

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(3)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003103  
EDN: MXUNCA

## Спектральный подход с итерационным уточнением граничных условий излучения для моделирования квазисобственных мод открытых резонаторов гиротронов

А. Г. Рожнев<sup>1,2</sup>✉, М. М. Мельникова<sup>3,1</sup>, Н. М. Рыскин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

<sup>3</sup>ФИЦ Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

E-mail: ✉RozhnevAG@gmail.com, Mafachu@mail.ru, RyskinNM@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2023, принята к публикации 25.12.2023,

опубликована онлайн 10.04.2024

**Аннотация.** Цель. В статье представлен новый метод численного моделирования квазисобственных колебаний в открытых резонаторах гиротронов — мощных вакуумных генераторах электромагнитных волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Резонатор гиротрона имеет форму слабо неоднородного полого круглого металлического волновода. Методы. Предлагаемый подход использует уравнение неоднородной струны с граничными условиями излучения для формулировки нелинейной спектральной краевой задачи, описывающей колебания в резонаторе в пренебрежении связями волн с разными радиальными индексами. С помощью линеаризации по частоте граничных условий излучения нелинейная краевая задача сводится к линейной. Для ее дискретизации используется метод конечных разностей и формулируется линейная обобщенная матричная проблема собственных значений, которая решается методом Арнольди в сочетании с обратным сдвигом собственных значений. Предложен итерационный алгоритм, позволяющий последовательно рассчитывать заданное число частот и добротностей квазисобственных мод колебаний. Результаты. Разработана программа для ЭВМ, написанная на языках Wolfram Language и Fortran, с использованием предложенных в работе алгоритмов. Представлены результаты тестовых расчетов для реальных резонаторов гиротронов, которые демонстрируют высокую точность полученных значений частот, добротностей и распределений полей квазисобственных колебаний в исследованных резонаторах. Заключение. Предложенные в статье методы, алгоритмы и созданная программа могут существенно облегчить процесс разработки гиротронов, предназначенных для различных практических применений и работающих в новых диапазонах частот. Метод итерационного уточнения граничных условий может быть обобщен на случай уравнений линейной теории гиротрона и использован для разработки новых методов анализа стартовых условий мягкого самовозбуждения в гиротронах-генераторах.

**Ключевые слова:** гиротрон, открытый резонатор, высшие продольные моды, комплексные частоты, граничные условия излучения, метод конечных разностей, обобщенная матричная проблема собственных значений, метод Арнольди.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

**Для цитирования:** Рожнев А. Г., Мельникова М. М., Рыскин Н. М. Спектральный подход с итерационным уточнением граничных условий излучения для моделирования квазисобственных мод открытых резонаторов гиротронов // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 3. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003103. EDN: MXUNCA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Spectral approach with iterative clarification of a radiation boundary conditions for modeling of quasimodes of a gyrotrons open cavities

A. G. Rozhnev<sup>1,2</sup>✉, M. M. Melnikova<sup>3,1</sup>, N. M. Ryskin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, Russia

<sup>3</sup>FRC A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉RozhnevAG@mail.ru, Mafashu@mail.ru, RyskinNM@gmail.com

Received 30.11.2023, accepted 25.12.2023, available online 10.04.2024

**Abstract.** *Purpose.* The article presents a new method for numerical simulation of quasi-eigenmode oscillations in open resonators of gyrotrons – powerful vacuum generators of electromagnetic waves in the millimeter and submillimeter ranges. The gyrotron cavity has the shape of a weakly inhomogeneous hollow circular metal waveguide. *Methods.* The proposed approach uses the inhomogeneous string equation with radiation boundary conditions to formulate a nonlinear spectral boundary value problem describing oscillations in a resonator, neglecting the couplings of waves with different radial indices. By linearizing with respect to frequency the radiation boundary conditions, the boundary value problem is reduced to a linear boundary value problem. To discretize this boundary value problem, the finite difference method is used and a linear generalized matrix eigenvalue problem is formulated. This problem is solved by the Arnoldi method with eigenvalues calculation in a shift-invert mode. An iterative algorithm is proposed that makes it possible to sequentially calculate a given number of frequencies and quality factors of quasi-eigenmodes of oscillations. *Results.* The computer program was developed written in the Wolfram Language and Fortran using the algorithms proposed in the work. The results of test calculations for real gyrotron resonators are presented, which demonstrate the high accuracy of the obtained values of frequencies, quality factors and field distributions of quasi-eigenmode oscillations in the studied resonators. *Conclusion.* The methods, algorithms and created program proposed in the article can significantly facilitate the process of developing gyrotrons intended for various practical applications and operating in new frequency ranges. The method of iterative refinement of boundary conditions can be generalized to the case of equations of the linear theory of a gyrotron and used to develop new methods for analyzing the starting conditions for the soft self-excitation in gyrotrons – generators.

**Keywords:** gyrotron, open cavity, high order axial modes, radiation boundary condition, finite difference method, generalized matrix eigenvalue problem, Arnoldi method.

**Acknowledgements.** This study was performed within the framework of a state order to the Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences.

**For citation:** Rozhnev AG, Melnikova MM, Ryskin NM. Spectral approach with iterative clarification of a radiation boundary conditions for modeling of quasimodes of a gyrotrons open cavities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(3):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003103

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Гиротрон представляет собой источник мощного электромагнитного излучения в СВЧ, субтерагерцевом и терагерцевом диапазонах частот [1–3]. Он находит широкое применение в различных областях науки и техники, таких как нагрев и диагностика плазмы в установках термоядерного синтеза [4, 5], радиоспектроскопия [6–11], медицина [12–15], технологические процессы [16–19], системы связи [20] и другие приложения.

В последнее время особый интерес вызывают различные применения гиротронов, для которых необходимо соблюдение специальных требований, накладываемых на распределение поля рабочей моды вдоль пространства взаимодействия, которое определяется формой резонатора. Например, в гиротронах для термоядерных реакторов с мегаваттным уровнем выходной мощности необходимы резонаторы с малым отношением длины к его радиусу, а также со сверхмалыми отражениями выходного сигнала от устройства вывода назад в область взаимодействия. Выполнение этих условий достигается за счёт многоступенчатого или сверхплавного перехода от области

Рожнев А. Г., Мельникова М. М., Рыскин Н. М.  
Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 3

взаимодействия в выходной рупор с контролируемым законом изменения радиуса резонатора вдоль его оси.

В гиротронах, разрабатываемых для спектроскопических установок, работающих на эффекте ядерного магнитного резонанса с динамической поляризацией ядер, должна быть обеспечена возможность оперативной перестройки частоты генерации в диапазоне 1–2 ГГц [11] и высокая стабильность частоты в течение десятков часов непрерывной работы. Одним из способов перестройки частоты является изменение магнитного поля. При этом меняются условия синхронизма встречной волны в резонаторе с циклотронной волной в электронном пучке, и, как следствие, меняется частота генерации. Распределение поля вдоль системы перестраивается при этом таким образом, что взаимодействие преимущественно происходит с различными продольными модами резонатора. Возможность возбуждения продольных мод высокого порядка обеспечивается выбором подходящего профиля резонатора.

Наконец, ещё одним важным направлением разработки гиротронов является создание источников мощного излучения в терагерцевом диапазоне на частотах от нескольких сотен ГГц до 1.2–1.5 ТГц [21–25]. Для этого используется взаимодействие на высших гармониках циклотронной частоты (второй и третьей). Основной проблемой в этом случае является подавление паразитной генерации на основной гармонике циклотронной частоты. Необходимая селекция мод при этом также достигается выбором профиля резонатора.

При исследовании и разработке современных гиротронов важнейшим инструментом является компьютерное моделирование, в основе которого лежит набор теоретических подходов и моделей различного уровня сложности — от простых одномерных моделей для расчёта свойств колебаний в резонаторе гиротрона без пучка до прямого численного моделирования взаимодействия пучка с электромагнитным полем резонатора с помощью самосогласованного решения уравнений Максвелла и уравнений движения электронов в 2.5D или полной трёхмерной постановке [26–29]. В литературе представлены как компьютерные коды, предназначенные для решения каждой из этих частных задач, так и комплексы программ, состоящие из модулей, в которых реализованы все или большинство из методик, применяемых на разных этапах конструирования гиротронов [30–38].

Одной из важнейших составляющих такого моделирования является расчёт свойств резонатора гиротрона без электронного пучка. К этим свойствам относятся частоты колебаний в резонаторе, их омические и дифракционные добротности, а также распределения компонент электромагнитного поля вдоль резонатора. Резонатор, используемый в классической конструкции гиротрона, представляет собой слабонеоднородный полый круглый металлический волновод, радиус которого слабо меняется вдоль продольной оси. С двух сторон отрезок неоднородного волновода нагружен на рупоры, один из которых сужается на пушечном конце, а другой расширяется на коллекторном конце системы (см. рис. 1). В целом такая структура представляет собой открытый электродинамический резонатор [2, 39–41], в котором могут существовать высокодобротные

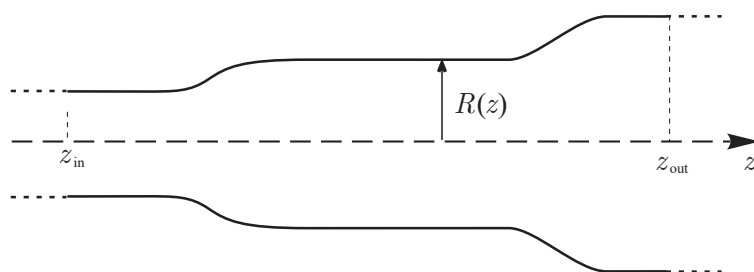


Рис. 1. Открытый резонатор гиротрона в виде слабонеоднородного полого металлического волновода

Fig. 1. Gyrotron cavity as weakly irregular hollow metallic waveguide

электромагнитные колебания, возникающие за счёт отражений волн от переходов однородного участка волновода в рупоры. Эти колебания в открытых электродинамических структурах называются квазисобственными, или комплексными [39], так как они по некоторым своим свойствам отличаются от собственных типов колебаний в закрытых полых металлических резонаторах.

При разработке гиротронов для определения оптимальной формы резонатора приходится многократно решать задачу расчёта свойств колебаний, задавая различные зависимости радиуса неоднородного волновода от продольной координаты. Самая простая и одновременно эффективная модель для расчёта колебаний в открытом резонаторе гиротрона основана на использовании одномерного уравнения неоднородной струны совместно с граничными условиями излучения (ГУИ) на его концах [40]. В этом случае функция  $F(z)$ , относительно которой формулируется краевая задача, описывает распределение комплексной амплитуды поля вдоль оси резонатора. Для  $TE_{mn}$ -моды она является комплексной амплитудой  $H_z$ -компоненты электромагнитного поля, а для  $TM_{mn}$ -моды — комплексной амплитудой  $E_z$ -компоненты поля. Здесь  $m$  и  $n$  — поперечные азимутальный и радиальный индексы моды. В классических гиротронах используются  $TE_{mn}$ -типы колебаний, поэтому далее будут рассматриваться только они. Простота модели, основанной на уравнении неоднородной струны, объясняется тем, что в ней не учитываются малые связи между основной модой и модами с другими значениями радиального индекса  $n$ .

Распределение поля  $F(z)$  в основной части резонатора имеет характерный вид стоячей волны с разным числом вариаций поля вдоль системы. В зависимости от количества вариаций колебания происходят с различными частотами и добротностями. Число вариаций обозначается целым числом  $q$ , а колебания с разными  $q$  называются различными продольными модами открытого резонатора. В целом эти моды обозначаются как  $TE_{mnq}$ .

В области выходного рупора поле имеет вид убегающей от резонатора волны, которая уносит часть энергии электромагнитного поля в выходной тракт. За счёт этого колебания в резонаторе имеют конечную добротность даже в условиях, когда стенки резонатора изготовлены из идеально проводящего материала. В таком случае эта добротность называется дифракционной и обозначается  $Q_d$ . Если дополнительно учитывать потери за счёт конечной проводимости материала стенок, к дифракционным потерям добавляются омические, и при условии малости обоих типов потерь общая добротность определяется с помощью формулы  $Q_t = (Q_d Q_o) / (Q_d + Q_o)$ , где  $Q_t$  и  $Q_o$  — полная и омическая добротности колебаний соответственно.

