



К ДИНАМИКЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ХЕНОНА

Ж.Т. Жусубалиев, В.Н. Рудаков, Е.А. Сухотерин

Численно и аналитически изучается разбиение плоскости параметров двумерного отображения Хенона на области режимов периодических и хаотических колебаний. Анализируются закономерности возникновения различных движений и бифуркационные переходы. Показывается, что в плоскости параметров существуют области, где имеет место неединственность движений, вследствие чего при вариации параметров возможна резкая смена характера динамики, проявляющаяся во внезапном переходе от одних устойчивых циклов к другим либо в катастрофической хаотизации колебаний.

Введение

Отображение Хенона – двумерное отображение, имеющее вид

$$\begin{aligned} X_k &= F(X_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad X = (x_1, x_2)', \quad F = (f_1, f_2)', \\ f_1 &= 1 - \alpha x_1^2 + x_2, \\ f_2 &= \beta x_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь α – коэффициент нелинейности, β – коэффициент диссипации ($|\beta| < 1$). Знак «штрих» означает операцию транспонирования.

Отображение (1) было введено М. Хеноном [1] в качестве отображения Пуанкаре для трехмерной дифференциальной системы. С тех пор оно интенсивно изучалось с различными целями многими авторами как численно, так и теоретически (см., например, [2–11]).

Разнообразие различных движений, порождаемых двумерным отображением Хенона [1,2], в зависимости от параметров является типичным для широкого класса динамических систем [3–17]. Например, в [6] и других работах показано, что отображение (1) хорошо демонстрирует типичные бифуркации и сценарии перехода к хаосу в трехмерной модели радиofизического генератора с инерционной нелинейностью. Подобная «эквивалентность» была обнаружена нами при рассмотрении моделей определенного класса систем автоматического управления, например, двух- и трехмерных моделей систем с широтно-импульсной модуляцией и четырехмерной модели релейной системы с гистерезисом [12–15]. Таким образом, значение отображения Хенона для многих приложений динамического хаоса и в изучении сложных нелинейных явлений в самых различных физических системах и их математических моделях является существенным.

Данная работа является обобщением результатов, представленных в [11].

Особый упор делается на детализации структуры и свойств разбиения плоскости управляющих параметров динамической системы (1) на области существования периодических движений и хаоса.

1. Разбиение плоскости параметров отображения Хенона на области различных режимов колебаний

Начнем с нескольких предварительных замечаний.

Пусть $X_{c_i}, i=\overline{1, m}$ – периодическое движение (m -цикл) динамической системы (1). Очевидно, что все $X_{c_i}, i=\overline{1, m}$ удовлетворяют уравнению

$$X_c - F^{(m)}(X_c) = 0, \quad F^{(m)} = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{m \text{ раз}}. \quad (2)$$

Локальная устойчивость m -цикла определяется условием

$$|\rho_k| < 1, \quad k = 1, 2,$$

где ρ_1, ρ_2 – собственные значения (мультипликаторы) основной матрицы Φ_m , являющиеся корнями уравнения

$$\det(\Phi_m - \rho E) = 0,$$

$$\Phi_i = \partial/\partial X_{c(i-1)}[F(X_{c(i-1)})]\Phi_{i-1}, \quad \Phi_0 = E, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\partial/\partial X_{c(i-1)}[F(X_{c(i-1)})] = \begin{vmatrix} -2\alpha x_{1c(i-1)} & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь E – единичная матрица.

Пусть $P=(\alpha, \beta)$ – множество параметров динамической системы (1); $P=(\alpha, \beta)$ – фиксированный набор значений параметров α и β (точка в этой плоскости $P=(\alpha, \beta) \in \Pi$); $X_{c_i}(P), i=\overline{1, m}$ – локально устойчивый m -цикл, соответствующий точке P .

