = F_{re} \pm \beta F_{im}, \quad (11)$$

$$\varepsilon = (1+\beta^2)/(4\beta^2).$$

В результате получим систему связанных осцилляторов

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + \gamma \dot{x}_1 + x_1^2 - \varepsilon(x_1 - x_2)^2 = F_1 \cos \omega t, \\ \ddot{x}_2 + x_2 + \gamma \dot{x}_2 + x_2^2 - \varepsilon(x_2 - x_1)^2 = F_2 \cos \omega t. \end{cases} \quad (12)$$

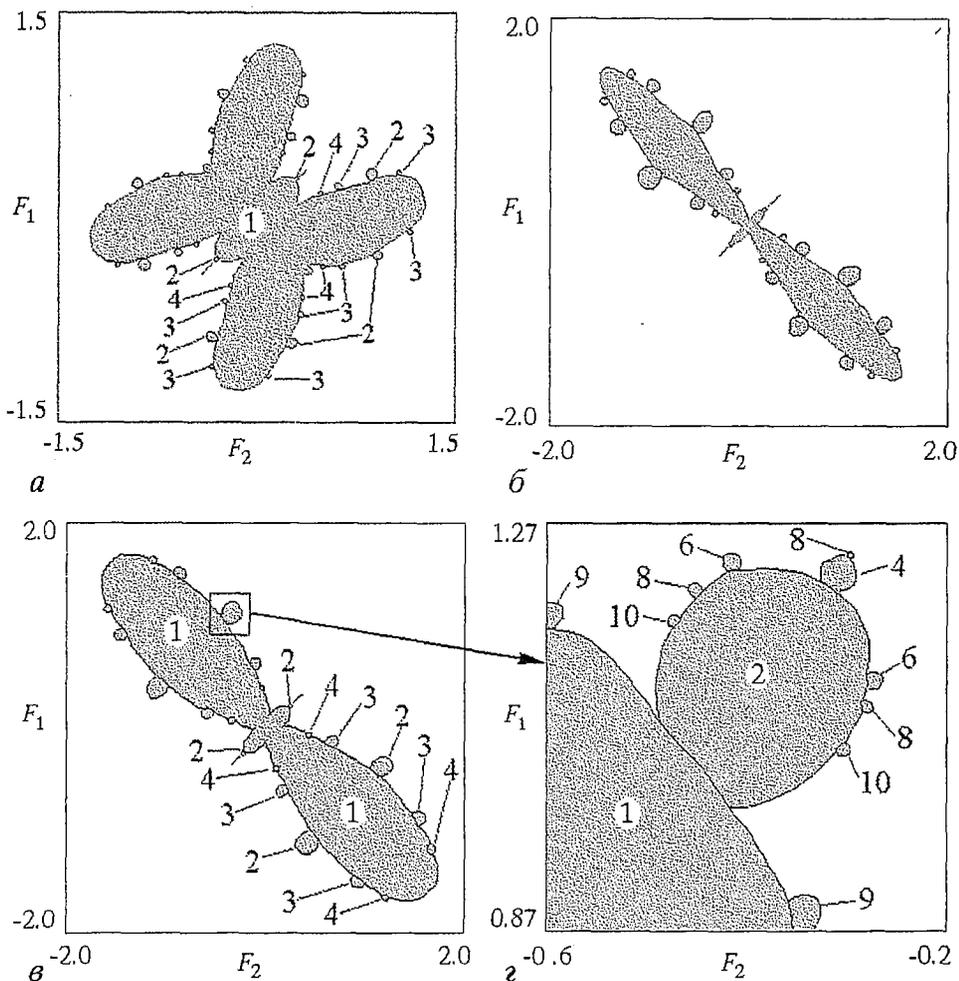


Рис. 6. Карты динамических режимов на плоскости параметров  $(F_1, F_2)$  для системы связанных осцилляторов (12) для значений параметров  $\gamma=0.2, \omega=1/2, \epsilon=0.5$  (а);  $\gamma=0.1, \omega=1, \epsilon=0.5$  (б); и  $\gamma=0.2, \omega=1, \epsilon=0.5$  (в, г). На рис. (г) представлен увеличенный фрагмент, демонстрирующий фрактальную структуру полученного множества

На рис. 6 представлены диаграммы на плоскости параметров  $(F_1, F_2)$ . Хотя возникающие образования отличаются по виду от множества Мандельброта для квадратичного комплексного отображения или для связанных логистических отображений, но они сохраняют такие его основные свойства, как наличие лепестков всевозможных периодов и их самоподобный характер. Также очевидна аналогия между бассейнами притяжения периодических аттракторов для связанных осцилляторов, представленных на рис. 7, и множествами Жюлиа. Следует заметить, что на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  для неавтономных связанных осцилляторов могут присутствовать несколько бассейнов притяжения различных периодических и хаотических аттракторов. При этом с множеством Жюлиа ассоциируется лишь один из них, расположенный в центральной части рисунков. На рис. 7 продемонстрированы бассейны притяжения неподвижной точки (а) и цикла периода 2 (б), соответствующие наполненным множествам Жюлиа, а также бассейны притяжения хаотических траекторий, соответствующие связному (в) и несвязному (г) множествам Жюлиа.