Несмотря на кажущуюся простоту подхода, основанного на решении уравнения неоднородной струны, при его численной реализации возникает ряд проблем. Хотя само уравнение является линейным, численное решение полной краевой задачи, описывающей свободные колебания в резонаторе, требует использования итерационных методов, поскольку комплексная частота колебаний, выступающая в данном случае в качестве спектрального параметра, входит нелинейным образом в ГУИ. Для нахождения всех решений в заданной области комплексной плоскости частот приходится привлекать дополнительные теоретические или эмпирические соображения для определения числа мод и задания начальных приближений, необходимых для запуска процесса итераций.

Особенно остро эта проблема возникает при анализе резонаторов со сверхнизкой дифракционной добротностью, используемых в мощных гиротронах субтерагерцевого и терагерцевого диапазонов, поскольку в этом случае регулярность расположения частот разных мод на комплексной плоскости нарушается. При расчёте большого числа продольных мод в исследуемой части спектра могут появляться дополнительные нефизические решения (с малыми добротностями), у которых амплитуда поля резко возрастает в области выходного рупора. Частоты и добротности этих мод оказываются близкими к соответствующим величинам для высших продольных мод, локализованных в центральной части резонатора. При наличии нефизических мод сложно задать разумные начальные приближения из априорных соображений и их приходится находить практически «вручную».

Чаще всего для решения указанной выше краевой задачи используется метод пристрелки [30–38]. В других случаях вместо поиска собственных значений (СЗ) решается задача о возбуждении резонатора внешним гармоническим сигналом, после чего значения частот и добротностей находятся из анализа рассчитанной резонансной кривой [42–45].

В работе [46] был предложен новый подход к поиску комплексных частот колебаний в резонаторе гиротрона, названный спектральным. Его суть заключается в том, что дифференциальные уравнения вместе с граничными условиями сводятся одним из разностных методов (конечных разностей или конечных элементов) к обобщённой матричной задаче собственных значений, в которой в качестве спектрального параметра выступает нормированная отстройка частоты колебаний от критической частоты рабочей моды. В [46] эта методика используется для расчёта условий самовозбуждения в линейном режиме работы гиротрона, но очевидно, что такой же подход в более простом варианте может быть использован для поиска комплексных частот колебаний в резонаторе гиротрона без пучка. Однако при использовании спектрального подхода в форме, предложенной в [46], оказывается, что некоторые элементы матриц обобщённой матричной проблемы сами зависят от спектрального параметра, поэтому в целом она оказывается нелинейной и при ее решении возникают те же сложности, что и в методе пристрелки — необходимость задания начальных приближений для каждого из собственных значений, использование итерационной процедуры, а также задача гарантированного поиска всех мод, частоты которых принадлежат заданной области на комплексной плоскости частот.

В настоящей работе предлагается модифицированный спектральный подход для расчёта комплексных частот мод и распределений их полей в открытом резонаторе гиротрона. Этот подход является обобщением методики из [46] и основан на линеаризации ГУИ по спектральному параметру. Благодаря особенностям геометрии открытого резонатора гиротрона, развиваемый подход позволяет рассчитать комплексную частоту и распределение поля основного продольного типа колебаний с точностью, достаточной для практических применений, путем однократного решения линейной матричной проблемы собственных значений без задания начального приближения. Помимо этого, для расчета каждого следующего высшего типа колебаний в большинстве случаев требуется одно или два дополнительных решения линейной матричной проблемы собственных значений.

Содержание статьи организовано следующим образом. В разделе 1 приведены основные уравнения краевой задачи, описывающей колебания в открытом резонаторе гиротрона. Здесь же излагается методика линеаризации граничных условий излучения, позволяющая свести решение нелинейной спектральной проблемы к последовательности решений линейных спектральных задач. В разделе 2 излагается метод приведения краевой задачи в дифференциальной форме к линейной обобщенной матричной проблеме собственных значений (ОМПСЗ), использующий метод конечных разностей. В разделе 3 приведено описание итерационного алгоритма, позволяющего рассчитывать заданное число комплексных частот и распределений полей квазисобственных типов колебаний в открытом резонаторе. В раздел 4 включены примеры расчёта продольных типов колебаний в открытых резонаторах гиротронов различных диапазонов частот, параметры которых доступны из литературы. В Заключение сформулированы полученные результаты и основные выводы.

## **1. Основные уравнения и линеаризация граничных условий излучения**

Геометрия резонатора гиротрона в виде слабо неоднородного полого металлического волновода показана на рис. 1. Предполагается, что радиус волновода медленно меняется вдоль его оси. В пренебрежении связью между модами волновода с различными радиальными индексами

краевая задача, описывающая колебания электромагнитного поля в резонаторе [40], состоит из уравнения неоднородной струны

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + h^2(\omega, z)F(z) = 0, \quad (1)$$

и граничных условий излучения, которые ставятся в плоскостях, перпендикулярных оси резонатора и расположенных в однородных частях волноводов слева и справа от основного объёма резонатора:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dF(z)}{dz} - jh(\omega, z)F(z) \right]_{z=z_{\text{in}}} &= 0, \\ \left[ \frac{dF(z)}{dz} + jh(\omega, z)F(z) \right]_{z=z_{\text{out}}} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1)–(2) предполагается зависимость поля от времени вида  $F(z) \sim \exp(j\omega t)$  и введены следующие обозначения:  $F(z)$  — безразмерная комплексная амплитуда  $H_z$  — компоненты электромагнитного поля в резонаторе;  $h(\omega, z)$  — локальное значение продольного волнового числа  $TE_{mn}$ -моды; величина  $h(\omega, z)$  зависит от координаты  $z$  из-за изменения радиуса резонатора  $R(z)$  при смещении вдоль его оси.

В граничных условиях (2) содержатся корни из комплексной функции частоты  $h^2(\omega, z)$ , поэтому необходимо определить правила выбора ветвей этой функции [40]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [h(\omega, z_{\text{in,out}})] &> 0, \quad \text{если } \operatorname{Re} [h^2(\omega, z_{\text{in,out}})] > 0, \\ \operatorname{Im} [h(\omega, z_{\text{in,out}})] &< 0, \quad \text{если } \operatorname{Re} [h^2(\omega, z_{\text{in,out}})] < 0. \end{aligned}$$

Эти условия основаны на требовании: для любых частот решения уравнения (1) в однородных участках волноводов, лежащих слева и справа от области  $z_{\text{in}} \leq z \leq z_{\text{out}}$ , должны представлять собой волны, переносящие энергию в направлении от центральной части резонатора.

Принимая во внимание малые омические потери в стенках резонатора, можно записать, что  $h^2(\omega, z) = h_r^2(\omega, z) - jh_i^2(\omega, z)$ , где

$$\begin{aligned} h_r^2(\omega, z) &= \omega^2/c^2 - \nu_{mn}^2/R^2(z), \\ h_i^2(\omega, z) &= (1-j)\delta_s \frac{\nu_{mn}^2}{R^3(z)} \left( 1 + \frac{m^2}{\nu_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2 R^2(z)}{c^2 \nu_{mn}^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В этой формуле  $h_r^2(\omega, z)$  — квадрат волнового числа рабочей моды  $TE_{mn}$  в случае идеально проводящих стенок резонатора,  $-jh_i^2(\omega, z)$  — добавка к квадрату волнового числа за счет конечной проводимости стенок,  $J'_m(x)$  — производная функции Бесселя порядка  $m$ ,  $\nu_{mn}$  —  $n$ -й корень уравнения  $J'_m(\nu_{mn}) = 0$ ,  $c$  — скорость света,  $\delta_s = \sqrt{2}/(\mu_0 \omega \sigma)$  — толщина скин-слоя,  $\sigma$  — удельная проводимость материала стенок резонатора,  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Выражение для  $h_i^2(\omega, z)$  выводится методом, развитым в [47], оно совпадает с формулами, приведенными в [48, 49].

Запишем  $h_r^2(\omega, z)$  следующим образом:

$$h_r^2(\omega, z) = (\omega^2 - \omega_0^2)/c^2 + \nu_{mn}^2/R_0^2 [1 - R_0^2/R^2(z)],$$

где  $R_0$  — радиус волновода в некотором характерном сечении,  $\omega_0 = \nu_{mn}c/R_0$  — критическая частота рабочей моды в этом сечении. За величину  $R_0$  может быть принят, например, радиус однородной части резонатора или радиус в плоскости перехода из области взаимодействия в расширяющийся рупор, если однородный участок резонатора отсутствует.

Пусть  $L_0$  – характерный размер резонатора, за который можно принять длину однородной части или всю его длину. Полагая  $\omega \approx \omega_0$ , введем безразмерный параметр частоты  $\Omega = (\omega^2 - \omega_0^2)L_0^2/c^2 \approx 2(v_{mn}L_0/R_0)^2(\omega - \omega_0)/\omega_0$ , безразмерные координату  $\zeta = z/L_0$  и функции

$$\delta(\zeta) = (v_{mn}L_0/R_0)^2 \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2(z)}\right),$$

$$d(\zeta) = (1 - j)(v_{mn}L_0/R_0)^2 \frac{\delta_s R_0^2}{R^3(\zeta)} \left(1 + \frac{m^2}{v_{mn}^2 - m^2} \frac{\omega^2 R^2(\zeta)}{c^2 v_{mn}^2}\right).$$

Отметим, что  $\delta(\zeta)$  не зависит от частоты  $\omega$ , а  $d(\zeta)$  меняется с изменением частоты очень мало, так как это изменение определяется в основном зависимостью толщины скин-слоя  $\delta_s$  от частоты. В ожидаемом диапазоне значений частот продольных мод этой зависимостью можно пренебречь. Поэтому в формуле для  $d(\zeta)$  можно положить  $\omega = \omega_0$  и считать, что эта функция также не зависит от частоты.

После всех переобозначений уравнения (1)–(2) приобретают вид

$$\frac{d^2 F(\zeta)}{d\zeta^2} + [\Omega + \delta(\zeta) - jd(\zeta)] F(\zeta) = 0 \quad (4)$$

и

$$\left[ \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} - j\sqrt{\Omega + \delta(\zeta) - jd(\zeta)} F(\zeta) \right]_{\zeta=\zeta_{in}} = 0,$$

$$\left[ \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} + j\sqrt{\Omega + \delta(\zeta) - jd(\zeta)} F(\zeta) \right]_{\zeta=\zeta_{out}} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4)–(5) представляют собой краевую задачу типа задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения, решения которой определяют комплексные моды колебаний в открытой электродинамической структуре – резонаторе гиротрона. В качестве спектрального параметра здесь выступает безразмерный параметр частоты  $\Omega$ . Отметим, величина  $\Omega$  нелинейным образом входит в граничные условия (5), поэтому, как было отмечено во Введении, для ее решения приходится использовать итерационный подход.

Ниже излагается метод решения краевой задачи (4)–(5). Положим в уравнениях (4)–(5)  $\Omega = \Omega_0 + \tilde{\Omega}$ , где  $\Omega_0$  – заданная константа, а  $\tilde{\Omega}$  – малая величина в смысле, который будет разъяснён ниже. Тогда квадратные корни в формулах (5) можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $\tilde{\Omega}$  и оставить в разложении только два первых слагаемых:

$$\sqrt{\Omega_0 + \tilde{\Omega} + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})} \approx \sqrt{\Omega_0 + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})} +$$

$$+ \frac{\tilde{\Omega}}{2\sqrt{\Omega_0 + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})}}. \quad (6)$$

Затухание в стенках резонатора обычно очень мало, так что выполняется условие  $|\delta(\zeta_{in,out})| \gg |d(\zeta_{in,out})|$ . Учитывая, что радиусы однородных частей волноводов, в которых расположены сечения  $\zeta_{in,out}$ , значительно (на десятки процентов и более) отличаются от радиуса центральной части резонатора, можно считать, что  $|\delta(\zeta_{in,out})| \sim (v_{mn}L_0/R_0)^2$ .

Для современных гиротронов характерные размеры резонатора  $R_0$  и  $L_0$ , а также индексы рабочих мод  $m$  и  $n$  таковы, что относительная отстройка частоты от критической для продольных

мод  $|\omega - \omega_0|/\omega_0 \leq 0.1$ , а параметр  $(v_{mn}L_0/R_0)^2$  принимает значения от  $10^2$  до  $10^4$ . Тогда с большим запасом справедливо неравенство  $|\delta(\zeta_{in,out})| \gg |\Omega|$ . В этом случае всегда можно подобрать параметр  $\Omega_0$  так, чтобы выполнялось соотношение  $|\delta(\zeta_{in,out}) + \Omega_0| \gg |\tilde{\Omega}|$ . Это и есть условие малости параметра  $\tilde{\Omega}$ , при котором в разложении (6) можно не учитывать слагаемые порядка  $\tilde{\Omega}^2$  и выше. В частности, для расчёта нескольких первых продольных мод достаточно положить  $\Omega_0 = 0$ .

