Изв.вузов «ПНД», т.8, № 2, 2000

УДК 519.6:517.929

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ФРОБЕНИУСА – ПЕРРОНА ДЛЯ СДВИГОВ БЕРНУЛЛИ

А.Ф. Голубенцев, В.М. Аникин, С.С. Аркадакский

Проводится разложение решений уравнения Фробениуса – Перрона для сдвигов Бернулли и связанных с ними обратимыми дифференцируемыми преобразованиями хаотических отображений в ряд по собственным функциям одноименного оператора, и на этой основе анализируется процесс эволюции вероятностных распределений. Отмечена роль показателя Ляпунова как меры скорости сходимости решений к инвариантному распределению. Даны примеры элементов нуль–пространства оператора Фробениуса – Перрона.

Введение

Преобразования, определяющие представление числа в G–ичной системе (сдвиги Бернулли)

$$x_{n+1} = Gx_n \bmod 1, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

где $G \geq 2$ – целая константа, являются важным объектом эргодической теории и ее приложений [1]. В частности, на основе (1) строятся мультипликативные датчики псевдослучайных чисел Д. Лемера [2][1]. Посредством нелинейных дифференцируемых обратимых замен переменных вида

$$x^* = h(x), \quad x = h^{-1}(x^*), \quad x \in (0,1), \quad x^* \in (h(0), \quad h(1)) \tag{2}$$

разностное уравнение (1) переводится в топологически эквивалентные (сопряженные) отображения

$$x^*_{n+1} = h(Gh^{-1}(x^*_n) \bmod 1), \tag{3}$$

характеризуемые непрерывной инвариантной плотностью

$$\rho^*(x^*) = |dh^{-1}(x^*)/dx^*|. \tag{4}$$

Таким образом, отображение (1) может рассматриваться как базисное для построения хаотических генераторов с вероятностными законами, отличными от равномерного распределения и заданными на разнообразных интервалах числовой

[1] А. Реньи [3] изучал случай нецелых G в контексте рассмотрения f–представлений действительных чисел.

оси (см., например, [4]). С.Улам относил построение и исследование сопряженных отображений к числу значимых математических задач [5][2].

Ниже рассматриваются некоторые полезные в практических применениях особенности операторов и уравнений Фробениуса – Перрона, описывающих эволюцию вероятностных распределений под действием отображений (1) и (3).

1. Собственные функции и собственные числа оператора Фробениуса – Перрона

Оператор Фробениуса – Перрона определяют из интегральных уравнений, выражающих сохранение при преобразованиях (1) и (3) меры Лебега (меры, непрерывной относительно нее) [7], или эквивалентных функциональных уравнений (см., например, [8]). Для сопряженных отображений оператор Фробениуса – Перрона P^* можно также записать, исходя из вида этого оператора для базисного отображения [7]

$$P^* = P_{h^{-1}} P P_h, \tag{5}$$

где введены операторы

$$P_h\varphi^* = \varphi^*(h(x))/\rho^*(h(x)), \qquad \varphi^* \in L^1(h(0),h(1)),$$

$$P_{h^{-1}}\varphi = \varphi(h^{-1}(x^*))\rho^*(h^{-1}(x^*)), \qquad \varphi \in L^1(0,1).$$

Для сдвига Бернулли (1) оператор Фробениуса – Перрона имеет вид [7]

$$P\varphi(x) = (1/G)\sum_{p=0}^{G-1} \varphi((p+x)/G), \tag{6}$$

а для сопряженного отображения (3) он согласно (5) записывается в виде

$$P^*\varphi^*(x^*) = (\rho^*(x^*)/G)\sum_{p=0}^{G-1} \varphi^*(h((p+h^{-1}(x^*))/G))/\rho^*(h((p+h^{-1}(x^*))/G)). \tag{7}$$

Если $P1=1$, то $P^*\rho^*(x^*)=\rho^*(x^*)$.

Решение спектральной задачи (собственные функции $\Psi_k(x)$ и собственные числа Λ_k) для оператора (6) известно [9]

$$\Psi_k(x) = B_k(x), \quad \Lambda_k = 1/G^k, \quad k = 0,1,2\ldots, \tag{8}$$

где $B_k(x)$ – полином Бернулли степени k. Результат (8) в работе [9] получен на основе соотнесения вида оператора (6) с теоремой умножения для полиномов Бернулли [10].

