Нелинейная динамика и гуманитарные науки

Изв. вузов «ПНД», т.9, № 6, 2001 УДК 51.001.72:5

ИДЕАЛЬНАЯ ИГРА ЛЮДЕЙ В ОБЩЕСТВЕ

Ю.И. Неймарк

Выясняются условия идеальности игры людей в обществе и реализуемости максимума общего выигрыша при максимизации личных выигрышей.

1. Введение и постановка задачи

В докладе [1] и работе [2], исходя из игровой математической модели общества, были выявлены основные принципы его организации и управления. В частности, были сформулированы требования к всеобщей игре, в том числе и экономической, людей, составляющих общество. В своей полноте они едва ли выполнимы, но это и не требуется, достаточно лишь некоторое приближенное их соблюдение. Вместе с тем, изучение игр, удовлетворяющих этим идеальным требованиям, представляет определенный интерес и позволяет сформулировать принципы, на основе которых в обществе возможны их приближенная организация и самоорганизация.

Напомним, что игра состоит в том, что каждый из игроков I_s, $s=\overline{1,n}$ выбирает значение своей переменной x_s и получает при этом выигрыш $f_s(x_1,...,x_n)$. Естественной стратегией каждого из игроков является максимизация своего выигрыша по доступной ему переменной x_s. Назовем игру идеальной, если эта стратегия максимизации личного выигрыша ведет к максимизации общего выигрыша всех игроков. Это требование, записанное в виде

$$\max_{x_s} f_s(x_1,...,x_n), \quad s=\overline{1,n}, \tag{1}$$

достигается в той же точке $O(x_1^*,...,x_n^*)$, что и

$$\max_{x_1,...,x_n} F(x_1,...,x_n), \quad F=\Sigma_s f_s(x_1,...,x_n). \tag{2}$$

Будем считать, что каждый из игроков умеет увеличивать свою функцию выигрыша по своей переменной x_s, меняя ее в соответствии с уравнениями

$$\dot{x}_s = \varepsilon_s(t)\frac{\partial f_s}{\partial x_s}, \quad \varepsilon_s(t)>0, \quad s=\overline{1,n} \tag{3}$$

или аналогичными с малыми задержками.

2. Условия успешности индивидуальных поисков наибольших выигрышей

Вопрос, который решается ниже, - это когда стратегия (3) приводит к достижению условия (1) и когда точка O единственная.

Возьмем функцию V вида

$$V = \tfrac{1}{2}\,\Sigma_s\, \varepsilon_s(t)\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_s}\right)^2 \tag{4}$$

и найдем ее производную по времени при изменении переменных x_s согласно (3)

$$\dot V = \tfrac{1}{2}\,\Sigma_s\, \dot\varepsilon_s(t)\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_s}\right)^2 + \Sigma_{s,k}\,\xi_s \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s \partial x_k}\,\xi_k, \tag{5}$$

где $\xi_k = \varepsilon_k(t)\partial f_k/\partial x_k$, $k = \overline{1,n}$.

Сходимость поисковой стратегии (3) к выполнению (1) может иметь место, если только при этом функция V стремится к нулю. Последнее выполнимо, когда

$$\int_0^t \delta(t)dt \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{6}$$

где $\delta = \dot V V^{-1}$. Это необходимое и достаточное условие.

Из (4) и (5) видно, что для выполнения (6) естественно принять квадратичную форму

$$\Phi = \Sigma_{s,k}\,\xi_s \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s \partial x_k}\,\xi_k \tag{7}$$

отрицательно определенной, так что

$$\Phi \le -\chi\,(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2), \qquad \chi > 0. \tag{8}$$

Далее из (4), (5) и (8) непосредственно находим, что

$$\delta(t) \le A - B,$$

где

$$A < \Sigma\, |\dot\varepsilon(t)/\varepsilon(t)|, \qquad B \le -2\chi \min_s \varepsilon_s(t),$$

и поэтому при $0 < \underline{\varepsilon} \le \varepsilon_s(t) \le \bar\varepsilon \le \infty$ условие (6) выполняется, поскольку

$$\int_0^t \delta(\tau)d\tau < \Sigma\, |\ln(\varepsilon_s(t)/\varepsilon_j(0))| - 2\chi \int_0^t \min\varepsilon_s(\tau)d\tau \le n \max\{|\ln(\underline{\varepsilon}/\bar\varepsilon)|, |\ln(\bar\varepsilon/\underline{\varepsilon})|\} - 2\chi\underline{\varepsilon}t.$$