Введем обозначения  $\kappa_{in,out} = \sqrt{\Omega_0 + \delta(\zeta_{in,out}) - jd(\zeta_{in,out})}$  и подставим разложение (6) в (4) и (5), в результате чего получим дифференциальное уравнение краевой задачи в виде

$$\frac{d^2 F(\zeta)}{d\zeta^2} + [\Omega_0 + \delta(\zeta) - jd(\zeta)] F(\zeta) = -\tilde{\Omega} F(\zeta). \quad (7)$$

и ГУИ, линейризованные по спектральному параметру  $\Omega$ , в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_{in}} - j\kappa_{in}F(\zeta_{in}) &= \tilde{\Omega} \frac{j}{2\kappa_{in}} F(\zeta_{in}), \\ \left. \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_{out}} + j\kappa_{out}F(\zeta_{out}) &= -\tilde{\Omega} \frac{j}{2\kappa_{out}} F(\zeta_{out}). \end{aligned} \quad (8)$$

В уравнения (7), (8) новый безразмерный параметр частоты  $\tilde{\Omega}$  входит линейным образом, поэтому при их дискретизации будет получена линейная ОМПСЗ, в которой в качестве спектрального параметра выступает  $\tilde{\Omega}$ .

## 2. Дискретизация уравнений краевой задачи

Для получения алгебраических уравнений из уравнений краевой задачи, записанной в дифференциальной форме, можно воспользоваться методами конечных элементов или конечных разностей. Первый из них имеет преимущества, состоящие в том, что он может быть применен для неравномерной сетки, что позволяет существенно уменьшить требования к памяти, а также допускает простое обобщение на случай конечных элементов высокого порядка, что позволяет повысить точность получаемых результатов.

С другой стороны, метод конечных разностей на равномерной сетке в случае одной пространственной координаты предельно прост для понимания и программной реализации. Поэтому здесь будет описан метод дискретизации, базирующийся именно на втором подходе.

Проведем дискретизацию краевой задачи (7)–(8) методом конечных разностей. Для этого введем равномерную сетку на отрезке  $z_{in} \leq z \leq z_{out}$  с шагом  $\Delta z$  и безразмерным шагом  $\Delta \zeta = \Delta z/L_0$ . Число узлов сетки  $N = (z_{out} - z_{in})/\Delta z + 1$ , они нумеруются следующим образом:  $z_1 = z_{in}$ ,  $z_i = z_1 + (i - 1) \cdot \Delta z$ ,  $i = 2, \dots, N - 1$ ,  $z_N = z_{out}$ . Заменяя вторую производную в (7) её симметричной дискретной аппроксимацией во внутренних узлах сетки, получаем соотношения

$$\frac{1}{\Delta \zeta^2} (-F_{i-1} + 2F_i - F_{i+1}) - (\Omega_0 + \delta_i - jd_i) F_i = \tilde{\Omega} F_i, \quad i = 2, \dots, N - 1. \quad (9)$$

В первом и последнем узлах необходимо дополнительно учесть граничные условия (8). Для первого узла имеем уравнение, подобное (9), с  $i = 1$ , а также конечно-разностную форму первого из граничных условий (8)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta \zeta^2} (-F_2 + 2F_1 - F_0) - \kappa_{in}^2 F_1 &= \tilde{\Omega} F_1, \\ \frac{1}{2\Delta \zeta} (F_2 - F_0) - j \left( \kappa_{in} + \tilde{\Omega}/(2\kappa_{in}) \right) F_1 &= 0. \end{aligned}$$



Исключая из этих формул поле  $F_0$  в фиктивном узле с номером 0, получаем уравнение

$$\left( \frac{1}{\Delta\xi^2} + \frac{\kappa_{\text{in}}^2}{2} + j \frac{\kappa_{\text{in}}}{\Delta\xi} \right) F_1 - \frac{1}{\Delta\xi^2} F_2 = \tilde{\Omega} \left( \frac{1}{2} - \frac{j}{2\kappa_{\text{in}} \Delta\xi} \right) F_1. \quad (10)$$

Аналогично предствляется разностное уравнение для последнего узла с номером  $N$ :

$$-\frac{1}{\Delta\xi^2} F_{N-1} + \left( \frac{1}{\Delta\xi^2} + \frac{\kappa_{\text{out}}^2}{2} + j \frac{\kappa_{\text{out}}}{\Delta\xi} \right) F_N = \tilde{\Omega} \left( \frac{1}{2} - \frac{j}{2\kappa_{\text{out}} \Delta\xi} \right) F_N. \quad (11)$$

Собирая в нужном порядке формулы (9)–(11), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно значений поля в узлах сетки, которая в матричной форме записывается в виде

$$[\hat{A}(\Omega_0)]\{F\} = \tilde{\Omega}[\hat{B}(\Omega_0)]\{F\}. \quad (12)$$

Здесь  $[\hat{A}(\Omega_0)]$  – трехдиагональная симметричная комплексная матрица порядка  $N \times N$ ,  $[\hat{B}(\Omega_0)]$  – диагональная комплексная матрица порядка  $N \times N$ ,  $\{F\} = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T$  – вектор-столбец длиной  $N$ , символ  $T$  – знак операции транспонирования. Выражения для элементов матриц  $[\hat{A}]$  и  $[\hat{B}]$ <sup>1</sup> легко получаются из формул (9)–(11).

### 3. Методика расчета собственных чисел с итерационным уточнением граничных условий излучения

Уравнение (12) представляет собой ОМПСЗ для пары матриц ( $[\hat{A}]$ ,  $[\hat{B}]$ ) [50–52], а  $\tilde{\Omega}$  является собственным значением (собственным числом) для этой задачи. Отметим, что элементы матриц  $[\hat{A}]$  и  $[\hat{B}]$  не зависят от  $\tilde{\Omega}$ , поэтому эта спектральная проблема является линейной и для её решения могут быть использованы стандартные методы вычислительной линейной алгебры. В частности, для запуска алгоритма поиска собственных чисел и собственных векторов этой задачи не требуется специального выбора каких-либо начальных приближений. В большинстве программ, применяемых для численного решения линейных ОМПСЗ, в качестве начальных выступают не приближения для СЗ, а приближения для собственных векторов, компоненты которых выбираются случайным образом.

Порядок матричной задачи (12) в случае большого  $N$  может достигать нескольких тысяч, соответственно, она имеет столько же СЗ, однако из них практический интерес представляют только небольшое число наименьших по модулю СЗ, отвечающих низшим продольным модам. При расчёте комплексных типов колебаний в резонаторе гиротрона их количество чаще всего не превышает десяти или, в редких случаях, двадцати. В этом случае решение задачи (12) может быть эффективно проведено методом Арнольди [51, 52], реализованным в библиотеке ARPACK [53]. Процедуры для решения линейных ОМПСЗ, входящие в эту библиотеку, позволяют рассчитывать нужное количество собственных чисел, лежащих в заданной части спектра, например, ближайших к нулю на комплексной плоскости или имеющих наименьшие положительные значения действительной части и т. д. Использование этого свойства, а также процедуры обратного сдвига собственных чисел, позволяет построить итерационный алгоритм вычисления заданного количества собственных значений нелинейной проблемы (4)–(5).

Процедура обратного сдвига СЗ для уравнения (12) состоит в следующем. Положим в нем  $\tilde{\Omega} = \Omega_s + 1/\lambda$ , перенесем слагаемое, пропорциональное  $\Omega_s$ , в левую сторону и умножим полученное уравнение слева на  $([\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}])^{-1}$ . В результате вместо (12) получим

$$\left( [\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}] \right)^{-1} [\hat{B}]\{F\} = \lambda\{F\}, \quad (13)$$

<sup>1</sup>Далее для краткости будем опускать обозначения зависимостей этих матриц от  $\Omega_0$ .

где  $\lambda = 1/(\tilde{\Omega} - \Omega_s)$ . Соотношение (13) представляет собой уже не обобщённую, а стандартную проблему собственных значений для матрицы  $([\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}])^{-1}[\hat{B}]$ , стоящей в левой части этого уравнения. Если  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  — собственные числа задачи (13), имеющие максимальные по величине положительные действительные части и расположенные в порядке их уменьшения, то  $\tilde{\Omega}_i = \Omega_s + 1/\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  будут представлять собой  $n$  собственных чисел ОМПСЗ (12), удовлетворяющих условию  $\text{Re } \tilde{\Omega}_i > \text{Re } \Omega_s$  и упорядоченных по мере возрастания величин  $\text{Re } \tilde{\Omega}_i$ .

Отметим, что в алгоритме, реализованном в пакете ARPACK для решения стандартной матричной проблемы в виде (13), не требуется вычислять в явном виде матрицу, находящуюся слева в этом уравнении. Вместо этого достаточно иметь две процедуры, одна из которых вычисляет результат умножения произвольного вектора длины  $N$  на матрицу  $[\hat{B}]$ , а вторая возвращает вектор  $\{X\}$  — результат решения линейного уравнения  $([\hat{A}] - \Omega_s[\hat{B}])\{X\} = \{Y\}$  для произвольного вектора  $\{Y\}$  длины  $N$ .

Таким образом, выбирая величину сдвига  $\Omega_s$ , можно рассчитывать требуемое количество собственных значений ОМПСЗ (12) в нужной части спектра. Отметим, что выбор  $\Omega_s$  не влияет на значения получаемых СЗ, а определяет только то, какие именно СЗ для пары матриц  $([\hat{A}], [\hat{B}])$  будут вычислены.

На практике при моделировании колебаний в резонаторе гиротрона, в зависимости от конкретных приложений, возникают две постановки задачи. В первом случае это расчёт комплексной частоты и соответствующего распределения поля в резонаторе только для основной продольной моды колебаний. Знание этих параметров позволяет, используя формулы линейной теории гиротрона в приближении фиксированной структуры поля [2, 54–56], оперативно рассчитать положение зоны колебаний для основной моды на плоскости параметров  $B_0, I_{st}$  (здесь  $B_0$  — магнитное поле,  $I_{st}$  — стартовый ток мягкого возникновения колебаний), а также минимальное значение стартового тока. Во втором случае необходимо достаточно точно рассчитать комплексные частоты и распределения полей для нескольких низших продольных мод. Такая необходимость возникает, например, при разработке гиротронов с перестройкой частоты за счёт изменения магнитного поля (см, например, [6–8]).

Для каждого из этих случаев можно использовать два различных алгоритма решения ОМПСЗ с линеаризацией ГУИ по спектральному параметру. В первом варианте достаточно просто положить в уравнении (12) параметр  $\Omega_0 = 0$  и найти одно собственное число этой задачи с наименьшей действительной частью. Как показывают тесты, проведённые для большого числа резонаторов, рассчитанные при этом параметры колебаний с большой точностью (порядка 6–8 значащих цифр для частоты и 4–6 значащих цифр для добротности) совпадают с результатами решения краевой задачи другими методами, в частности, методом пристрелки. Примеры таких расчётов приведены в следующем разделе.

Во втором варианте для нахождения нескольких продольных мод можно воспользоваться итерационной процедурой, которая позволяет последовательно вычислять заданное число СЗ, начиная с основной моды. При этом комплексная частота первой моды находится с помощью алгоритма из предыдущего абзаца, а начальные приближения для комплексных частот моды с номером  $i > 1$  будут рассчитываться автоматически в процессе итераций, производимых при расчёте моды с номером  $i - 1$ .