Пусть $\Pi_{k,j}$ – односвязные множества параметров $\Pi_{k,j} \subset \Pi, k \geq 1, j = \overline{1, 2, \dots, s}$ такие, что для любых $P \in \Pi_{k,j}$ существует устойчивый m -цикл $X_{c_i}(P), i=\overline{1, m}$, непрерывный по параметрам в $\Pi_{k,j}$. Если в точке P существует несколько устойчивых периодических m -циклов, то разным движениям соответствуют разные $\Pi_{k,j}$. Для $\Pi_{k,j}$ k -цикл является минимальным, то есть в $\Pi_{k,j}$ нет m -циклов с $m < k$. Индекс j введен для различения множеств с одинаковым k . Величина s может быть конечной или бесконечной.

Границы $\Gamma_{k,j}$ множеств $\Pi_{k,j}$ могут быть следующих типов:

- простые, то есть для любых точек $P \in \Gamma_{k,j}$ существует устойчивый m -цикл, что связано с ограниченностью диапазонов вариации параметров;
- границы $\Gamma_{k,j}$ образованы совокупностью бифуркационных значений параметров либо точек сгущения, отвечающих аperiodическим движениям.

Точка $P_* \in \Pi$ является бифуркационной, если уравнение [15,16]

$$\chi(P, \rho) = \rho^2 + \xi_1 \rho + \xi_2 = 0,$$

$$\chi(P, \rho) = \det(\Phi_m - \rho E)$$

при $P=P_*$ имеет хотя бы один корень, лежащий на единичной окружности.

Это случаи, когда наибольший по модулю мультипликатор m -цикла

обращается в 1 или -1 . Соответствующие бифуркационные кривые в плоскости параметров определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\chi(P,1) &= 1 + \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ \chi(P,-1) &= 1 - \xi_1 + \xi_2 = 0.\end{aligned}$$

По аналогии с [15,16] эти кривые здесь и далее будем обозначать N_+ и N_- , соответственно.

Интересным, с точки зрения понимания большого многообразия различных движений, порождаемых динамической системой (1), является изучение возможности непустых пересечений множеств $\Pi_{k,j}$ и свойств $\Pi_{k,j}$ в совокупности.

Пусть диапазон вариации параметров динамической системы (1) лежит в пределах $\Pi = \{(\alpha, \beta): -1 < \alpha < 4; |\beta| < 1\}$.

Рассмотрим сначала решения уравнения (2) для различных значений m и исследуем локальную устойчивость m -циклов.

Для $m=1$ уравнение (2) имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha x_{1c}^2 + (1 - \beta)x_{1c} - 1 &= 0, \\ x_{2c} &= \beta x_{1c}\end{aligned}\tag{3}$$

Корни этого уравнения соответствуют устойчивому и неустойчивому 1-циклам отображения (1)

$$\begin{aligned}x_{1c} &= \{\beta - 1 \pm [(1-\beta)^2 + 4\alpha]^{1/2}\}/(2\alpha), \\ x_{2c} &= \beta x_{1c}.\end{aligned}$$

Область существования устойчивого 1-цикла ограничена бифуркационными кривыми N_+, N_-

$$\beta^2 - 2\beta + 4\alpha + 1 = 0,\tag{4}$$

$$3\beta^2 - 6\beta - 4\alpha + 3 = 0,\tag{5}$$

соответственно. Обозначим эту область через $\hat{\Pi}_{1,1}$

$$\hat{\Pi}_{1,1} = \{(\alpha, \beta): -1/4(\beta-1)^2 \leq \alpha \leq 3/4(\beta-1)^2, |\beta| < 1\}.$$

При $P \in \hat{\Pi}_1$, $\hat{\Pi}_1 = \{(\alpha, \beta): -1 < \alpha < -1/4(\beta-1)^2, |\beta| < 1\}$ уравнение (3) не имеет действительных корней. На кривой $\alpha = -1/4(\beta-1)^2$, $-1 < \beta < 1$ уравнение (3) принимает вид

$$[x_{1c} - 2/(1-\beta)]^2 = 0$$

и имеет кратный корень. При движении по параметрам вдоль некоторой гладкой кривой (траектории деформации) внутрь области $\alpha > -1/4(\beta-1)^2$, $-1 < \beta < 1$ от этого решения непрерывно ответвляются два действительных корня: один из них отвечает устойчивому, а другой – неустойчивому 1-циклу. При обратном переходе устойчивый 1-цикл исчезает, сливаясь с неустойчивым в точках пересечения траектории деформации с кривой (4).