Продемонстрируем прием решения спектральной задачи, который основан на определении результата действия оператора Фробениуса – Перрона на функцию, являющуюся *производящей* для собственных функций эволюционного оператора. В рассматриваемом случае такой функцией является производящая функция для полиномов Бернулли

$$\mathrm{B}(x,t) = te^{xt}/(e^t-1) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)t^n/n!, \quad |t| < 2\pi. \tag{9}$$

Итак, действуя (по переменной x) оператором (6) на функцию (9), получим

---

[2] Наряду со сдвигами Бернулли при построении сопряженных отображений весьма эффективно использование в качестве базисных и таких кусочно-линейных отображений, как, например, пирамидальное и аддитивное [2]. Достаточно вспомнить, что знаменитое отображение Улама – фон Неймана $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$, $x_n\in(0,1)$ топологически эквивалентно кусочно-линейному пирамидальному отображению. Сопряженные разностные схемы, генерирующие хаос, используются при моделировании в различных областях естествознания (см., например, [6]).

$$PB(x,t) = t/(e^t-1)\, \Sigma_{p=0}^{G-1} \exp((p+x)t/G) = (t/G)\exp(xt/G)/[\exp(t/G)-1] =$$
$$= B(x,t/G) \equiv \Sigma_{n=0}^{\infty}(B_n(x)/G^n)t^n/n!. \quad (10)$$

Отсюда непосредственно и следует решение (8) спектральной задачи для оператора Фробениуса – Перрона сдвигов Бернулли[3].

Производящая функция для собственных функций сопряженного отображения

$$B^*(x^*,t) = \rho^*(x^*)B(h^{-1}(x^*),t)$$

дает, естественно, решение спектральной задачи в форме

$$\Psi^*_k(x^*) = \rho^*(x^*)B_k(h^{-1}(x^*)), \quad \Lambda_k = 1/G^k \quad (11)$$

(собственные числа Λ_k при обратимых преобразованиях являются инвариантами). Значения собственных чисел определяются величиной G в базисном отображении (6). Отображения с различными значениями G обладают одним и тем же набором собственных функций. Собственное значение $\Lambda_0=1$ отвечает инвариантной плотности.

2. Разложение решений уравнения Фробениуса – Перрона в ряды по собственным функциям. Анализ сходимости к инвариантной плотности

Предположим, что на аттракторе отображения (1) задано некоторое начальное вероятностное распределение $\rho_0(x)$, отличное от инвариантного. Сопряженному отображению (3) будет соответствовать начальное распределение $\rho^*_0(x^*)=\rho_0(h^{-1}(x^*))\rho^*(x^*)$. Проанализируем эволюцию «нестационарных» (то есть отвечающих n–й итерации) плотностей

$$\rho_n(x) = P^n\rho_0(x), \quad x \in (0,1),$$

$$\rho^*_n(x^*) = P^{*n}\rho^*_0(x^*), \quad x^* \in (h(0),h(1)),$$

происходящую под действием соответственно операторов (6) и (7). На самом деле можно ограничиться рассмотрением эволюции нестационарных плотностей к инвариантному распределению лишь для *базисного* распределения в силу следующего из (5) равенства норм интегрируемых функций

$$\|P^{*n}\rho^*_0(x^*) - \rho^*(x^*)\|_{L^1(h(0),h(1))} = \|P^n\rho_0(x) - 1\|_{L^1(0,1)}.$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n\rho_0(x) - 1\| = 0,$$

так как операторы (6) и (7) обеспечивают сходимость к инвариантным распределениям для *любой* начальной плотности $\rho_0(x)\in L^1(0,1)$ [7]. Однако ответ на вопрос о *скорости* такой сходимости не всегда является очевидным. Чтобы до какой–то степени осветить его, мы рассмотрим эволюцию начального распределения, представленного в виде ряда по собственным функциям оператора Фробениуса – Перрона. Коэффициенты такого разложения следует искать с учетом того факта, что полиномы Бернулли не образуют ортогональной системы функций. Тем не

---

[3] Авторами найдены производящие функции для собственных функций оператора Перрона – Фробениуса, отвечающего различным обобщениям пирамидального отображения («пилы» с произвольным числом «зубьев»), и на этой основе определены решения соответствующих спектральных задач. Пример с отображением Бернулли здесь рассматривается как методический и тестовый.

менее, такое разложение для вполне определенного класса начальных распределений возможно. Оно базируется на формуле суммирования Эйлера – Маклорена [11] и требует знания значений производных разлагаемой функции в граничных точках 0 и 1

$$\rho_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k B_k(x), \tag{12}$$

где $C_k=[\rho_0^{(k-1)}(1)-\rho_0^{(k-1)}(0)]/k!$. Применяя преобразования координат (и, соответственно, плотностей), получим разложение начальной плотности для сопряженного отображения

$$\rho^*_0(x^*) = \rho^*(x^*) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Psi^*_k(x^*)/k!. \tag{13}$$

Таким образом, посредством (12)–(13) начальная плотность распределения представляется в виде суммы инвариантного распределения и некоторого его «возмущения»[4].