Псевдокод алгоритма поиска нескольких собственных значений показан на рис. 2 и состоит в следующем. Пусть собственные числа матричной проблемы (12) выстроены в порядке возрастания их действительных частей, найдено  $i - 1$  первых СЗ и имеется начальное приближение  $\Omega_{i0}$  для СЗ с номером  $i$ . Если сформировать матрицы  $[\hat{A}(\Omega_{i0})]$  и  $[\hat{B}(\Omega_{i0})]$  и сдвиг  $\Omega_s$  задать так, чтобы выполнялось условие  $\text{Re}(\Omega_{i-1}) < \text{Re}(\Omega_s) < \text{Re}(\Omega_{i0})$ , то использование процедуры обратного сдвига для решения матричной задачи в качестве первого рассчитанного СЗ даст улучшенное

```

function OmegaResult = GyrCavIteration[n, Omega0, tol, alpha]
% Input parameter:
%
% Omega0 - lower bound for searching eigenvalues;
% n - number of eigenvalues;
% tol - convergence criterion;
% alpha - parameter for settings the shift for the matrix
%         eigenvalue problem, 0 < alpha < 1;
%
% Result:
%   Complex eigenvalues in array OmegaResult(i), i=1,...n

% initial settings

OmegaNew = Omega0;
i = 0;
% cycle for eigenvalues searching
  while i<= n

% cycle for iterative clarification of the eigenvalue
  while true
% Calculation of matrices A and B for a given value OmegaNew
  .....
  OmegaShift = OmegaNew - (1-alpha)*real(OmegaNew);
% Solving the generalized matrix eigenvalue problem (13)
% and finding two eigenvalues lambda(k), k = 1,2 with
% the largest real(lambda), such that real(lambda(1)) >
% real(lambda(2));
  .....
  OmegaPrev = OmegaNew;
  OmegaNew = OmegaNew + OmegaShift + 1/lambda(1);
  OmegaNext = OmegaNew + OmegaShift + 1/lambda(2);

% convergence test
  if abs(OmegaNew-OmegaPrev) < tol*max(abs(OmegaNew), ...
  abs(OmegaPrev))
    break;
  end
%
  end % end internal while
% convergence achieved
  OmegaResult(i) = OmegaNew;
% initial value for the next eigenvalue
  OmegaNew = OmegaNext;
  i = i + 1;
  end % end external while
end % end module

```

Рис. 2. Псевдокод функции поиска собственных чисел методом итерационного уточнения линеаризованных ГУИ. Строки из точек должны содержать код, реализующий операции, описанные в предшествующем комментарии

Fig. 2. Pseudocode of the function for eigenvalues searching by iterative clarification of the linearized radiation boundary conditions. The dot lines must contain code that implements the operations described in the previous comment

приближение для  $i$ -го СЗ. При повторении этого процесса происходит сходимость величины  $\Omega_{i0}$  к искомому собственному значению  $\Omega_i$ , при этом на каждой итерации величина  $|\Omega_{i0} - \Omega_i|$  становится все меньше и меньше, быстро стремясь к нулю. Поэтому решение для моды с номером  $i$  линейной ОМПСЗ (12), полученной путем дискретизации краевой задачи с линеаризованными ГУИ (7)–(8), стремится к решению нелинейной спектральной краевой задачи (4)–(5).

Осталось определить, как после расчета СЗ с номером  $i$  задать начальное приближение для поиска следующего СЗ. Здесь можно принять во внимание, что при решении ОМПСЗ методом Арнольди, даже если задан расчет только одного СЗ, всегда рассчитывается их несколько, поэтому на каждой итерации процесса, описанного в предыдущем абзаце, кроме точного значения  $i$ -го собственного числа<sup>2</sup>, естественным образом находится достаточно хорошее приближение для запуска итераций поиска следующего СЗ.

Заметим, что в рассмотренной процедуре на каждой итерации внутреннего цикла алгоритма (см. рис. 2) вычисляется новое, более подходящее значение для величины  $\Omega_0$ , вблизи которой происходит линеаризация ГУИ при выводе уравнений (7)–(8). При этом линеаризованные ГУИ все более и более точно моделируют процессы излучения именно для той моды, которая рассчитывается на данном шаге внешнего цикла процедуры поиска спектра собственных мод. Поэтому предлагаемый подход может быть назван методом расчета мод резонатора с итерационным уточнением граничных условий излучения.

Подавляющая часть времени решения ОМПСЗ в коде ARPACK расходуется на вычисление собственных чисел; для расчета собственных векторов требуется значительно меньшее время, поэтому при каждом вызове процедуры из библиотеки ARPACK устанавливается необходимость одновременного вычисления и собственных чисел, и собственных векторов задачи. В результате на выходе всего итерационного процесса получаем заданное количество СЗ и собственных векторов. Компонентами последних являются значения комплексной амплитуды поля вычисленных мод в узлах сетки.

Практические расчеты показывают, что для внутренней сходимости решения для основной моды требуется 3 итерации внутреннего цикла алгоритма (см. рис. 2), а для каждой следующей моды 2 итерации, при этом в каждом случае последняя итерация нужна для проверки сходимости. В целом для расчета  $n$  собственных мод необходимо примерно  $2n + 1$  раз решить ОМПСЗ. Для  $n < 10$  эта величина несоизмеримо меньше требуемого количества решений задачи Коши для дифференциального уравнения (1) в методе пристрелки.

На программу, в которой реализована данная методика, получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [57]. Программа написана на языках программирования Wolfram Mathematica (интерфейс) и Фортран (расчетный модуль) и работает под управлением ОС Windows 10 или Windows 11. Без каких-либо изменений программа может быть перекомпилирована для ОС Linux.

#### 4. Тестовые примеры расчёта резонаторов

В данном разделе содержатся результаты тестовых расчётов резонаторов нескольких гиротронов, работающих в различных диапазонах — от длинноволновой части миллиметрового до субмиллиметрового диапазона длин волн. Для удобства ссылок резонаторы для различных тестовых примеров обозначены номером в табл. 1 и для каждого из них приведены следующие данные: диапазон, тип рабочей моды, проводимость стенок резонатора, используемая в расчётах,

<sup>2</sup>Термин «точное значение СЗ» употребляется здесь в том смысле, что это величина СЗ нелинейной краевой задачи, найденная с учетом погрешности ее дискретизации, критерия сходимости итерационной процедуры и критерия сходимости метода Арнольди в библиотеке ARPACK.

Таблица 1. Резонаторы гиротронов для тестовых расчетов

Table 1. Gyrotron cavities for test calculations

Номер теста	Частота, ГГц	Рабочая мода	Проводимость стенок, См/м	Ссылка на источник
1	391	$TE_{85}$	$3 \cdot 10^7$	[58]
2	140	$TE_{03}$	$\infty$	[37]
3	42	$TE_{03}$	$\infty$	[37]
4	140	$TE_{10,4}$	$\infty$	[37]
5	170	$TE_{34,10}$	$3 \cdot 10^7$	[59]

ссылка на источник. В этих ссылках можно найти полные данные о геометрии резонаторов и других необходимых параметрах. Для всех примеров приведены также результаты моделирования основной или нескольких продольных мод другими способами, что позволяет сделать выводы о точности предлагаемого метода.

Схематические изображения моделируемых в тестах резонаторов, а также значения или обозначения их геометрических размеров приведены на рис. 3. Для резонаторов из тестов 2–5 размеры приведены в табл. 2.

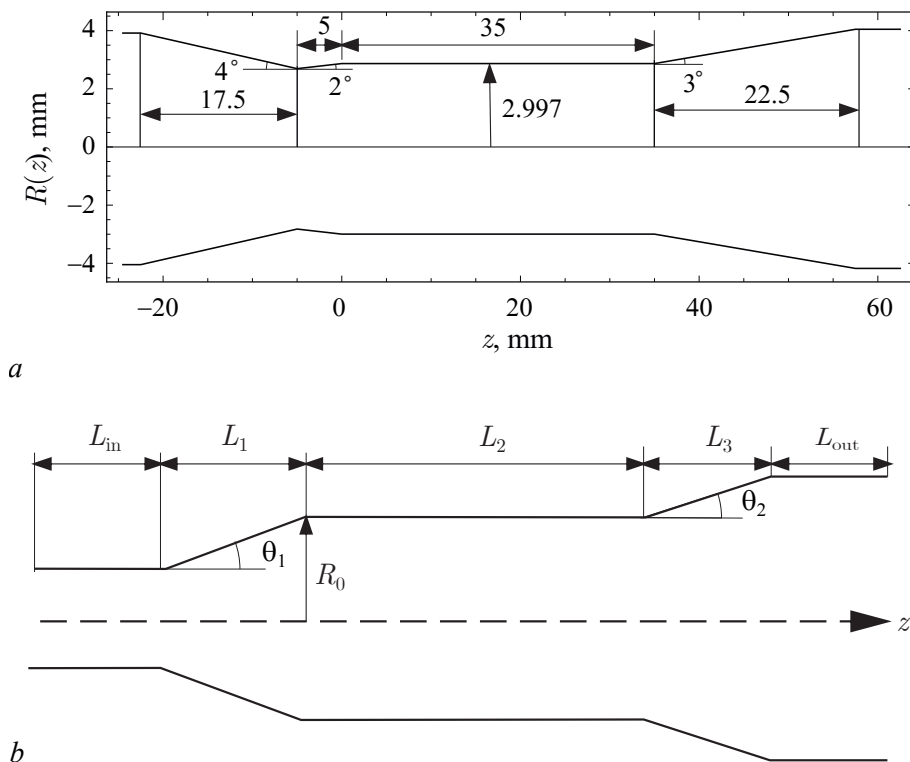


Рис. 3. Профили резонаторов для тестов: *a* – резонатор гиротрона с непрерывной перестройкой частоты для спектроскопических исследований [58]; *b* – профиль резонаторов для тестов из [37, 59]. Все размеры на рис. 3, *a* приведены в мм  
 Fig. 3. Cavities profiles considered in the tests: *a* – cavity for continuous frequency tunable gyrotron for spectroscopy studies [58]; *b* – profile of the cavities for tests from [37, 59]. All dimensions on the figure 3, *a* are given in mm

Таблица 2. Геометрические параметры резонаторов 2–5 с профилем, показанным на рис. 1, b

Table 2. Geometry parameters of the cavities 2–5 with profile shown in fig. 1, b

Параметр	Рабочая частота, рабочая мода			
	140 ГГц, $TE_{03}$	42 ГГц, $TE_{03}$	42 ГГц, $TE_{10,4}$	170 ГГц, $TE_{34,10}$
$L_1$ , мм	18.9	30.0	10.0	8
$L_2$ , мм	10.0	44.0	11.0	13
$L_3$ , мм	10.1	46.0	12.0	16
$\theta_1$ , град	0.5	2.0	5.0	2.8
$\theta_2$ , град	3.0	3.0	3.0	3.5
$R_0$ , мм	3.47	11.57	8.11	20.95

**4.1. Моделирование основных мод колебаний в резонаторах из тестов 1–5.** Сначала рассмотрим результаты расчетов основных типов колебаний для каждого резонатора, представленного в табл. 1. В данном подразделе расчет основной моды производился по упрощенной методике, когда вычислялось единственное СЗ линейной ОМПСЗ (12) с наименьшей величиной  $\text{Re}(\tilde{\Omega})$ , при этом полагалось  $\Omega_0 = 0.0$ . Таким образом, для каждого из резонаторов 1–5 матричная проблема решалась только один раз. Вычисленные таким способом значения частот и добротностей основных мод приведены в табл. 3. Для сравнения в этой же таблице в двух последних колонках показаны соответствующие величины, рассчитанные методом пристрелки с использованием программы [34]. Видно, что для всех резонаторов значения частоты, вычисленные двумя способами, отличаются не более чем на 2 единицы в восьмом знаке, а величины добротностей — не более чем на 3 единицы в четвертом знаке. Эти результаты подтверждают замечание из раздела 3, что в случае расчета только основной моды достаточно использовать упрощенную методику, при этом получаемые результаты для параметров мод демонстрируют очень высокую точность.

Рассчитанные таким способом распределения полей основных мод во всех случаях с графической точностью совпадают с картинками полей, полученных при решении нелинейной спектральной проблемы с помощью итерационной методики. Для некоторых резонаторов примеры этих распределений будут приведены далее.