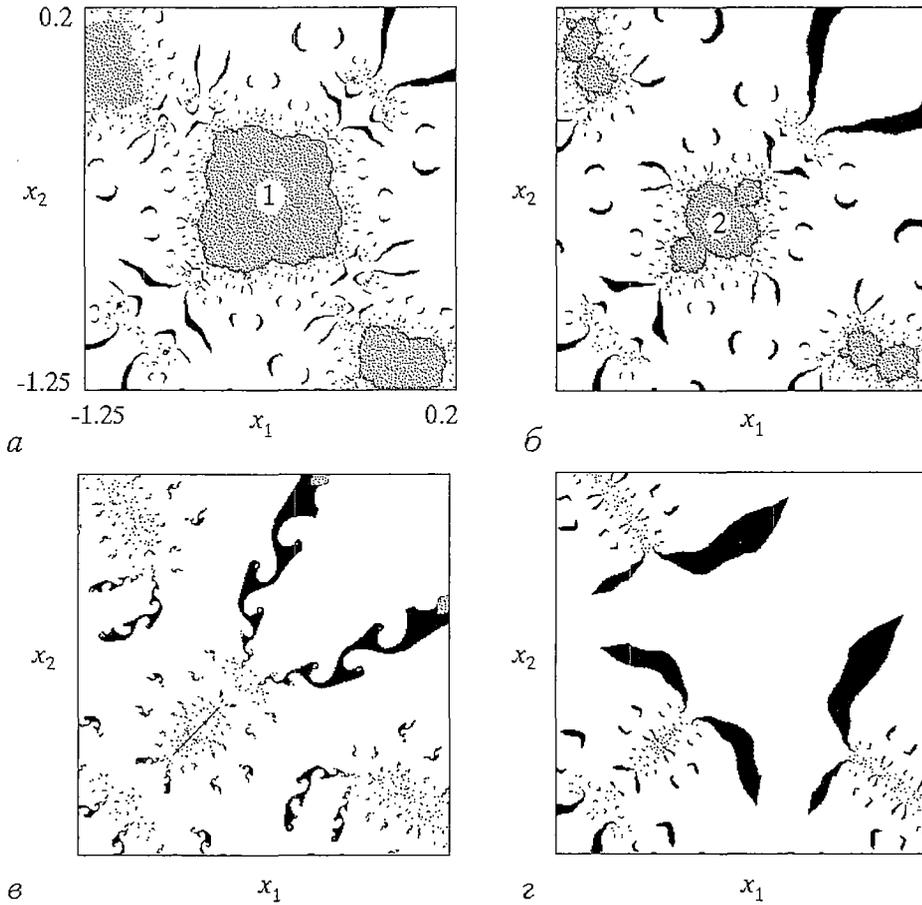


Рис. 7. Бассейны притяжения для связанных квадратичных осцилляторов на плоскости  $(x_1, x_2)$  при следующих значениях  $F_1=F_2$ : 0.205 (а), 0.216 (б), 0.2375 (в), 0.25 (г); при этом  $\gamma=0.2, \omega=1, \varepsilon=0.5$

#### 4. Связанные системы Ресслера

Рассмотрим автономный осциллятор Ресслера

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (13)$$

где  $x, y, z$  - динамические переменные;  $a, b, c$  - параметры. Известно, что в системе возможен переход к хаосу через удвоения периода [26]. Удвоения наблюдаются, например, при изменении параметра  $c$  и фиксированных  $a$  и  $b$ . Построим связанные системы Ресслера. Для получения функции связи воспользуемся процедурой, описанной в разделе 1. Комплексификация системы Ресслера и введение замены переменных и параметров (3) приводит к связанным системам следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1), \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1, \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c_1) - \varepsilon(z_1 - z_2)[(x_1 - x_2) - (c_1 - c_2)], \\ \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2), \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2, \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c_2) - \varepsilon(z_2 - z_1)[(x_2 - x_1) - (c_2 - c_1)]. \end{array} \right. \quad (14)$$

Исследование плоскости параметров  $(c_1, c_2)$  не дало удовлетворительных результатов - область обобщенной синхронизации оказалась не похожей на множество Мандельброта. Очевидно, причиной этого служит существование расстройки фаз у связанных подсистем. Поэтому для исследования режимов синхронизации связанных систем Ресслера удобно использовать цилиндрическую систему координат [27], в которой совокупность переменных  $(x, y, z)$  заменяется переменными  $(A, \varphi, z)$ , где  $\varphi = \arctan(y/x)$  - фаза,  $A = (x^2 + y^2)^{1/2}$  - амплитуда. Система (13) в таких цилиндрических координатах запишется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = aA \sin^2 \varphi - z \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = 1 + \sin \varphi \cos \varphi + (z/A) \sin \varphi, \\ \dot{z} = b - cz + Az \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (15)$$