Из последней оценки следует, что

$$V(t) < V(0)\exp(a - bt), \qquad a, b > 0. \tag{9}$$

Согласно (9), переход из любой точки области, для точек которой $V(x_1,\ldots,x_n) < c < \infty$, в область $V \le d > 0$ совершается за время, не большее некоторого $T < \infty$. Отсюда следует, что все точки области $V(x_1,\ldots,x_n) < c < \infty$ за конечное время переходят в точки одной и той же области $V(x_1,\ldots,x_n) \le d$, а все точки области d при достаточно малом $d > 0$ - в единственную точку $O(x_1^*,\ldots,x_n^*)$, для которой

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0, \tag{10}$$

и других таких точек в области $V(x_1,\ldots,x_n)<c$ нет. Поскольку c - любое конечное положительное число, то других таких точек нет вообще. Точка $O(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ единственная, и для нее, согласно (7),

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^2} < 0, \quad s = \overline{1,n}, \tag{11}$$

и поэтому в ней имеет место максимум каждой из функций f_s по переменной x_s.

Итак, уравнения (10) имеют единственное решение - точку $O(x_1^*,\ldots,x_n^*)$, которая представляет собой глобально устойчивое состояние равновесия поисковой стратегии, описываемой системой уравнений (3), и является точкой максимума всех выигрышей $f_s(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ по соответствующей переменной x_s.

3. Допустимость небольших временных задержек в стратегии поиска (3)

Пусть стратегия (3) реализуется с некоторыми временными задержками, так что

$$\dot{x}_s = u_s, \qquad T_s\dot{u}_s + u_s = \varepsilon_s \frac{\partial f_s}{\partial x_s}, \tag{12}$$

где ради простоты примем ε_s постоянными большими $\underline{\varepsilon}>0$. Для доказательства сформулированного в заглавии утверждения достаточно взять в качестве используемой ранее функции V другую функцию вида

$$V = ½\left\{\Sigma_s\varepsilon_s\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_s}\right)^2 + A\left(x_s - \varepsilon_s\frac{\partial f_s}{\partial x_s}\right)^2\right\}, \tag{13}$$

где $A>0$ затем подбирается нужным образом.

4. Когда стратегия максимизации индивидуальных выигрышей приводит к глобальному максимуму общего выигрыша?

Ответ на поставленный в заголовке вопрос сводится к тому, чтобы установить, когда точка $O(x_1^*,\ldots,x_n^*)$, единственное глобально устойчивое равновесие системы (3) и одновременно единственная точка максимальности всех выигрышей (f_s по переменной x_s), была бы еще и единственным глобальным максимумом функции общего выигрыша $F=f_1+\ldots+f_n$.

Единственность максимума (и, следовательно, его глобальность) функции F будет иметь место, если квадратичная форма

$$\Phi_1 = \Sigma\, \xi_s \frac{\partial^2 F}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k$$

отрицательно определенная, и имеет место оценка вида (8). Можно заметить, что

$$\Phi_1 = \Sigma_{s,k}\, \xi_s \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k + \Sigma_{s,k,p\neq s}\, \xi_s \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_s \partial x_k} \xi_k. \tag{14}$$

Первая квадратичная форма этой суммы двух слагаемых отрицательно определенная в силу (8), ее главные квадратичные члены

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_s^2}\ \xi_s^2,$$

и естественно предположить, что они и самые существенные - большие по величине, поскольку переменная ξ_s, скорее всего, самая существенная у выигрыша f_s. Аналогичный член второй квадратичной формы (14),

$$\Sigma_{p\neq s}\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_s^2}\ \xi_s^2,$$

выглядит значительно внушительней, но он не более чем суммарный результат жесткостей влияния хода игрока I_s на выигрыши всех остальных игроков, которых не так уж много и которые могут усредняться. Сказанное - не более чем довод для принятия условия отрицательной определенности квадратичной формы Φ_1 и оценки

$$\Phi_1 \leq -\chi_1\ (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2),$$

которая обеспечивает предполагаемую единственность и глобальность максимума общего выигрыша F, а его совпадение с точкой $O(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ будет иметь место при

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \Sigma_{p\neq s}\frac{\partial f_p}{\partial x_s} = 0, \qquad s = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Если трактовать $\partial f_p/\partial x_s$ как жесткость влияния игрока I_s на игрока I_p, то (15) - сумма всех жесткостей давления игрока I_s на остальных игроков I_p ($p\neq s$). По сравнению с чем эта сумма жесткостей должна быть мала, чтобы можно было ожидать близости максимума общего выигрыша к общему выигрышу в точке $O(x_1^*,\ldots,x_n^*)$? Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

5. Основной принцип совместной идеальной игры в обществе

Оптимальный общий выигрыш находится из уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_s} = \frac{\partial f_s}{\partial x_s} + \Sigma_{p\neq s}\frac{\partial f_p}{\partial x_s} = 0, \qquad s = \overline{1,n}, \tag{16}$$