Таблица 3. Частоты и дифракционные добротности основных типов колебаний для резонаторов гиротронов из тестов 1–5

Table 3. Frequencies and quality factors of the fundamental modes for the gyrotron cavities from tests 1–5

Номер резонатора	Спектральный подход с линеаризацией ГУИ		Метод пристрелки	
	Частота, ГГц	Дифракционная добротность	Частота, ГГц	Дифракционная добротность
1	391.47013	16631.3	391.47013	16630.8
2	140.22593	849.3	140.22592	849.0
3	42.03745	1115.2	42.03745	1115.2
4	140.12867	585.5	140.12869	585.7
5	170.00732	1394.2	170.00731	1394.09

**4.2. Гиротрон на моде  $TE_{85}$  с рабочей частотой 391 ГГц.** В качестве следующего примера рассмотрен резонатор гиротрона из [58], который работает на второй циклотронной гармонике с рабочей частотой 391 ГГц и с непрерывной перестройкой частоты в диапазоне около 2 ГГц. Рабочая мода гиротрона  $TE_{8,5}$ . Прибор предназначен для использования в спектроскопических установках на ядерном магнитном резонансе, использующих эффект динамической поляризации ядер. Необходимая перестройка частоты обеспечивается взаимодействием электронного пучка с полями встречных компонент мод типа  $TE_{85q}$  при изменении магнитного поля. Здесь продольный индекс моды  $q$  меняется в диапазоне  $q = 1...6$ . Зависимость радиуса резонатора от продольной координаты, показанная на рис. 3, а, взята из [58]. Радиус и длина однородной части резонатора равны  $R_0 = 2.997$  мм и  $L_0 = 35$  мм. Принятая в расчётах проводимость стенок резонатора  $\sigma = 3 \times 10^7$  См/м.

Отметим, что для обеспечения перестройки частоты за счёт взаимодействия пучка с различными продольными типами колебаний моды высокого порядка должны обладать сравнительно большой добротностью, чтобы снизить для них пусковой ток. Поэтому резонатор на рис. 3, а имеет большое отношение  $L_0/R_0 \approx 11.7$  и сравнительно большой угол раскрытия расширяющегося рупора на правом конце резонатора. Это обеспечивает значительные отражения волны в волноводе от перехода однородной части резонатора в расширяющийся рупор.

Рассчитанные для этого резонатора значения частот и добротностей продольных мод для  $q = 1...6$  приведены в табл. 4. Во второй и третьей колонках таблицы даны частоты и добротности, полученные с помощью развитого в настоящей статье метода; в двух последних колонках содержатся эти же величины, рассчитанные методом пристрелки с использованием той же программы, что и в предыдущем примере. Рассчитанные двумя методами частоты отличаются не более чем на 2 единицы в 8-й значащей цифре, а добротности — на 1–2 единицы в четвертой значащей цифре. С учетом разных численных подходов, использованных в этих методиках, можно считать, что полученные с их помощью результаты практически совпадают.

Таблица 4. Частоты и добротности продольных мод резонатора гиротрона на рабочей моде  $TE_{85}$  [58]

Table 4. Frequencies and quality factors of the axial modes of the gyrotron cavity with operating mode  $TE_{85}$  [58]

$q$	Спектральный подход с линеаризацией ГУИ		Метод пристрелки	
	Частота, ГГц	Добротность	Частота, ГГц	Добротность
1	391.47013	16631.3	391.47013	16630.8
2	391.53397	13143.0	391.53397	13141.6
3	391.64034	9742.4	391.64034	9740.3
4	391.78919	7156.4	391.78919	7154.2
5	391.98044	5340.3	391.98045	5338.5
6	392.21399	4080.6	392.21401	4079.5

На рис. 4 показаны распределения полей комплексных мод в этом резонаторе. Сплошными черными линиями отображаются модули комплексных амплитуд полей, оранжевыми линиями — их аргументы. Пунктир соответствует профилю резонатора в произвольных единицах. Поля, рассчитанные обоими методами (спектральный подход и метод пристрелки) для всех мод совпадают с графической точностью.

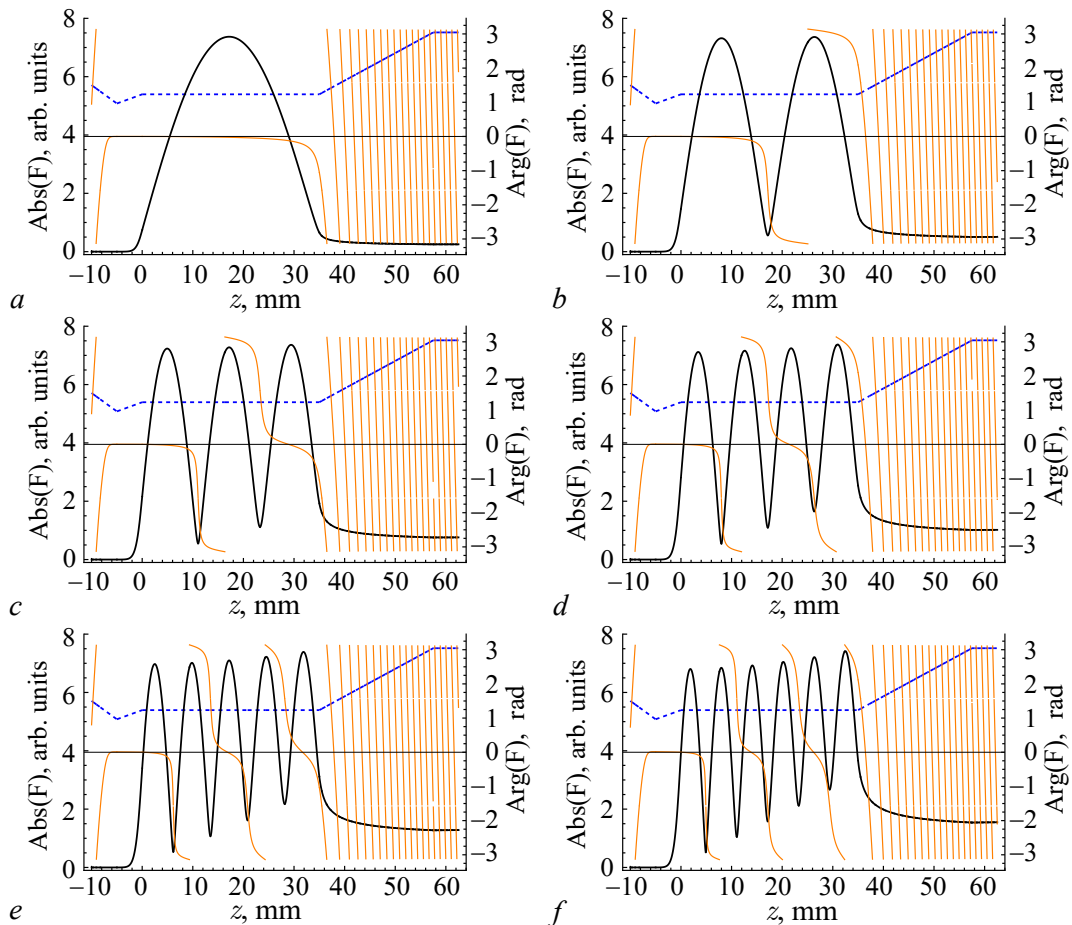


Рис. 4. Распределения полей первых 6 продольных мод резонатора гиротрона с рабочей модой  $TE_{85}$  и частотой диапазона 391 ГГц. Рис. *a-f* отвечают модам с продольными индексами  $q = 1..6$ . Сплошные черные линии — модули комплексной амплитуды поля в произвольных единицах; оранжевые линии — фазы комплексной амплитуды; синий пунктир — профиль резонатора (цвет онлайн)

Fig. 4. Field distributions of the first six high order axial modes of a gyrotron cavity with an operating mode of  $TE_{85}$  and a frequency 391 GHz. Fig. *a-f* correspond to modes with axial indices  $q = 1..6$ . Solid black lines are the modules of the complex amplitude of the field in arbitrary units, orange lines — phases of the complex amplitude, blue dotted line — cavities profile (color online)

**4.3. Резонаторы гиротронов с частотами 42 ГГц и 140 ГГц [37].** В работе [37] описан комплекс программ GYROCOMPU для компьютерного моделирования работы гиротрона в разных режимах, в том числе для расчета параметров полого резонатора без пучка. В качестве тестовых примеров взяты три гиротрона, указанные в табл. 1 под номерами 2–4. Были проведены расчеты этих резонаторов и сравнение полученных результатов с данными из статьи [37]. Результаты сравнения сведены в табл. 5. В ней содержатся значения частот и добротностей основной продольной моды для трех резонаторов, полученные двумя способами: с помощью кода COAXIAL, разработанного ранее О. Думбрайсом, и с помощью кода GYROCOMPU, а также значения этих же величин, рассчитанных с использованием развитой в данной статье методики.

Как следует из табл. 5, значения частот основных мод, полученных с использованием всех трех кодов практически совпадают. Дифракционные добротности, рассчитанные с помощью кода COAXIAL и предлагаемым методом также совпадают, а программа GYROCOMPU дает для добротностей значения, превышающие результаты двух других программ на 5–10%.



Таблица 5. Сравнение частот и дифракционных добротностей основных типов колебаний резонаторов с данными из [37]

Table 5. Comparison of frequencies and diffraction quality factors of the fundamental axial modes of the cavities with data from [37]

Тип колебаний	GYROCOMPU		COAXIAL		Спектральный подход с линейризацией ГУИ	
	Частота, ГГц	Диф. добротность	Частота, ГГц	Диф. добротность	Частота, ГГц	Диф. добротность
$TE_{031}$	140.223	857.1	140.226	849.0	140.226	849.3
$TE_{031}$	42.037	1136.6	42.037	1115.0	42.037	1115.2
$TE_{10,4,1}$	140.129	588.0	140.129	586.0	140.129	585.7

В статье [37] это различие объясняется различием численных методик, использованных в программах COAXIAL и GYROCOMPU, а не дефектом какого-либо из них.

Спектральным подходом с итерационным уточнением ГУИ также были проведены расчеты частот, добротностей и пространственных распределений для высших продольных мод в резонаторах из тестов 2–4, и полученные результаты сравнивались с результатами метода пристрелки [34]. Для всех резонаторов и для всех рассчитанных продольных мод наблюдается такое же полное согласие этих результатов друг с другом, как и для резонатора из теста 1. Для примера на рис. 5 приведены картины полей первых четырех мод в резонаторе из теста 3. Цвета и начертания различных кривых на этом рисунке аналогичны параметрам кривых, принятым на рис. 4.

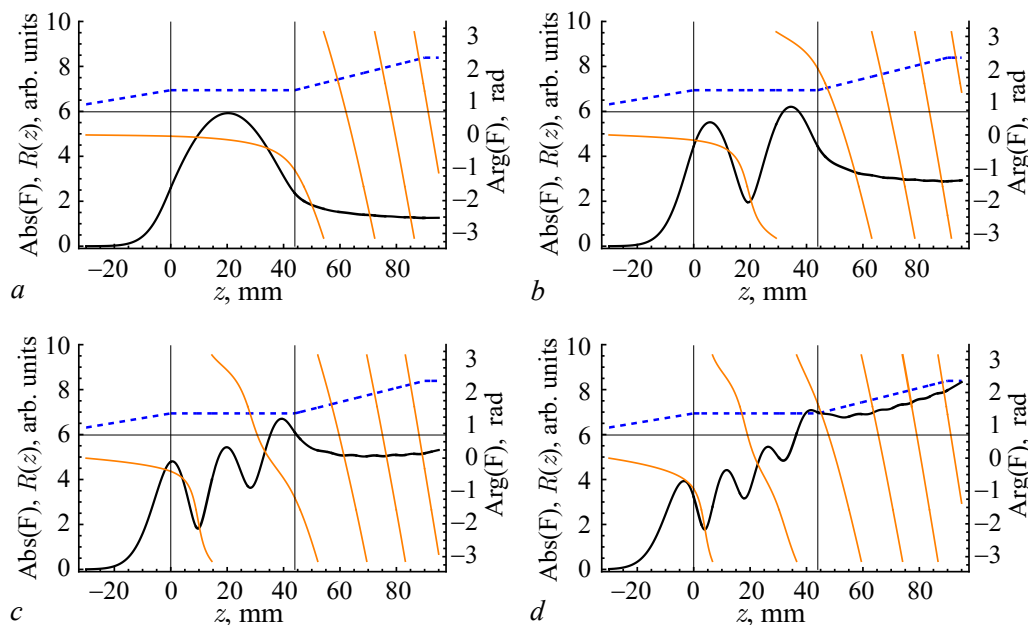


Рис. 5. Распределения полей 4 продольных мод резонатора гиротрона с рабочими модами  $TE_{03q}$  и частотой 42 ГГц. Рис. *a–d* соответствуют модам с продольными индексами  $q = 1...4$ . Сплошные черные линии – модули комплексной амплитуды поля в произвольных единицах, оранжевые линии – фазы комплексной амплитуды; синий пунктир – профиль резонатора (цвет онлайн)

Fig. 5. Fields distributions of four cavity axial modes for gyrotron with operating mode  $TE_{03q}$  and frequency 42 GHz. Figures *a–d* correspond to modes with axial indexes  $q = 1...4$ . Solid curves – modules of the complex field amplitude (arbitrary units), orange curves – phases of the complex field amplitude, blue dashed line – cavities profile (color online)

**4.4. Тестовый пример 5. Резонатор гиротрона для нагрева плазмы [59].** Гиротрон, описанный в [59], разработан как прототип гиротрона для нагрева плазмы. Согласно заявленным в этой статье проектируемым выходным параметрам, он должен генерировать мощность свыше 1 МВт на частоте 170 ГГц с электронным КПД, превышающим 35%. Напряжение и ток равны 78...82 кВ и 40 А соответственно. Рабочая мода резонатора  $TE_{34,10,1}$ .