Для сходимости рядов (12) – (13) необходимо и достаточно [11], чтобы разлагаемая функция являлась целой порядка 1 и типа, меньшего чем 2π[5]. Поэтому при использовании (12) – (13) начальные распределения необходимо задавать в виде, скажем, полиномиальных аппроксимаций (при этом на скорость сходимости будут, очевидно, влиять *величины коэффициентов* полинома) или в форме целых функций, включающих, в частности, дифференцируемые элементы нуль–пространства линейного оператора эволюции (если, конечно, они известны!).

Рассмотрим результат n–кратного действия оператора (6) на разложение (12)

$$\rho_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k B_k(x)/G^{kn}. \tag{14}$$

Аналогично представляется нестационарная плотность для сопряженного отображения при действии на (13) оператора (7)

$$\rho^*_n(x^*) = \rho^*(x^*) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Psi^*_k(x^*)/G^{kn}. \tag{15}$$

Соотношения (14) – (15) иллюстрируют эффект, достигаемый повторением действия оператора Фробениуса – Перрона на нестационарную плотность, – подавление (за счет увеличивающихся степеней числа $G\geq 2$, стоящего в знаменателе) в разложениях по собственным функциям всех членов в суммах, начиная с $k\geq 1$. «Интенсивность» такого подавления возрастает с номером k «моды» – собственной функции. В асимптотике уменьшение вклада отдельных слагаемых в представлении плотностей обусловливает сходимость решения к инвариантному распределению, хотя динамика этого процесса, определяемая также и характером начального распределения, в конкретных случаях может быть и непростой.

Поскольку показатель Ляпунова для сдвигов Бернулли и сопряженных им отображений суть $\lambda=\ln G$, собственные числа оператора Фробениуса – Перрона

---

[4] И.Р. Пригожин и его соавторы (см. библиографию в работе [9]) интерпретируют коэффициенты C_k как функционалы, определенные в оснащенном гильбертовом пространстве. В самом деле, продолжая преобразования, для этих коэффициентов можно получить представление

$$C_k = (b_k, \rho_0) = \int_0^1 b_k(x)\rho_0(x)dx,$$

где введена обобщенная функция $b_k(x)=(-1)^k\Theta_{0,1}^{(k)}(x)/k!$, $k=0,1,2,\ldots$ ($\Theta_{0,1}(x)$ – характеристическая функция отрезка [0,1]). Соответственно разложения (12) и (13) интерпретируются как разложения по биортогональной системе функций B_k и b_k.

[5] Данный класс целых функций находит важные прикладные применения при построении математических моделей явлений и процессов в радиофизике, оптике, теории связи, теории управления динамическими системами, в частности, при рассмотрении функций с финитным спектром, для которых сформулирована знаменитая теорема В.А. Котельникова [12].

могут быть выражены через этот показатель: $\Lambda_k=e^{-k\lambda}$. И тогда выражения (14) – (15) иллюстрируют такое качество ляпуновского показателя (в дополнение к «привычной» его роли характеристики функции чувствительности итераций) как своего рода меры скорости установления инвариантного распределения: чем больше показатель Ляпунова, тем быстрее происходит установление инвариантного распределения.

3. Элементы нуль–пространства оператора Фробениуса – Перрона

Пусть начальное распределение задано в форме

$$\rho_0(x) = 1 + f_0(x). \tag{16}$$

В этом разделе мы рассмотрим такие «возмущения» начальной плотности $f_0(x)$, которые в отличие от вышерассмотренной ситуации принадлежат к нуль–пространству оператора Фробениуса – Перрона (6). В этом случае действие (6) означает перевод f_0 в нуль: $Pf_0=0$. Очевидно, что условие нормировки вероятностной плотности требует обращения в нуль интеграла от f_0 на промежутке (0,1), или равенства значений соответствующей первообразной на границах единичного интервала. Для $G=2$ элемент нуль–пространства определяется функциональным уравнением

$$f_0(1/2 + x/2) = -f_0(x/2). \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что решением (17) является целая функция

$$f_0(x) = \pm\cos 2p\pi x, \quad x \in (0,1), \quad p = 1,3,5\ldots, \tag{18}$$

которая входит, в частности, в определения:

- кардиоидного распределения [13]

$\rho_0(x) = 1 + 2r\cos 2\pi(x-x_0)$, где r ($|r|<1/2$) и x_0 ($|x_0|<\infty$) – параметры распределения;

- намотанного распределения Коши [14]

$$\rho_0(x,r) = 1 + 2\sum_{p=1}^{\infty} r^p \cos 2p\pi x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le r \le 1;$$

- кусочно–линейной функции

$$f_0(x) = 4x\Theta_{0,1/2}(x) + 4(1-x)\Theta_{1/2,1}(x) = (2/\pi)\arccos(\cos 2\pi x).$$

Все эти распределения под действием оператора Фробениуса – Перрона «эволюционируют» к равномерному закону за один шаг.