Легко видеть, что $\alpha = -1/4(\beta-1)^2 < 0$. Проследим теперь за эволюцией устойчивого и неустойчивого 1-циклов при изменении α от отрицательных значений к положительным при переходе через $\alpha=0$. Обозначим через X_c^s, X_c^u решения уравнения (2), соответствующие устойчивому и неустойчивому 1-циклу.

При $\alpha=0$ уравнение (2) имеет единственное решение

$$x_{1c} = 1/(1-\beta), \quad x_{2c} = \beta/(1-\beta).$$

Очевидно, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pm 0} x_{1c}^S = 1/(1-\beta), \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pm 0} x_{2c}^S = \beta/(1-\beta).$$

Отсюда решение уравнения (2), отвечающее устойчивому 1-циклу, гладко зависит от параметров в $\hat{\Pi}_{1,1}$, тогда как X_c^U непрерывно в $\hat{\Pi}_{1,1}$ за исключением точек, в которых $\alpha=0$. В точках $\alpha=0$, $|\beta|<1$ решение X_c^U терпит разрыв второго рода.

Различие в характере зависимости решений X_c^S , X_c^U от параметров показано на рис. 1, а. Зависимости мультипликаторов устойчивого и неустойчивого 1-циклов приведены на рис. 1, б.

При пересечении траектории деформации с бифуркационной кривой (5) 1-цикл теряет устойчивость и мягко возникает устойчивый 2-цикл в результате бифуркации удвоения периода. Оба 1-цикла продолжают существовать как неустойчивые во всей области параметров за бифуркационной кривой (5).

Для $m=2$ уравнение (2) принимает вид

$$\alpha^3 x_{1c}^4 - 2\alpha^2 x_{1c}^2 + (1-\beta)^3 x_{1c} - (1-\beta)^2 + \alpha = 0,$$

$$x_{2c} = \beta(1-\alpha x_{1c}^2)/(1-\beta).$$

В области $\alpha > 3/4(\beta-1)^2$ это уравнение имеет четыре действительных корня. Два из них соответствуют двум неустойчивым 1-циклам. Нетрудно показать, что 2-цикл удовлетворяет уравнению

$$\alpha^2 x_{1c}^2 - \alpha(1-\beta)x_{1c} + (1-\beta)^2 - \alpha = 0, \tag{6}$$

$$x_{2c} = \beta(1-\alpha x_{1c}^2)/(1-\beta).$$

Множество $\hat{\Pi}_{2,1}$, на котором определен устойчивый 2-цикл, ограничено бифуркационной кривой (5) и кривой, определяемой уравнением

$$5\beta^2 - 6\beta - 4\alpha - 5 = 0, \tag{7}$$

то есть

$$\hat{\Pi}_{2,1} = \{(\alpha, \beta): 3/4(\beta-1)^2 \leq \alpha \leq 1/4(5\beta^2-6\beta-5), |\beta|<1\}.$$