Упростим эту систему, пренебрегая вторым и третьим слагаемыми в

уравнении для фазы. В этом случае  $\dot{\varphi} = 1$ , то есть фаза линейным образом зависит от времени. Тогда исходная система преобразуется к виду, подобному нелинейной системе с внешним гармоническим воздействием. Комплексификация и замена переменных приводит к следующей системе связанных осцилляторов:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{A}_1 = aA_1 \sin^2 \varphi - z_1 \cos \varphi, & \dot{A}_2 = aA_2 \sin^2 \varphi - z_2 \cos \varphi, \\ \dot{z}_1 = b + z_1(A_1 \cos \varphi - c_1) - & \dot{z}_2 = b + z_2(A_2 \cos \varphi - c_2) - \\ - \varepsilon(z_1 - z_2)((A_1 - A_2) \cos \varphi - (c_1 - c_2)), & - \varepsilon(z_2 - z_1)((A_2 - A_1) \cos \varphi - (c_2 - c_1)), \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = 1.$$

Будем называть ее усеченной системой связанных осцилляторов Ресслера. Как было показано в предыдущем разделе, для подобной системы могут реализоваться феномены комплексной аналитической динамики. И, действительно, расчеты показали, что на плоскости параметров  $(c_1, c_2)$  (рис. 8) наблюдается структура, подобная множеству Мандельброта, а на плоскостях  $(x_1, x_2)$  (рис. 9) - структуры, подобные множествам Жюлиа. Данный факт подтверждает предположение о необходимости синхронизации фаз связанных подсистем.

Рассмотрим теперь систему связанных осцилляторов Ресслера с общим уравнением для фазы

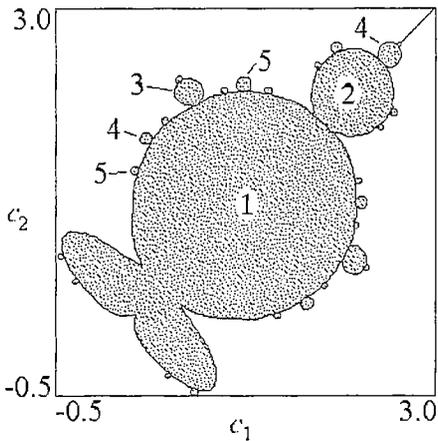


Рис. 8. Плоскость параметров  $(c_1, c_2)$  для связанных усеченных осцилляторов Ресслера (16) при  $\varepsilon = 0.5, a=0.2, b=0.2$

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= aA_1 \sin^2 \varphi - z_1 \cos \varphi, \\ \dot{A}_2 &= aA_2 \sin^2 \varphi - z_2 \cos \varphi, \\ \dot{z}_1 &= b + z_1(A_1 \cos \varphi - c_1) - \\ &\quad - \varepsilon(z_1 - z_2)((A_1 - A_2) \cos \varphi - (c_1 - c_2)), \\ \dot{z}_2 &= b + z_2(A_2 \cos \varphi - c_2) - \\ &\quad - \varepsilon(z_2 - z_1)((A_2 - A_1) \cos \varphi - (c_2 - c_1)), \\ \dot{\varphi} &= 1 + \sin \varphi \cos \varphi + z_1 \sin \varphi / A_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Схожие системы, состоящие из двух связанных подсистем и уравнений, общих для этих подсистем, исследовались в работах Пекоры и Кэрролла [28-30].