Экстремальные параметры данного гиротрона требуют тщательного проектирования резонатора. Высокие тепловые нагрузки приводят к необходимости максимального снижения дифракционной добротности рабочей моды колебаний при одновременном сохранении высокого значения омической добротности. Эффективная длина рабочей моды, определенная в [60] формулой

$$L_{\text{eff}} = \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi f/c)^2 - (v_{mn}/R_0)^2}},$$

при частоте генерации  $f = 170$  ГГц составляет  $L_{\text{eff}} \approx 18.8$  мм, при этом отношение  $L_{\text{eff}}/R_0 \approx 0.9$  предельно мало. Высокие азимутальный и радиальный индексы рабочей моды и большой радиус резонатора обуславливают большое значение омической добротности, которая, если оценивать ее по известной формуле [2], составляет  $Q_{\text{ohm}} \approx 74420$ .

При таких параметрах резонатора комплексная частота основной моды  $TE_{34,10,1}$  оказывается на комплексной плоскости значительно отделенной от частот мод с более высокими продольными индексами. Это благоприятно сказывается на повышении стартовых токов для этих мод и, следовательно, на устойчивости колебаний на основной моде.

Если использовать метод пристрелки для расчета спектра колебаний, такое разделение комплексных частот приводит к сложности поиска начальных приближений для каждой из этих мод. В то же время, как показывают расчеты, предлагаемый здесь модифицированный спектральный подход легко справляется с этой задачей и вычисляет требуемое количество комплексных частот одну за другой, используя итерационный алгоритм, описанный в разделе 3.

В табл. 6 приведены результаты расчетов частот и добротностей колебаний первых четырех продольных мод рассматриваемого резонатора. Совпадение результатов для двух низших мод, полученных предлагаемым методом и методом прогонки, можно считать хорошим, но с ростом номера моды это совпадение ухудшается. Можно предположить, что это ухудшение объясняется тем, что у данного резонатора имеется значительное сужение волновода на пушечном конце резонатора и на этом участке волна в волноводе становится сильно закритической. В этих условиях уравнение (4) приобретает свойства жесткого дифференциального уравнения [61], в результате чего точность решения задачи Коши в методе прогонки снижается. Однако это предположение нуждается в дополнительной проверке. Распределения полей рассчитываемых мод выглядят аналогично полям на рис. 5 и здесь не приводятся.

Таблица 6. Частоты и дифракционные добротности продольных мод резонатора гиротрона с рабочей частотой 170 GHz [59]

Table 6. Frequencies and diffraction quality factors of HOAM for gyrotron cavity with operating frequency 170 GHz [59]

$q$	Спектральный подход с линеаризацией ГУИ		Метод пристрелки	
	Частота, ГГц	Дифракционная добротность	Частота, ГГц	Дифракционная добротность
1	170.00732	1393.5	170.00731	1394.1
2	170.56715	356.5	170.56692	356.0
3	171.46104	210.9	170.46182	211.6
4	172.41215	154.3	172.40427	152.8

## Заключение

В статье изложен спектральный подход с итерационным уточнением граничных условий излучения для решения краевой задачи, описывающей квазисобственные колебания в открытом резонаторе гиротрона. Метод позволяет рассчитывать спектр продольных квазисобственных мод, что подразумевает расчет их частот, добротностей (дифракционной, омической и полной), а также распределений комплексных амплитуд полей мод.

Главной особенностью метода является то, что при его использовании отпадает необходимость задания начальных приближений для поиска комплексных частот мод, что является основной проблемой при использовании других итерационных способов решения этой задачи, например, метода пристрелки. Более того, если требуется вычисление параметров только основной моды колебаний открытого резонатора, то данная методика позволяет получить их после однократного решения обобщенной матричной проблемы собственных значений, без дополнительных итераций.

Развитая методика может быть обобщена на случай уравнений линейной теории гиротрона и использована для разработки новых методов анализа условий мягкого самовозбуждения в гиротронах-генераторах.

## Список литературы

1. *Flyagin V. A., Gaponov A. V., Petelin M. I., Yulpatov V. K.* The gyrotron // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1977. Vol. 25, no. 6. P. 514–521. DOI: 10.1109/TMTT.1977.1129149.
2. *Nusinovich G. S.* Introduction to the Physics of Gyrotron // Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 2004. 335 p.
3. *Kartikyan M. V., Borie E., Thumm M.* Gyrotrons: High-Power Microwave and Millimeter Wave Technology. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2003. 228 p.
4. *Thumm M.* Progress on gyrotrons for ITER and future thermonuclear fusion reactors // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2011. Vol. 39, no. 4. P. 971–979. DOI: 10.1109/TPS.2010.2095042.
5. *Glyavin M. Y., Idehara T., Sabchevski S. P.* Development of THz gyrotrons at IAP RAS and FIR UF and their applications in physical research and high-power THz technologies // *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. 2015. Vol. 5, no. 5. P. 788–797. DOI: 10.1109/TTHZ.2015.2442836.
6. *Hornstein M. K., Bajaj V. S., Griffin R. G., Kreischer K. E., Mastovsky I., Sirigiri J. R., Shapiro M. A., Temkin R. J.* Second harmonic operation at 460 GHz and broadband continuous frequency tuning of a gyrotron oscillator // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2005. Vol. 52, no. 5. P. 798–807. DOI: 10.1109/TED.2005.845818.
7. *Chang T. H., Idehara T., Ogawa I., Agusu L., Kobayashi S.* Frequency tunable gyrotron using backward-wave components // *Journal of Applied Physics*. 2009. Vol. 105, no. 6. P. 063304. DOI: 10.1063/1.3097334.
8. *Torrezan A. C., Han S. T., Mastovsky I., Shapiro M. A., Sirigiri J. R., Temkin R. J., Barnes A. B., Griffin R. G.* Continuous-wave operation of a frequency-tunable 460-GHz second-harmonic gyrotron for enhanced nuclear magnetic resonance // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2010. Vol. 8, no. 6. P. 1150–1159. DOI: 10.1109/TPS.2010.2046617.
9. *Torrezan A. C., Shapiro A. C., Sirigiri J. R., Temkin R. J., Griffin R. G.* Operation of a continuously frequency-tunable second-harmonic CW 330-GHz gyrotron for dynamic nuclear polarization // *IEEE Transaction on Electron Devices*. 2011. Vol. 58, no. 8. P. 2777–2783. DOI: 10.1109/TED.2011.2148721.
10. *Глявин М. Ю., Денисов Г. Г., Запелов В. Е., Кошелев М. А., Третьяков М. Ю., Цветков А. И.*

Источники мощного терагерцевого излучения для спектроскопии и диагностики различных сред // УФН. 2016. Vol. 186, no. 6. С. 667–677. DOI: 10.3367/UFNr.2016.02.037801.

11. *Sabchevski S., Glyavin M.* Development and application of THz gyrotrons for advanced spectroscopic methods // *Photonics*. 2023. Vol. 12, no. 2. P. 189–207. DOI: 10.3390/photonics10020189.
12. *Siegel P.H.* Terahertz technology in biology and medicine // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 2004. Vol. 52, no. 10. P. 2438–2447. DOI: 10.1109/TMTT.2004.835916.
13. *Pilosof M., Einat M.* Note: A 95 GHz mid-power gyrotron for medical applications measurements // *Review of Scientific Instruments*. 2015. Vol. 86, no. 1. P. 016113. DOI: 10.1063/1.4906507.
14. *Cheon H., Yang H.J., Lee S.H., Kim Y.A., Son J.H.* Terahertz molecular resonance of cancer DNA // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 37103. DOI: 10.1038/srep37103.
15. *Miyoshi N., Idehara T., Khutoryan E., Fukunaga Y., Bibin A.B., Ito S., Sabchevski S.P.* Combined hyperthermia and photodynamic therapy using a sub-THz gyrotron as a radiation source // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2016. Vol. 37, no. 8. P. 805–814. DOI: 10.1007/s10762-016-0271-z.
16. *Bykov Y., Ereemeev A., Glyavin M., Kholoptsev V., Luchinin A., Plotnikov G. Denisov A., Bogdashov G., Kalynova V., Semenov N., Zharova N.* 24-84-GHz gyrotron systems for technological microwave applications // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2004. Vol. 32, no. 1. P. 67–72. DOI: 10.1109/TPS.2004.823904.
17. *Bratman V.L., Bogdashov A.A., Denisov G.G., Glyavin M.Yu., Kalynov Yu.K., Luchinin A.G., Manuilov V.N., Zapevalov V.E., Zavolsky N.A., Zorin V.G.* Gyrotron development for high power THz technologies at IAP RAS // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012. Vol. 33, no. 7. P. 715–723. DOI: 10.1007/s10762-012-9898-6.
18. *Aripin H., Mitsudo S., Prima E.S., Sudiana I.N., Tani S., Sako K., Fujii Y., Saito T., Idehara T., Sano S., Purwasasmita B.S., Sabchevski S.* Structural and microwave properties of silica xerogel glass-ceramic sintered by sub-millimeter wave heating using a gyrotron // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012. Vol. 33, no. 12. P. 1149–1162. DOI: 10.1007/s10762-012-9925-7.
19. *Glyavin M., Sabchevski S., Idehara T., Mitsudo S.* Gyrotron-Based Technological Systems for Material Processing – Current Status and Prospects // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2020. Vol. 41, no. 8. P. 1022–1037. DOI: 10.1007/s10762-020-00727-w.
20. *Federici J., Moeller L.* Review of terahertz and subterahertz wireless communications // *Journal of Applied Physics*. 2010. Vol. 107, no. 11. P. 111101. DOI: 10.1063/1.3386413.
21. *Idehara T., Mitsudo S., Ogawa I.* Development of high-frequency, highly stable gyrotrons as millimeter to submillimeter wave radiation sources // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2004. Vol. 32, no. 3. P. 910–916. DOI: 10.1109/TPS.2004.827599.
22. *Idehara T., Tsuchiya H., Watanabe O., Agusu L., Mitsudo S.* The first experiment of a THz gyrotron with a pulse magnet // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2006. Vol. 27, no. 3. P. 319–331. DOI: 10.1007/S10762-006-9084-9.
23. *Glyavin M.Yu., Luchinin A.G., Golubiatnikov G.Yu.* Generation of 1.5-kW, 1-THz Coherent radiation from a gyrotron with a pulsed magnetic field // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100. P. 015101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.015101.
24. *Bratman V.L., Kalynov Yu.K., Manuilov V.N.* Large-orbit gyrotron operation in the terahertz frequency range // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. P. 245101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.245101.
25. *Bandurkin I. Fedotov A., Glyavin M., Idehara T., Malkin A., Manuilov V., Sergeev A. Tsvetkov A., Zaslavsky V., Zotova I.* Development of third-harmonic 1.2-THz gyrotron with intentionally increased velocity spread of electrons // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2020. Vol. 67, no. 10. P. 4432–4436. DOI: 10.1109/TED.2020.3012524.