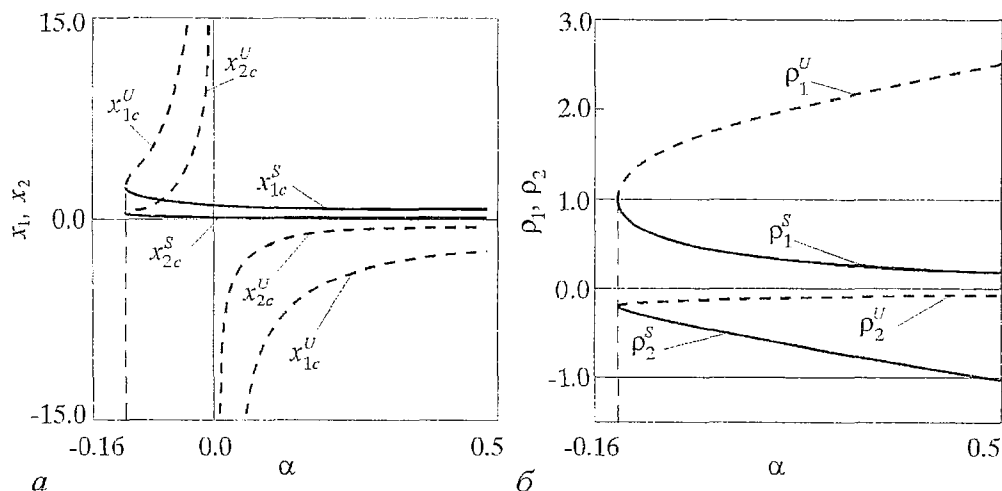


Рис. 1. а – зависимость устойчивого (индекс S) и неустойчивого (индекс U) однопериодных циклов от параметра α ; б – изменение соответствующих мультипликаторов ρ_1 и ρ_2 ; здесь $\beta=0.2$

При переходе через границу (7) в область $\alpha > 1/4(5\beta^2 - 6\beta - 5)$, $|\beta| < 1$ мягко возникает устойчивый 4-цикл, а 2-цикл продолжает существовать, но становится седловым.

Для $m=2^{i-1}$, $i=3,4,\dots$ получение бифуркационных формул в явном виде становится все сложнее. Все остальные множества $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$, $i=3,4,\dots$ строились численно. На рис. 2 приведена совокупность $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$, $i=1,2,\dots$, образующих $\Pi_{1,1}$

$$\Pi_{1,1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{2^{i-1},1}.$$

Итак, множество $\Pi_{1,1}$ состоит из областей существования устойчивых 2^{i-1} -циклов, $i=1,2,3,\dots$. Границы, разделяющие указанные области в $\Pi_{1,1}$, соответствуют бифуркационным кривым удвоения периода. Множество $\Pi_{1,1}$ слева ограничено бифуркационной кривой (4), а справа – кривой, образованной совокупностью точек сгущения.

Рассмотрим теперь $\Pi_{k,j} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{k \cdot 2^{i-1},j}$ для $k \neq 1$. Для $m=3$ из (2) находим

$$\begin{aligned} & \alpha^6 x_{1c}^6 - \alpha^5(1-\beta)x_{1c}^5 + \alpha^4[(1-\beta)^2 - 3\alpha]x_{1c}^4 - \alpha^3(1-\beta)(1 + \beta^2 - 2\alpha)x_{1c}^3 + \\ & + \alpha^2[\beta^4 - \beta^2 + 1 - (3\alpha + 2\beta)(1 - \alpha + \beta^2)]x_{1c}^2 + \alpha(\beta-1)[(1 + \beta + \beta^2)^2 + \alpha^2 - 2\alpha]x_{1c} + \\ & + 1 + \beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 - \alpha(1 - 2\alpha + \alpha^2 - 4\beta - 5\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4 - 2\alpha\beta^2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Корни этого уравнения можно найти только численно. Попытаемся определить уравнение бифуркационной кривой N_+ для 3-цикла. Учитывая, что при значениях параметров, лежащих на кривой N_+ , уравнение (8) имеет только кратные корни, получим

$$x_{1c}^3 - x_{1c}^2(1-\beta)/(2\alpha) + \sigma x + \vartheta = 0.$$

Здесь

$$\sigma = (2\alpha - \alpha^2 - 1 - \beta - \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^3)/(2\vartheta^{1/2}),$$

где

$$\vartheta = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 - \alpha(1 - 2\alpha + \alpha^2 - 4\beta - 5\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4 - 2\alpha\beta^2).$$

Уравнение искомой бифуркационной кривой имеет вид

$$-8[\mu(\alpha,\beta)]^{1/2} + (1-\beta)(1+\beta)^2 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu(\alpha,\beta) &= 1 + \beta + \beta^2 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 - \\ & - \alpha(1 + \alpha^2 - 4\beta - 5\beta^2 - 4\beta^3 + \beta^4) + \\ & + 2\alpha^2(1+\beta^2). \end{aligned}$$