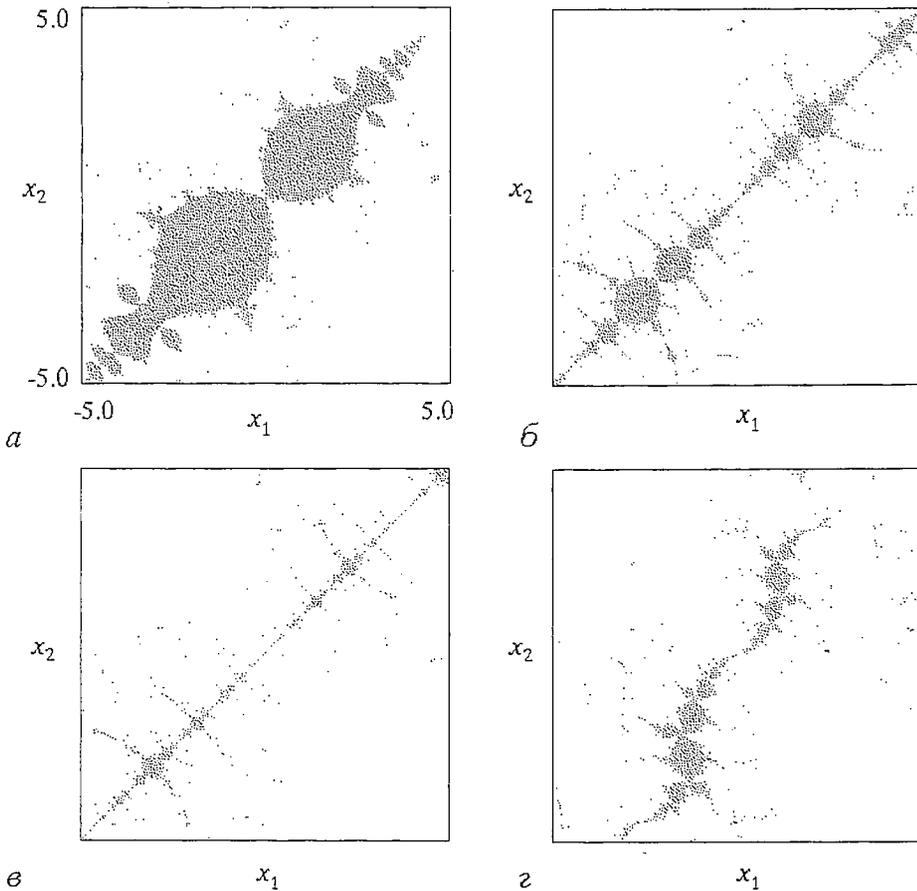


Рис. 9. Бассейны притяжения на фазовой плоскости  $(x_1 = A_1 \cos \varphi, x_2 = A_2 \cos \varphi)$  для связанных усеченных осцилляторов Ресслера (16) при  $\varepsilon=0.5, a=0.2, b=0.2$  для различных значений параметров  $c_1$  и  $c_2$ , отвечающих существованию в сечении Пуанкаре устойчивой неподвижной точки при  $c_1=c_2=1.0$  (а), цикла периода 2 при  $c_1=c_2=2.25$  (б), цикла периода 4 при  $c_1=c_2=2.58$  (в) и цикла периода 3 при  $c_1=0.75, c_2=2.25$  (г)

В данных работах  $N$ -мерная динамическая система  $\dot{u}=f(u)$  разделяется на две подсистемы  $\{u\}=\{v,w\}$ , одна из которых дублируется следующим образом:

$\dot{v}=g(v,w)$ ,  $\dot{w}=h(v,w)$ ,  $\dot{w}'=h(v,w')$ . Тогда  $\{w\}'$  можно рассматривать как систему, управляемую сигналом от  $\{v,w\}$ . Большой интерес представляет изучение синхронизации этой системы с управляющим сигналом [28, 30].

Как показал численный эксперимент, область обобщенной синхронизации для системы (17) обладает некоторыми элементами, характерными для комплексной аналитической динамики. Например, на плоскости параметров наблюдается лепесток периода 3 (рис. 10). На рис. 11 представлены бассейны

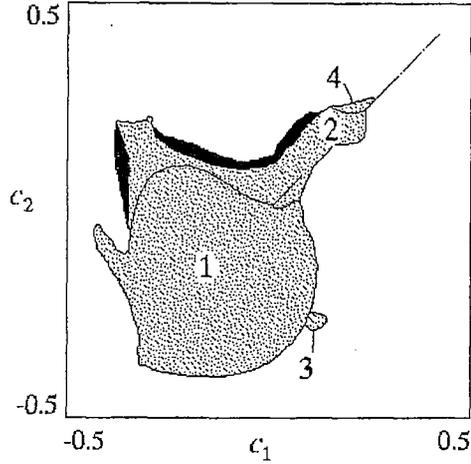


Рис. 10. Плоскость параметров  $(c_1, c_2)$  для связанных осцилляторов Ресслера (17) при  $\epsilon=0.5$ ,  $a=0.2$ ,  $b=0.2$