Заключение

На примере со сдвигами Бернулли (и сопряженных к ним отображений) показано, что с оператором Фробениуса – Перрона хаотического отображения может быть соотнесена специально построенная функция двух переменных, преобразование которой эквивалентно решению спектральной задачи для этого оператора. Указывается на возможность построения подобных производящих функций для других базовых эндоморфизмов.

Представление начального распределения в виде суммы инвариантной плотности и некоторого ее «возмущения» (в частности, при разложении начального распределения в ряд по собственным функциям оператора Фробениуса – Перрона) позволяет наглядно проанализировать процесс установления инвариантного распределения в результате действия эволюционного оператора (в частности, большие значения показателя Ляпунова отвечают и большей скорости сходимости).

Полиномы не входят в число элементов нуль–пространства эволюционного оператора для сдвигов Бернулли. Таковым является целая функция вида (18).

Авторы признательны С.В. Ершову за обсуждение работы и стимулирующие замечания.

Работа поддержана грантом ФЦП «Интеграция» (проект № А0057/1999).

Библиографический список

1. *Орнстейн Д.* Эргодическая теория, случайность и эргодические системы. М.: Мир, 1978.
2. *Гренандер У., Фрайбергер В.* Краткий курс вычислительной вероятности и статистики. М.: Наука, 1978.
3. *Renyi A.* Representations for the real numbers and their ergodic properties // Acta Mathematica (Acad. Sc. Hung.). 1957. Vol. 8. P. 477.
4. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* The explicit solutions of the Frobenius – Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. Vol. 8, № 5. P. 1049.
5. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
6. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М., Богомолов А.В.* Хаотические генераторы биологических ритмов // Биомедицинская радиоэлектроника. 2000. № 2.
7. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
8. *Ершов С.В., Малинецкий Г.Г.* О решении обратной задачи для уравнения Фробениуса – Перрона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28, № 10. С. 1491.
9. *Antoniou I., Tasaki S.* Spectral decomposition of the Renyi map // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. Vol. 26. P. 73.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.
11. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд–во иностранной литературы, 1951.
12. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
13. *Jeffreys H.* Theory of probability. Oxford University Press, 1948. 2nd ed.
14. *Winter A.* On the shape of the angular case of Cauchy's distribution curves // Ann. Math. Statist. 1947. Vol. 18. P. 589.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 7.09.99
после переработки 6.04.2000

ON SOME PROPERTIES OF THE FROBENIUS – PERRON OPERATOR FOR THE BERNOULLI SHIFTS

A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin, S.S. Arkadaksky

The expansion of solutions of Frobenius – Perron equations of the Bernoulli shifts and conjugate maps in terms of the eigenfunctions of the same name operators are presented. The convergence of nonstationary solutions to the invariant density is discussed. It is marked that the Lyapunov exponent may be considered as a measure of the speed of convergence. The entire function as an element of Frobenius – Perron operator kernel is found.

На фото (слева направо): С.С. Аркадакский, А.Ф. Голубенцев, В.М. Аникин

Аркадакский Сергей Сергеевич – родился в Саратове (1949). Окончил Саратовский университет (1971). После окончания СГУ работал в научно – исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1994 года – на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико-математических наук. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов.

Голубенцев Александр Федорович – родился в Смоленске (1933). Окончил Саратовский университет (1956). С 1959 года работает в СГУ. Доктор физико-математических наук, профессор. С 1988 года – заведующий кафедрой вычислительной физики и автоматизации научных исследований. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Автор монографий «Шумы и флуктуации в электронных потоках», «Введение в статистическую электронику», «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», «Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Член диссертационных советов СГУ и СГТУ.

Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил Саратовский университет (1970). После окончания СГУ работал в научно-исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1984 года – на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Соавтор монографий «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Ученый секретарь докторского диссертационного совета СГУ по специальностям радиофизика, оптика, физика полупроводников и диэлектриков.