Остальные области $\hat{\Pi}_{3 \cdot 2^{i-1},1}$, $i=2,3,\dots$, также как и $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$, $i=3,4,\dots$, были построены численно. На рис. 3 приведена совокупность областей

$$\Pi_{3,1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{3 \cdot 2^{i-1},1}; \quad \Pi_{k,1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{k \cdot 2^{i-1},1},$$

$$k = 5,6,7,8,10,12$$

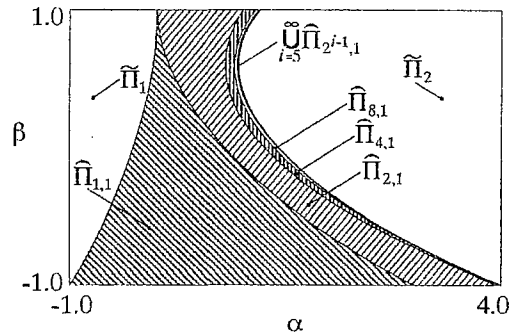


Рис. 2. Совокупность множеств $\hat{\Pi}_{2^{i-1},1}$, $i=1,2,\dots$, образующих $\Pi_{1,1}$. Через $\tilde{\Pi}_1$ и $\tilde{\Pi}_2$ обозначены области расходимости отображения

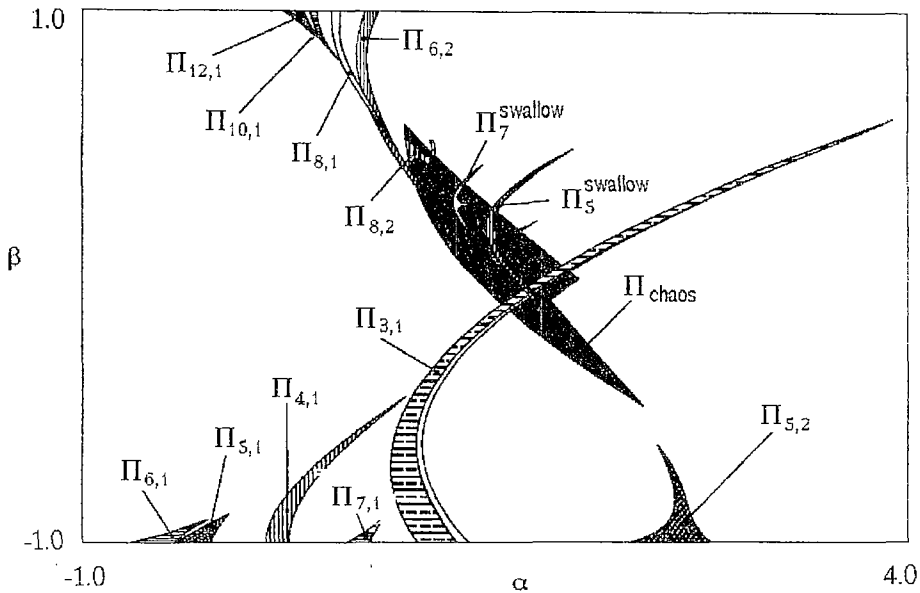


Рис. 3. Совокупность множеств $\Pi_{3,1}$, $\Pi_{k2^{i-1},1}$, $i=1,2,\dots, k=5,6,7,8,10,12$ и $\Pi_{k,2}$, $k=5,6,8$. Π_{chaos} – область хаотичности

и

$$\Pi_{k,2} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widehat{\Pi}_{k2^{i-1},2}, \quad k = 5,6,8,$$

которые удалось найти численно. Естественно, на рис. 3 показаны только относительно большие в Π множества.

Двухпараметрическая диаграмма разбиения плоскости параметров $\Pi = \{(\alpha, \beta) : -1 < \alpha < 4; |\beta| < 1\}$ отображения Хенона на области различных режимов колебаний приведена на рис. 4. К участкам границ $\Pi_{k,j}$, образованных множеством точек сгущения, примыкают области хаотичности. На диаграмме выделена только наибольшая из них. Эта область на рис. 3, 4 показана сплошным черным цветом и обозначена Π_{chaos} . Остальные области являются очень узкими, ввиду чего они не нашли отражения на диаграмме. В области Π_{chaos} существует большое число окон с детерминированной динамикой, начинающихся с m -циклов, возникающих через седло-узловую бифуркацию. Внутренняя структура таких областей может быть аналогична приведенной для $\Pi_{k,j}$, а может и отличаться. На рис. 3 области, свойства которых отличаются от свойств $\Pi_{k,j}$, обозначены Π_k^{swallow} . Области Π_k^{swallow} имеют специфические особенности в структуре внутреннего устройства и известны как «ласточкин хвост» или «crossroad area». Структура этих областей и бифуркации являются характерными для многих нелинейных динамических систем и хорошо изучены (см., например, [18–22]).