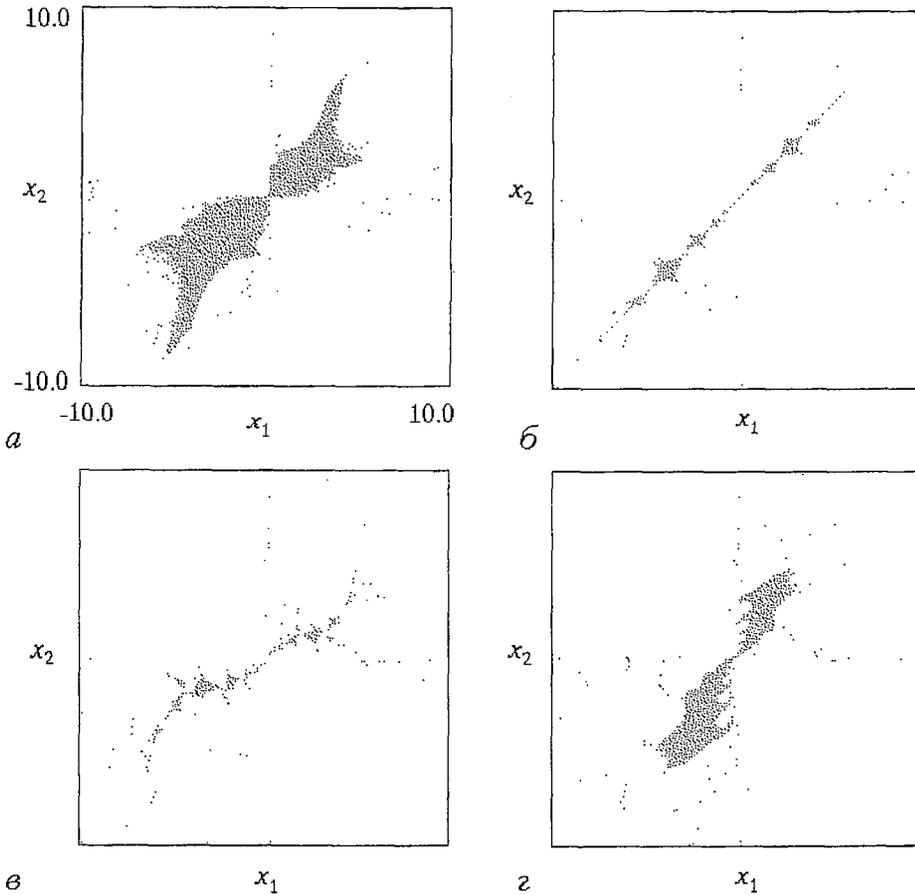


Рис. 11. Бассейны притяжения на фазовой плоскости  $(x_1=A_1 \cos \varphi, x_2=A_2 \cos \varphi)$  для системы (17) при  $\epsilon=0.5$ ,  $a=0.2$ ,  $b=0.2$  и различных значениях параметров  $c_1$  и  $c_2$ , отвечающих существованию в сечении Пуанкаре устойчивой неподвижной точки при  $c_1=c_2=1.5$  (а), цикла периода 2 при  $c_1=c_2=3.42$  (б), цикла периода 3 при  $c_1=2.92$ ,  $c_2=0.83$  (в) и цикла периода 2 в симметричной относительно диагонали точке  $c_1=0.83$ ,  $c_2=2.92$  (г)

притяжения на секущей плоскости ( $x_1=A_1 \cos \varphi$ ,  $x_2=A_2 \cos \varphi$ ) в фазовом пространстве системы. Отсутствие симметрии области обобщенной синхронизации на рис. 10 и бассейнов притяжения на рис. 11, *а, б* объясняется однонаправленностью связи между управляющей и управляемой подсистемами. С точки зрения экспериментальных физических приложений динамика системы (17) требует дополнительного изучения.

Далее введем в рассматриваемую систему две различные фазы по одной для каждой из парциальных систем. При этом добавим дополнительную связь с параметром  $\delta$ , которая обеспечит фазовую синхронизацию подсистем Ресслера и при этом не влияет на амплитуду.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_1 = aA_1 \sin^2 \varphi_1 - z_1 \cos \varphi_1, \\ \dot{z}_1 = b + z_1(A_1 \cos \varphi_1 - c_1) - \varepsilon(z_1 - z_2)[(A_1 - A_2) \cos \varphi_1 - (c_1 - c_2)], \\ \dot{\varphi}_1 = 1 + a \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + (z_1/A_1) \sin \varphi_1 + \delta \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \dot{A}_2 = aA_2 \sin^2 \varphi_2 - z_2 \cos \varphi_2, \\ \dot{z}_2 = b + z_2(A_2 \cos \varphi_2 - c_2) - \varepsilon(z_2 - z_1)[(A_2 - A_1) \cos \varphi_2 - (c_2 - c_1)], \\ \dot{\varphi}_2 = 1 + a \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 + (z_2/A_2) \sin \varphi_2 + \delta \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{array} \right. \quad (18)$$

В обычной прямоугольной системе координат ( $x=A \cos \varphi$ ,  $y=A \sin \varphi$ ,  $z$ ) уравнения (18) будут выглядеть как

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) - \delta y_1(x_1 y_2 - x_2 y_1)/[(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}], \\ \dot{y}_1 = x_1 + a y_1 + \delta x_1(x_1 y_2 - x_2 y_1)/[(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}], \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c_1) - \varepsilon(z_1 - z_2)[(x_1 - x_2) - (c_1 - c_2)], \\ \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) - \delta y_2(x_2 y_1 - x_1 y_2)/[(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}], \\ \dot{y}_2 = x_2 + a y_2 + \delta x_2(x_2 y_1 - x_1 y_2)/[(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}], \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c_2) - \varepsilon(z_2 - z_1)[(x_2 - x_1) - (c_2 - c_1)]. \end{array} \right. \quad (19)$$

Расчеты показывают, что на плоскости  $(c_1, c_2)$  для системы (19) возможна реализация фрактального множества, подобного множеству Мандельброта (рис. 12). Тем не менее, можно заметить значительные искажения, присутствующие в его конфигурации. Объяснением этого может служить нарушение аналитичности при введении дополнительной связи. На рис. 13 представлены бассейны притяжения, аналогичные множествам Жюлиа. На рис. 14 продемонстрированы аттракторы периода 1 (*а*), 2 (*б*), 4 (*в*) и 6 (*г, д*). Заметим, что при равных значениях параметров  $c_1$  и  $c_2$  (см. рис. *а-в*) значения переменных в парциальных системах совпадают, что соответствует полной синхронизации. В случае  $c_1 \neq c_2$  (рис. *г, д*) значения динамических переменных парциальных систем не совпадают, что соответствует существованию обобщенной частичной синхронизации. Таким образом, в случае, когда точка  $(c_1, c_2)$  принадлежит области обобщенной частичной синхронизации, могут реализоваться феномены комплексной аналитической динамики такие, например, как утроения периода.