26. *Botton M., Antonsen T. M., Levush B., Nguyen K. T., Vlasov A. N.* MAGY: A time-dependent code for simulation of slow and fast microwave sources // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1998. Vol. 26, no. 3. P. 882–892. DOI: 10.1109/27.700860.
27. *Stock A., Neudorfer J., Riedlinger M., Pirrung G., Gassner G., Schneider R., Roller S., Munz C. D.* Three-dimensional numerical simulation of a 30-GHz gyrotron resonator with an explicit high-order discontinuous-Galerkin-based parallel article-in-cell method // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2012. Vol. 40, no. 7. P. 1860–1870. DOI: 10.1109/TPS.2012.2195509.
28. *Lin M. C., Smithe D. N., Guss W. C., Temkin R. J.* Hot test of gyrotron cavity interaction using a 3D CFDTD PIC method // In: 15th IEEE International Vacuum Electronics Conference. 22-24 April 2014, Monterey, CA, USA: IEEE, 2014. P. 87–88. DOI: 10.1109/IVEC.2014.6857503.
29. *Розенталь Р. М., Тай Е. М., Тараканов В. П., Фокин А. П.* Использование 2,5-мерного PIC-кода для моделирования гиротронов с несимметричными рабочими модами // *Известия вузов. Радиофизика*. 2022. Т. 65, № 5. С. 420–433. DOI: 10.52452/00213462\_2022\_65\_05\_420.
30. *Fliiflet A. W., Read M. E.* Use of weakly irregular waveguide theory to calculate eigenfrequencies, Q values, and RF field functions for gyrotron oscillators // *International Journal of Electronics Theoretical and Experimental*. 1981. Vol. 51, no. 4. P. 475–484. DOI: 10.1080/00207218108901350.
31. *Borie E., Dumbrajs O.* Calculation of eigenmodes of tapered gyrotron resonators // *International Journal of Electronics*. 1986. Vol. 60, no. 2. P. 143–154. DOI: 10.1080/00207218608920768
32. *Sabchevski S., Idehara T., Saito T., Ogawa I., Mitsudo S., Tatematsu Y.* Physical models and computer codes of the GYROSIM (GYROtron SIMulation) software package // *FIR Center Report FIR FU-99*. 2010. Available from: [http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR\\_FU99S.pdf](http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR_FU99S.pdf).
33. *Avramides K. A., Pagonakis I. G., Iatrou C. T., Vomvouridis J. L.* EURIDICE: A code-package for gyrotron interaction simulations and cavity design // *EPJ Web of Conferences*. 2012. Vol. 32. P. 04016. DOI: 10.1051/epjconf/20123204016.
34. *Мельникова М. М., Рожнев А. Г.* Программа расчета электродинамических параметров собственных мод в гиротроне с нефиксированной структурой поля // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015615762 от 22 мая 2015 г.
35. *Bera A., Sinha A. K.* A novel approach for computation of high-order axial modes in a gyrotron resonator // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2018. Vol. 65, no. 12. P. 5505–5510. DOI: 10.1109/TED.2018.2877843.
36. *Sawant A., Choi E.* Development of the full package of gyrotron simulation code // *Journal of the Korean Physical Society*. 2018. Vol. 73, no. 11. P. 1750–1759. DOI: 10.3938/jkps.73.1750.
37. *Wang P., Chen X., Xiao H., Dumbrajs O., Qi X., Li L.* GYROCOMPU: Toolbox designed for the analysis of gyrotron resonators // *IEEE Transactions on Plasma Science*. Vol. 48, no. 9. P. 3007–3016. DOI: 10.1109/TPS.2020.3013299.
38. *Semenov E., Zapevalov V., Zuev, A.* Methods for simulation the nonlinear dynamics of gyrotrons / In: Balandin D., Barkalov K., Gergel V., Meyerov I. (eds). *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2020. Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1413. Springer. 2021. P. 49–62. DOI: 10.1007/978-3-030-78759-2\_4.
39. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 475 с.
40. *Власов С. Н., Жислин Г. М., Орлова И. М., Петелин М. И., Рогачева Г. Г.* Открытые резонаторы в виде волноводов переменного сечения // *Известия вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 8. С. 1236–1244.
41. *Власов С. Н., Орлова И. М., Петелин М. И.* Резонаторы гиротронов и электродинамическая селекция мод / В сб. *Гиротрон* (под. ред. А.В. Гапонова-Грехова). Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 62–76.
42. *Chu K. R., Kou C. S., Chen J. M., Tsai Y. C., Cheng C., Bor S. S., Chang L. H.* Spectral domain analysis of open cavities // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 1992. Vol. 13, no. 10. P. 1571–1598. DOI: 10.1007/BF01009236.

43. *Hung C. L., Tsai Y. C., Chu K. R.* A study of open-end cavities by the field-energy method // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1998. Vol. 26, no. 3, P. 931–939. DOI: 10.1109/27.700874.
44. *Hung C. L., Yeh Y. S.* Spectral domain analysis of coaxial cavities // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2003. Vol. 24, no. 12. P. 2025–2041. DOI: 10.1023/B:IJIM.0000009758.76835.1f.
45. *Sabchevski S. P., Idehara T.* A numerical study on finite-bandwidth resonances of high-order axial modes (HOAM) in a gyrotron cavity // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2015. Vol. 36, no. 7. P. 628–653. DOI: 10.1007/s10762-015-0161-9.
46. *Genoud J., Tran T. M., Alberti S., Braunmueller F., Hogge J.-Ph., Tran M. Q., Guss W. C., Temkin R. J.* Novel linear analysis for a gyrotron oscillator based on a spectral approach // *Physics of Plasmas*. 2016. Vol. 2, no. 4. P. 043101. DOI: doi.org/10.1063/1.4945611.
47. *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: МГУ, 1983. 232 с.
48. *Genoud J., Alberti S., Tran T. M., Le Bars G., Kaminski P., Hogge J. P., Avramidis K. A., Tran M. Q.* Parasitic oscillations in smooth-wall circular symmetric gyrotron beam ducts // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2019. Vol. 40, no. 2. P. 131–149. DOI: 10.1063/1.4945611.
49. *Chu K. R., Chen H. Y., Hung C. L., Chang T. H., Barnett L. R., Chen S. H., Yang T. T., Dialeitis D. J.* Theory and experiment of ultrahigh-gain gyrotron traveling wave amplifier // *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1999. Vol. 27, no. 2. P. 391–404. DOI: 10.1109/27.772266.
50. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М: Мир, 1983. 384 с.
51. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 430 с.
52. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
53. *Lehoucq R. B., Sorensen D. C., Yang C.* ARPACK users' guide: solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods // *Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1997.
54. *Петелин М. И., Юлпатов В. К.* Линейная теория МЦР-монотрона. I. // *Известия Вузов. Радиофизика*. 1975. Т. 18, № 2. С. 290–299.
55. *Петелин М. И.* Самовозбуждение колебаний в гиротроне // В кн. *Гиротрон: Сб. научн. трудов.* (под ред. А.В. Гапонова-Грехова). Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 5–25.
56. *Borie E., Jödicke B.* Comments on the Linear Theory of the Gyrotron // *IEEE Transaction on Plasma Science*. 1988. V. 16, no. 2. P. 116–121. DOI: 10.1109/27.3802.
57. *Рожнев А.Г., Адилова А.Б., Григорьева Н.В., Рыскин Н.М.* Программа расчета свойств продольных мод колебаний в открытом резонаторе гиротрона методом конечных разностей с линейаризованными по спектральному параметру граничными условиями («GyrotronCavityFDM») // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2033613828 от 09 марта 2023 г.
58. *Yamaguchi Y., Tatematsu Y., Saito T., Kuwahara T., Ikeda R., Ogawa I., Idehara T., Dumbrajs O.* Experimental verification of a self-consistent calculation for continuous frequency-tune with a 400 GHz band second harmonic gyro-BWO // In: *38th Int. Conf. on Infr., Mill. and Terahertz Waves (IRMMW-THz)*. 01-06 September 2013, Mainz, Germany. New York: IEEE, 2013. P. 1–2. DOI: 10.1109/IRMMW-THz.2013.6665445.
59. *Kumar A., Kumar N., Singh U., Khatun H., Vyas V., Sinha A. K.* Design of interaction cavity of a 170-GHz, 1-MW gyrotron for ECRH application // *Vacuum*. 2011. Vol. 86, no. 2. P. 184–188. DOI: 10.1016/j.vacuum.2011.06.002.
60. *Thumm M.* Effective cavity length of gyrotrons // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. Vol. 35. no. 12. P. 1011–1017. DOI: doi.org/10.1007/s10762-014-0102-z.

61. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

## References

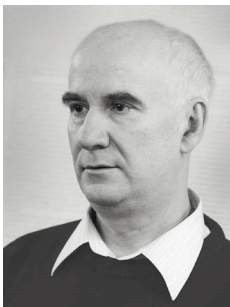
1. Flyagin VA, Gaponov AV, Petelin MI, Yulpatov VK. The gyrotron. IEEE Transactions on microwave theory and techniques. 1977;25(6):514–521. DOI: 10.1109/TMTT.1977.1129149.
2. Nusinovich GS. Introduction to the Physics of Gyrotron. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press; 2004. 335 p.
3. Kartikeyan MV, Borie E, Thumm M. Gyrotrons: High-Power Microwave and Millimeter Wave Technology. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag; 2003. 228 p.
4. Thumm M. Progress on gyrotrons for ITER and future thermonuclear fusion reactors. IEEE transactions on plasma science. 2011;39(4):971–979. DOI: 10.1109/TPS.2010.2095042.
5. Glyavin MY, Idehara T, Sabchevski SP. Development of THz gyrotrons at IAP RAS and FIR UF and their applications in physical research and high-power THz technologies. IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology. 2015;5(5):788–797. DOI: 10.1109/TTHZ.2015.2442836.
6. Hornstein MK, Bajaj VS, Griffin RG, Kreisler KE, Mastovsky I, Sirigiri JR, Shapiro MA, Temkin RJ. Second harmonic operation at 460 GHz and broadband continuous frequency tuning of a gyrotron oscillator. IEEE Transactions on Electron Devices. 2005;52(5):798–807. DOI: 10.1109/TED.2005.845818.
7. Chang TH, Idehara T, Ogawa I, Agusu L, Kobayashi S. Frequency tunable gyrotron using backward-wave components. Journal of Applied Physics. 2009;105(6):063304. DOI: 10.1063/1.3097334.
8. Torrezan AC, Han ST, Mastovsky I, Shapiro MA, Sirigiri JR, Temkin RJ, Barnes AB, Griffin RG. Continuous-wave operation of a frequency-tunable 460-GHz second-harmonic gyrotron for enhanced nuclear magnetic resonance. IEEE Transactions on Plasma Science. 2010;8(6):1150–1159. DOI: 10.1109/TPS.2010.2046617.
9. Torrezan AC, Shapiro AC, Sirigiri JR, Temkin RJ, Griffin RG. Operation of a continuously frequency-tunable second-harmonic CW 330-GHz gyrotron for dynamic nuclear polarization. IEEE Transaction on Electron Devices. 2011;58(8):2777–2783. DOI: 10.1109/TED.2011.2148721.
10. Glyavin MYu, Denisov GG, Zapevalov VE, Koshelev MA, Tretyakov MYu, Tsvetkov AI. High power terahertz sources for spectroscopy and material diagnostics. Physics-Uspekhi. 2016; 59(6):595–677. DOI: 10.3367/ufne.2016.02.037801.
11. Sabchevski S, Glyavin M. Development and application of THz gyrotrons for advanced spectroscopic methods. Photonics. 2023;12(2):189–207. DOI: 10.3390/photonics10020189.
12. Siegel PH. Terahertz technology in biology and medicine. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2004;52(10):2438–2447. DOI: 10.1109/TMTT.2004.835916.
13. Pilosof M, Einat M. Note: A 95 GHz mid-power gyrotron for medical applications measurements. Review of Scientific Instruments. 2015;86(1):016113. DOI: 10.1063/1.4906507.
14. Cheon H, Yang HJ, Lee SH, Kim YA, Son JH. Terahertz molecular resonance of cancer DNA // Scientific Reports. 2016;6(1):37103. DOI: 10.1038/srep37103.
15. Miyoshi N, Idehara T, Khutoryan E, Fukunaga Y, Bibin AB, Ito S, Sabchevski SP. Combined hyperthermia and photodynamic therapy using a sub-THz gyrotron as a radiation source. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2016;37(8):805–814. DOI: 10.1007/s10762-016-0271-z.
16. Bykov Y, Ereemeev A, Glyavin M, Kholoptsev V, Luchinin A, Plotnikov G, Denisov A, Bogdashev G, Kalynova V, Semenov N, Zharova N. 24-84-GHz gyrotron systems for technological microwave applications. IEEE Transactions on Plasma Science. 2004;32(1):67–72. DOI: 10.1109/TPS.2004.823904.