то есть добавочный член в уравнении (16) тем менее существен, чем больше $\partial^2 f_s/\partial x_s^2$ по сравнению с $\Sigma_{p\neq s}\partial f_p/\partial x_s$. Это следует из первого приближения для изменения ds по отношению к x_s^*,

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^2}dx_s + \Sigma_{p\neq s}\frac{\partial f_p}{\partial x_s} = 0, \qquad s = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Итоговый вывод о близости точки глобального максимума общего выигрыша F к точке $O(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ максимума личных выигрышей можно сформулировать как требование малости сумм жесткостей влияния хода каждого игрока на общий выигрыш всех остальных игроков. Это может быть достигнуто за счет малости каждого влияния или за счет малости суммарного влияния, с учетом возможности их компенсации. Сказанное можно сформулировать как некий принцип поведения в общей идеальной экономической игре людей в обществе: с одной стороны, каждый игрок должен стремиться к своему личному выигрышу, неуклонно его оптимизируя, а с другой - по возможности в целом не вредить и не способствовать выигрышам других. Как способствование, так и препятствование выигрышам других, оказывается, уменьшает возможный общий выигрыш. Действительно, первое превышение общего выигрыша над суммой индивидуальных максимизированных выигрышей, согласно (17), равно

$$dF = \Sigma_s \frac{\partial F}{\partial x_s} dx_s = \Sigma_s \frac{\partial F}{\partial x_s} \left[-\Sigma_{p \neq s} \frac{\partial f_p}{\partial x_s} \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^{\,2}} \right)^{-1} \right] =$$

$$= -\Sigma_s \left(\Sigma_{p \neq s} \frac{\partial f_p}{\partial x_s} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_s^{\,2}} \right)^{-1} > 0,$$

всегда положительно и увеличивается с ростом сумм жесткостей влияния. Можно заметить, что это превышение, во всяком случае в первом приближении, тем меньше, чем «острее» максимумы личных выигрышей (больше по величине вторые производные от f_s по x_s).

6. О целесообразной организации и самоорганизации экономических игр в обществе

Под целесообразной организацией понимается близость к идеальной игре. Как можно судить из предыдущего, оптимальное экономическое функционирование при идеальной игре требует от ее участников только умения и успешности в оптимизации своих личных выигрышей. Но оптимальная игра едва ли реальна, да и кто должен ее организовывать и определять. Значительно реальнее некоторое к ней приближение, достигаемое целесообразной стратегией самих экономических игр и экономической политики. Основной принцип этой самоорганизации, приближающей экономическую игру к оптимальной, состоит в том, что каждый игрок должен возможно больше стремиться к своему личному выигрышу и одновременно организовывать ее так, чтобы было возможно меньшим суммарное влияние на других игроков, достигаемое тем, что он сам, выбирая игру, стремится максимально возможно избавиться от влияния остальных игроков. Такая самоорганизация естественно предполагает, что игроки располагают весьма широкими возможностями выбора игры, удовлетворяющей этим требованиям, что, в частности, требует достаточно хорошей информированности и понимания последствий своих действий.

Тривиальный случай идеальной игры имеет место, когда каждая из функций выигрыша f_s зависит только от x_s. Это может быть достигнуто путем объединения игроков с сильными зависимостями в «одного» или путем организации взаимоотношений, которые не допускают больших влияний друг на друга. Следует отметить и еще одну особенность идеальной игры: успешность оптимизации выигрышей целиком зависит от личных действий каждого игрока, его прогнозы проще и надежней, и он может сосредоточиться только на эффективности своих действий, используемых средств и технологий. Может показаться, что в своей полной осуществимости идеальная игра как бы исключает конкуренцию, но это не так, потому что она присутствует, но не на уровне базовых игровых действий, а в сопоставлении их результатов. Это отдельная важная тема.

Работа поддержана Министерством образования Российской Федерации, грант № 00-1.-109.

Библиографический список

1. *Неймарк Ю.И.* Теория управления как наука, которая может и должна помочь человеку в решении социально-экономических и экологических проблем // Сборник пленарных докладов международной конференции по проблемам управления (29.06 - 2.07.1999). М., 1999. С.131.

2. *Неймарк Ю.И.* Математическая модель общества, позволяющая ответить на вопрос о принципах его функционирования, организации и управления // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С.64.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики Нижегородского госуниверситета

Поступила в редакцию 14.06.01

THE IDEAL GAME OF PEOPLE IN THE SOCIETY

Yu.I. Neimark

The conditions are revealed for ideality of people game in the society and for attainability of the maximum for a general prize in maximizing individual prizes.

Неймарк Юрий Исаакович - доктор технических наук, профессор ННГУ, академик РАЕН, Соросовский профессор, член национального комитета по теоретической и прикладной механике, лауреат премий А.А. Андронова и Н. Винера. Автор 8 монографий и более 400 работ по теории колебаний, теоретической механике, теории управления и др.