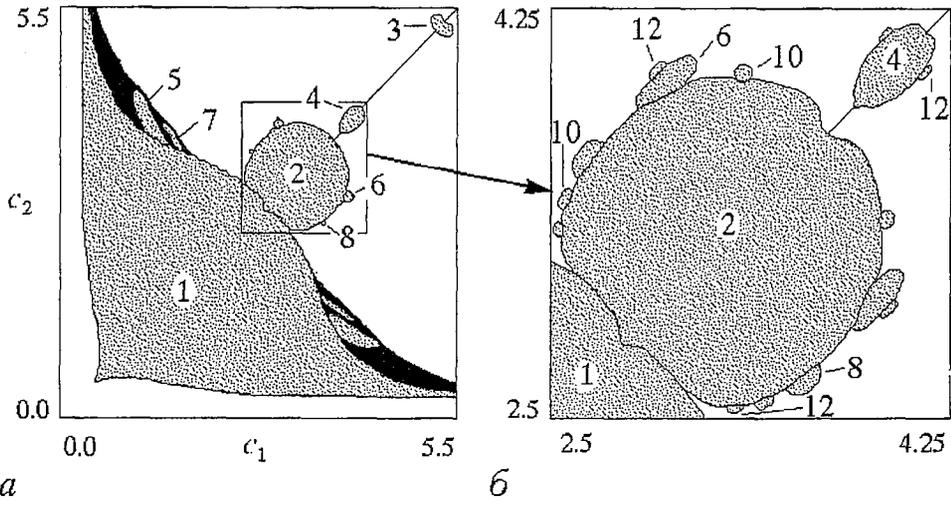


Рис. 12. Плоскость параметров  $(c_1, c_2)$  и увеличенный фрагмент, демонстрирующий самоподобие, для связанных осцилляторов Ресслера (19) при  $\epsilon=0.5, a=0.2, b=0.2, \delta=1.0$