17. Bratman VL, Bogdashov AA, Denisov GG, Glyavin MYu, Kalynov YuK, Luchinin AG, Manuilov VN, Zapevalov VE, Zavolsky NA, Zorin VG. Gyrotron development for high power THz technologies at IAP RAS. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012;33(7): 715–723. DOI: 10.1007/s10762-012-9898-6.
18. Aripin H, Mitsudo S, Prima ES, Sudiana IN, Tani S, Sako K, Fujii Y, Saito T, Idehara T, Sano S, Purwasasmita BS, Sabchevski S. Structural and microwave properties of silica xerogel glass-ceramic sintered by sub-millimeter wave heating using a gyrotron. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2012;33(12):1149–1162. DOI: 10.1007/s10762-012-9925-7.
19. Glyavin M, Sabchevski S, Idehara T, Mitsudo S. Gyrotron-based technological systems for material processing – current status and prospects. *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2020;41(8):1022–1037. DOI: 10.1007/s10762-020-00727-w.
20. Federici J, Moeller L. Review of terahertz and subterahertz wireless communications. *Journal of Applied Physics*. 2010;107(11):111101. DOI: 10.1063/1.3386413.
21. Idehara T, Mitsudo S, Ogawa I. Development of high-frequency, highly stable gyrotrons as millimeter to submillimeter wave radiation sources. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2004;32(3):910–916. DOI: 10.1109/TPS.2004.827599.
22. Idehara T, Tsuchiya H, Watanabe O, Agusu L, Mitsudo S. The first experiment of a THz gyrotron with a pulse magnet. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. 2006;27(3):319–331. DOI: 10.1007/S10762-006-9084-9.
23. Glyavin MYu, Luchinin AG, Golubiatnikov GYu. Generation of 1.5-kW, 1-THz Coherent Radiation from a Gyrotron with a Pulsed Magnetic Field. *Phys. Rev. Lett.* 2008;100:015101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.015101.
24. Bratman VL, Kalynov YuK, Manuilov VN. Large-orbit gyrotron operation in the terahertz frequency range. *Phys. Rev. Lett.* 2009;102:245101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.245101.
25. Bandurkin I, Fedotov A, Glyavin M, Idehara T, Malkin A, Manuilov V, Sergeev A, Tsvetkov A, Zaslavsky V, Zotova I. Development of third-harmonic 1.2-THz gyrotron with intentionally increased velocity spread of electrons. *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2020;67(10):4432–4436. DOI: 10.1109/TED.2020.3012524.
26. Botton M, Antonsen TM, Levush B, Nguyen KT, Vlasov AN. MAGY: A time-dependent code for simulation of slow and fast microwave sources. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 1998;26(3):882–892. DOI: 10.1109/27.700860.
27. Stock A, Neudorfer J, Riedlinger M, Pirrung G, Gassner G, Schneider R, Roller S, Munz CD. Three-dimensional numerical simulation of a 30-GHz gyrotron resonator with an explicit high-order discontinuous-Galerkin-based parallel article-in-cell method. *IEEE Transactions on Plasma Science*. 2012;40(7):1860–1870. DOI: 10.1109/TPS.2012.2195509.
28. Lin MC, Smithe DN, Guss WC, Temkin RJ. Hot test of gyrotron cavity interaction using a 3D CFDTD PIC method. 15th IEEE International Vacuum Electronics Conference. 2014. P. 87–88. IEEE. DOI: 10.1109/IVEC.2014.6857503.
29. Rozental RM, Tai EM, Tarakanov VP, Fokin AP. Using the 2.5-dimensional PIC code for simulating gyrotrons with nonsymmetric operating modes. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2023;65(5–6):384–396. DOI: 10.1007/s11141-023-10221-7.
30. Fliflet AW, Read ME. Use of weakly irregular waveguide theory to calculate eigenfrequencies, Q values, and RF field functions for gyrotron oscillators. *International Journal of Electronics Theoretical and Experimental*. 1981;51(4):475–484. DOI: 10.1080/00207218108901350.
31. Borie E, Dumbrajs O. Calculation of eigenmodes of tapered gyrotron resonators // *International Journal of Electronics*. 1986;60(2):143–154. DOI: 10.1080/00207218608920768.



32. Sabchevski S, Idehara T, Saito T, Ogawa I, Mitsudo S, Tatematsu Y. Physical models and computer codes of the GYROSIM (GYROtron SIMulation) software package [Electronic resource]. FIR Center Report FIR FU-99. 2010. Available from: [http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR\\_FU99S.pdf](http://fir.u-fukui.ac.jp/FIR_FU99S.pdf).
33. Avramides KA, Pagonakis IG, Iatrou CT, Vomvoridis JL. EURIDICE: A code-package for gyrotron interaction simulations and cavity design. EPJ Web of Conferences. 2012;32:04016. DOI: 10.1051/epjconf/20123204016.
34. Melnikova MM, Rozhnev AG. Program for calculation of the eigenmodes electrodynamic parameter in the gyrotron with nonfixed field structure // Certificate of state registration of a computer program no. 2015615762, 22 May. 2015. (in Russian).
35. Bera A, Sinha AK. A novel approach for computation of high-order axial modes in a gyrotron resonator. IEEE Transactions on Electron Devices. 2018;65(12):5505–5510. DOI: 10.1109/TED.2018.2877843.
36. Sawant A, Choi E. Development of the full package of gyrotron simulation code. Journal of the Korean Physical Society. 2018;73(11):1750–1759. DOI: 10.3938/jkps.73.1750.
37. Wang P, Chen X, Xiao H, Dumbrajs O, Qi X, Li L. GYROCOMPU: Toolbox designed for the analysis of gyrotron resonators. IEEE Transactions on Plasma Science. 2020;48(9):3007–3016. DOI: 10.1109/TPS.2020.3013299.
38. Semenov E, Zapevalov V, Zuev A. Methods for Simulation the nonlinear dynamics of gyrotrons. In: Balandin D, Barkalov K, Gergel V, Meyerov I. (eds). Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2020. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1413. Springer. 2021. P. 49–62. DOI: 10.1007/978-3-030-78759-2\_4.
39. Vainshtein LA. Open Resonators and Open Waveguides. Golem Press; 1969. 439 p.
40. Vlasov SN, Zhisllin GM, Orlova IM, Petelin MI, Rogacheva GG. Irregular waveguides as open resonators. Radiophysics and Quantum Electronics. 1969;12(8):972–978.
41. Vlasov CN, Orlova IM, Petelin MI. Gyrotron cavities and electrodynamic mode selection. In: Gaponov-Grekhov AV, editor. Gyrotron. Gorky, USSR: Inst. Appl. Phys. Acad. Sci. USSR; 1981:62–76 (in Russian).
42. Chu KR, Kou CS, Chen JM, Tsai YC, Cheng C, Bor SS, Chang LH. Spectral domain analysis of open cavities. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1992;13(10):1571–1598. DOI: 10.1007/BF01009236.
43. Hung CL, Tsai YC, Chu KR. A study of open-end cavities by the field-energy method. IEEE Transactions on Plasma Science. 1998;26(3):931–939 DOI: 10.1109/27.700874.
44. Hung CL, Yeh YS. Spectral domain analysis of coaxial cavities. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 2003;24(12):2025–2041. DOI: 10.1023/B:IJIM.0000009758.76835.1f.
45. Sabchevski SP, Idehara T. A numerical study on finite-bandwidth resonances of high-order axial modes (HOAM) in a gyrotron cavity. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2015;36(7):628–653. DOI: 10.1007/s10762-015-0161-9.
46. Genoud J, Tran TM, Alberti S, Braunmueller F, Hogge J-Ph, Tran MQ, Guss WC, Temkin RJ. Novel linear analysis for a gyrotron oscillator based on a spectral approach. Physics of Plasmas. 2016;2(4):043101. DOI: doi.org/10.1063/1.4945611.
47. Ilinskiĭ AS, Slepyan GYa. Oscillations and waves in a electrodynamic structures with losses. Moscow: Moscow State University; 1983. 232 p. (in Russian).
48. Genoud J, Alberti S, Tran TM, Le Bars G, Kaminski P, Hogge JP, Avramidis KA, Tran MQ. Parasitic oscillations in smooth-wall circular symmetric gyrotron beam ducts. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2019;40(2):131–149. DOI: 10.1063/1.4945611.
49. Chu KR, Chen HY, Hung CL, Chang TH, Barnett LR, Chen SH, Yang TT, Dialetis DJ. Theory

- and experiment of ultrahigh-gain gyrotron traveling wave amplifier. IEEE Transactions on Plasma Science. 1999;27(2):391–404. DOI: 10.1109/27.772266.
50. Parlett BN. The Symmetric Eigenvalue Problem. First ed. NJ, USA: Prentice-Hall, Englewood Cliffs; 1980. 368 p.
  51. Demmel JW. Applied Numerical Linear Algebra. Ca, USA: University of California; 1997. 419 p.
  52. Golub GH, Van Loan CF Matrix Computations. 3th ed. Baltimore & London: John Hopkins University Press; 1996. 694 p.
  53. Lehoucq RB, Sorensen DC, Yang C. ARPACK users' guide: solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1997.
  54. Petelin MI, Yulpatov VK. Linear theory of a monotron cyclotron-resonance maser. I. Radiophys Quantum Electron. 1975;18(2):212–219. DOI: doi.org/10.1007/BF01036881.
  55. Petelin MI. Self-excitation of oscillations in a gyrotron. In: Gaponov-Grekhov AV, editor. Collected papers. Gorki: Inst. Appl. Phys. USSR Academy of Science; 1981. P. 5–25.
  56. Borie E, Jodicke B. Comments on the Linear Theory of the Gyrotron. IEEE Transaction on Plasma Science. 1988;16(2):116–121. DOI: 10.1109/27.3802.
  57. Rozhnev AG, Adilova AB, Grigorieva NV, Ryskin NM. A program for calculating the properties of axial oscillation modes in an open gyrotron cavity by the finite difference method with boundary conditions linearized in the spectral parameter («GyrotronCavityFDM»). Certificate of state registration of a computer program № 2033613828, 09 May, 2023 (in Russian).
  58. Yamaguchi Y, Tatematsu Y, Saito T, Kuwahara T, Ikeda R, Ogawa I, Idehara T, Dumbrajs O. Experimental verification of a self-consistent calculation for continuous frequency-tune with a 400 GHz band second harmonic gyro-BWO. In: Proceedings of the 38th Int. Conf. on Infr., Mill. and Terahertz Waves (IRMMW-THz). 01-06 September 2013, Mainz, Germany. New York: IEEE; 2013. P. 1–2. DOI: 10.1109/IRMMW-THz.2013.6665445.
  59. Kumar A, Kumar N, Singh U, Khatun H, Vyas V, Sinha AK. Design of interaction cavity of a 170-GHz, 1-MW gyrotron for ECRH application. Vacuum. 2011;86(2):184–188. DOI: 10.1016/j.vacuum.2011.06.002.
  60. Thumm M. Effective cavity length of gyrotrons. Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. 2014;35(12):1011–1017. DOI: doi.org/10.1007/s10762-014-0102-z.
  61. Hairer E, Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised ed. Berlin: Springer-Verlag; 1996. 614 p.



*Рожнев Андрей Георгиевич* — родился в Саратове (1959). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика» (1981). С 1981 года работал в НИИ механики и физики СГУ, затем в НИИ естественных наук СГУ. С 2002 преподаёт на кафедре нелинейной физики СГУ в должности доцента. С 2017 года работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН в должности старшего научного сотрудника. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2017, СГУ). Научные интересы — вакуумная электроника СВЧ, вакуумная микроэлектроника, нелинейная теория колебаний и волн, вычислительная электродинамика, фотоника, метаматериалы. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
 им. В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: RozhnevAG@gmail.com  
 ORCID: 0000-0003-4687-1357  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29273

*Рожнев А. Г., Мельникова М. М., Рыскин Н. М.*  
 Известия вузов. ПНД, 2024, т. 32, № 3

*Мельникова Мария Михайловна* — родилась в 1991 году. Окончила факультет нелинейных процессов (2013), аспирантуру СГУ имени Н. Г. Чернышевского (2018). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2018, СГУ) по направлению «Радиофизика». Работает научным сотрудником лаборатории мощных СВЧ систем для ускорительных приложений, ИПФ РАН (Нижний Новгород), а также является научным сотрудником СФ ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов связана с исследованием явлений стабилизации и перестройки частоты в гиротронах, конкуренции мод, численным моделированием процессов генерации в гиротроне. Автор более 60 научных трудов, в том числе более 30 статей в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science.



Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46  
Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН  
Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: Mafachu@mail.ru  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1053565

*Рыскин Никита Михайлович* — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.



Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: ryskinm@info.sgu.ru  
ORCID: 0000-0001-8501-6658  
AuthorID (eLibrary.Ru): 29838