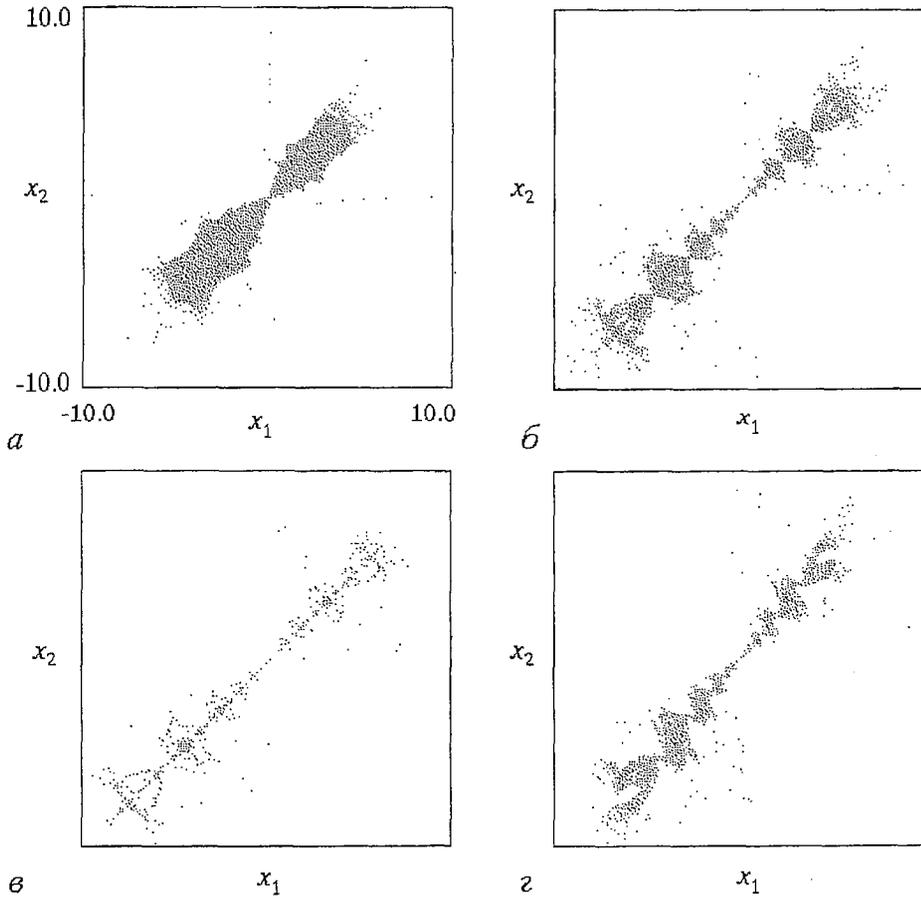


Рис. 13. Бассейны притяжения на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  для связанных осцилляторов Ресслера (19) при  $\epsilon=0.5, a=0.2, b=0.2, \delta=1.0$  для различных значений параметров  $c_1$  и  $c_2$ , отвечающих существованию в сечении Пуанкаре устойчивой неподвижной точки при  $c_1=c_2=2.0$  (а), цикла периода 2 при  $c_1=c_2=3.5$  (б), цикла периода 4 при  $c_1=c_2=4.0$  (в) и цикла периода 6 при  $c_1=2.98, c_2=3.9$  (г)

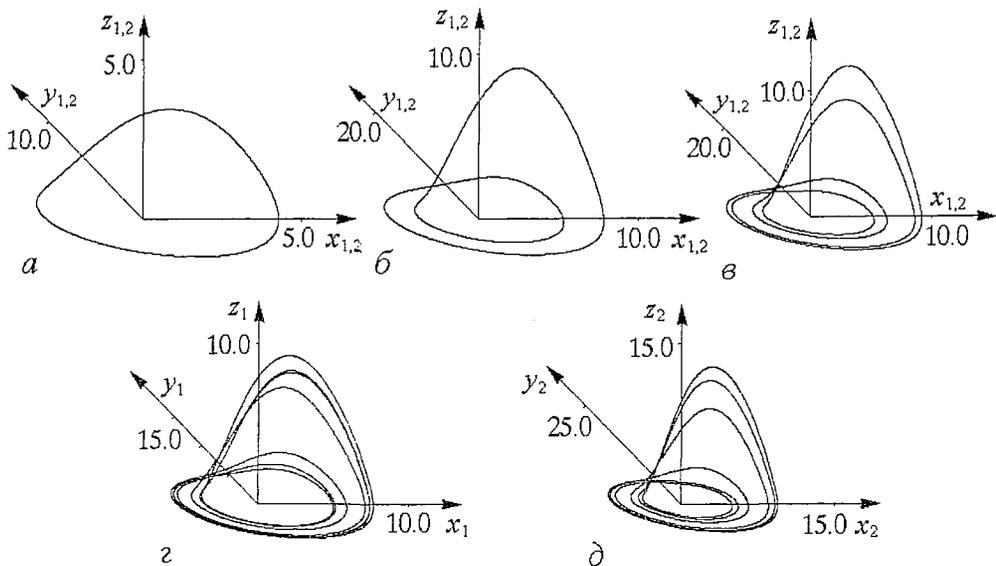


Рис. 14. Фазовые портреты для связанных осцилляторов Ресслера (19) при тех же значениях параметров, что и на рис. 13. Представлены аттракторы периода 1 (а), 2 (б), 4 (в) и 6 (г, д). Заметим, что при равных значениях параметров  $c_1$  и  $c_2$ , значения переменных в парциальных системах совпадают (а-в). В случае  $c_1 \neq c_2$  (г, д), когда могут реализоваться феномены комплексной аналитической динамики такие, например, как утроения периода, значения динамических переменных парциальных систем не совпадают

### Заключение

Основная задача работы заключалась в попытке наблюдения феноменов комплексной аналитической динамики в реалистичных моделях, таких как связанные отображения Эно, связанные неавтономные нелинейные осцилляторы и связанные автономные осцилляторы Ресслера. Таким образом, рассмотрены как дискретные отображения, так и системы с непрерывным временем.

Исследовалась возможность реализации множества Мандельброта в пространстве параметров данного класса систем. Если для отображений это довольно простая задача (достаточно использовать прием комплексификации), то для потоковых систем иногда требуется обеспечить дополнительные условия (такие, например, как фазовая синхронизация для систем Ресслера).

В работе показано, что комплексифицированная система может быть представлена в виде двух связанных действительных систем. Подобное представление полезно по ряду причин. Во-первых, при этом упрощаются уравнения и появляется возможность конструирования реальной экспериментальной модели. Во-вторых, можно ожидать, что введение выбранной определенным образом связи между двумя идентичными элементами любой природы, демонстрирующими удвоения периода, позволит наблюдать феномены комплексной аналитической динамики. Кроме того, следует отметить связь рассмотренного круга вопросов с проблемой синхронизации. Показано, что область обобщенной частичной синхронизации связанных систем может соответствовать множеству Мандельброта. Тем самым, установлена возможность новых нетривиальных особенностей динамического поведения при синхронизации систем со сложной динамикой.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук,

профессору СГУ С.П. Кузнецову и доктору, профессору Потсдамского университета А.С. Пиковскому за полезные обсуждения и консультации при выполнении настоящей работы. Автор благодарен также Американскому фонду гражданских исследований и развития (грант REC-006) и Потсдамскому университету за поддержку визита и стажировку в научной группе статистической физики и теории хаоса (Потсдам, Германия).

*Работа поддержана грантами РФФИ 00-02-17509 и РФФИ 01-02-06385.*

### **Библиографический список**

1. *Peitgen H.O., Richter P.H.* The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems. Springer-Verlag. 1986.
2. *Devaney R.L.* An introduction to chaotic dynamical systems. Addison-Wesley studies in Nonlinearity. 1989.
3. *Гольберг А.И., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальные свойства для последовательностей бифуркаций утроения периода // УМН. 1983. Vol. 38, №1. P. 159.
4. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Universality for period  $n$ -tuplings in complex mappings // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 94. P. 329.
5. *Cvitanovic P., Myrheim J.* Complex universality // Commun. Math. Phys. 1989. Vol. 121. P. 225.
6. *Widom M.* Renormalization group analysis of quasi-periodicity in analytic maps // Comm. Math. Phys. 1993. Vol. 92. P. 121.
7. *Manton N.S., Nauenberg M.* Universal scaling behavior for iterated maps in the complex plane // Comm. Math. Phys. 1983. Vol. 89. P. 557.
8. *MacKay R.S., Percival I.C.* // Physica D. 1987. Vol. 26. P. 193.
9. *Peinke J., Parisi J., Rohricht B., Rossler O.E.* Instability of the Mandelbrot set // Zeitsch. Naturforsch. A. 1987. Vol. 42. P. 263.
10. *Klein M.* Mandelbrot set in a non-analytic map // Zeitsch. Naturforsch. A. 1988. Vol. 43. P. 819.
11. *Peckham B.B.* Real perturbation of complex analytic families: points to regions // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8. P. 73.
12. *Hu B., Lin B.* Yang-Lee zeros, Julia sets, and their singularity spectra // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 4789.
13. *Энтин М.В., Энтин Г.М.* Масштабная инвариантность в теории перколяции и фракталы // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 427.
14. *Beck C.* Physical meaning for Mandelbrot and Julia sets // Physica D. 1999. Vol. 125. P. 171.
15. *Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Ponomarenko V.I.* Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. 055201(R).
16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
17. *Senn P.* The Mandelbrot set for binary numbers // Am. J. Phys. 1990. Vol. 58. P. 1018.
18. *Fjelstad I.P.* Extending relativity via the perplex numbers // Am. J. Phys. 1986. Vol. 54. P. 416.
19. *Ronveaux A.* About «perplex numbers» // Am. J. Phys. 1987. Vol. 55. P. 392.
20. *Majernic V.* The perplex numbers are in fact binary numbers // Am. J. Phys. 1988. Vol. 56. P. 763.
21. *Band W.* Comments on «Extending relativity via the perplex numbers» // Am. J. Phys. 1988. Vol. 56. P. 469.

22. Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Commun. Math. Phys. 1976. Vol.50, P. 69.
23. Hénon M. On the numerical computation of Poincaré maps // Physica D. 1982. Vol. 5. P. 412.
24. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
25. Кузнецов А.П., Потапова А.Ю. Особенности сложной динамики нелинейных осцилляторов с катастрофами Тома. // Изв. вузов. ПНД. 2000. Т. 8, № 6. С. 91.
26. Rossler O. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397.
27. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
28. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
29. Pecora L.M., Carroll T.L. Driving systems with chaotic signals // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. P. 2374.
30. Carroll T.L. Amplitude-independent chaotic synchronisation and communication // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 3117.

Саратовский государственный  
университет  
Саратовское отделение ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 26.07.2001  
после доработки 22.10.2001

**ON POSSIBILITY OF REALIZATION OF THE PHENOMENA  
OF COMPLEX ANALYTICAL DYNAMICS FOR THE PHYSICAL  
SYSTEMS, BUILT UP OF COUPLED ELEMENTS,  
WHICH DEMONSTRATE PERIOD-DOUBLINGS**

*O. B. Isaeva*

The possibility of realization of the phenomena of complex analytical dynamics for the realistic physical systems is investigated. Observation of the Mandelbrot and Julia sets in the parameter and phase spaces both for the discrete mappings and continuous systems is carried out. For these purposes, in present work the method is suggested, based on consideration of coupled systems, where the subsystems demonstrate period-doublings cathcad. So, Henon mapping, quadratic oscillator with harmonic driving force and autonomous Rossler oscillator are considered as subsystems. The relations between phenomena of complex analytical dynamics and problems of synchronization loss are discussed.



*Исаева Ольга Борисовна* - родилась в 1977 году. В 1999 году с отличием окончила Высший Колледж прикладных наук СГУ (в настоящее время факультет нелинейных процессов). Аспирант кафедры динамических систем СГУ, младший научный сотрудник СО ИРЭ РАН и инженер кафедры нелинейной физики ФНП СГУ. Область научных интересов - комплексная аналитическая динамика и ее приложения к реалистичным физическим системам, теория фракталов. Имеет около 15 научных публикаций по этой тематике.