Для любой точки $P \in \Pi$ (за исключением точки $P=(0,0)$) в фазовом пространстве динамической системы (1) существует односвязная либо не односвязная область D_* такая, что если $X_0 \in D_*$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k(X_0)\| = \infty, \quad X_k(X_0) = F^{(k)}(X_0). \quad (9)$$

На рис. 4 (см. также рис. 2) через $\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2$ обозначены те области Π (незаштрихованная область), где для всех точек $P \in \tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2$ имеет место (9) при любых X_0 (в [8] эта область названа областью расходимости отображения (1)).

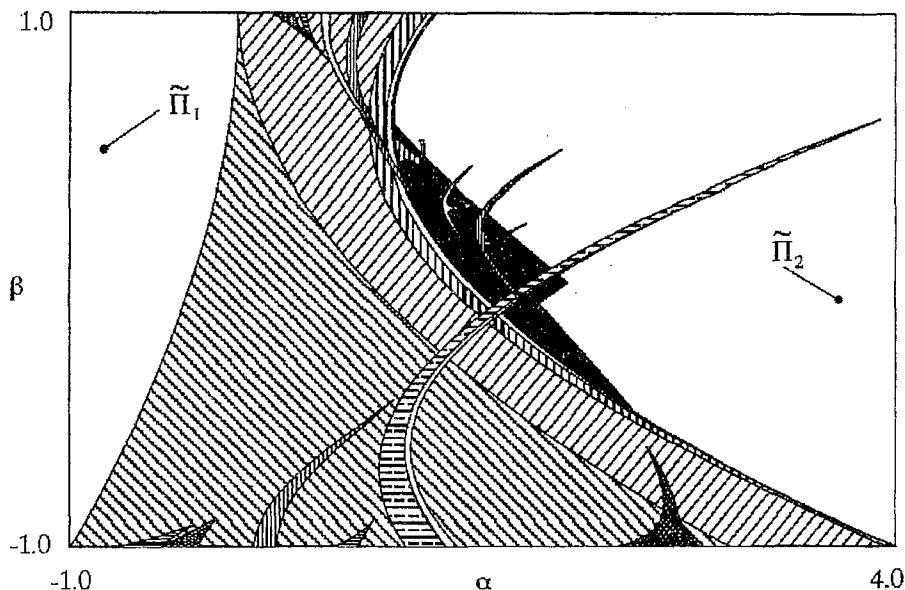


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров отображения Хенона на области устойчивости различных колебательных режимов

Из рис. 3, 4 видно, что все множества $\Pi_{k,j}$, за исключением Π_k^{swallow} , пересекаются непусто с $\Pi_{1,1}$, причем $\Pi_{i,l} \cap \Pi_{q,p} \neq \emptyset$ ($i, q > 1, i \neq q$). Это означает, что для каждой $P \in \Pi_{i,l} \cap \Pi_{q,p}$ существуют различные устойчивые m -циклы, соответствующие $\Pi_{i,l}$ и $\Pi_{q,p}$.

Нетрудно видеть, что

$$\Pi_{3,1} \cap \Pi_5^{\text{swallow}} \neq \emptyset, \Pi_i^{\text{swallow}} \cap \Pi_j^{\text{swallow}} \neq \emptyset, i \neq j.$$

3. Бифуркационный анализ отображения Хенона

Опираясь на полученные результаты, остановимся несколько подробнее на анализе бифуркаций при движении по параметрам в области $(\bigcup_{k,j} \Pi_{k,j}) \cup \Pi_{\text{chaos}}$. Для определенности анализ проведем в сечении $\beta = 0.3$, изменяя параметр α в диапазоне

$$\Omega_\alpha = \{\alpha: -1/4(\beta-1)^2 < \alpha < \nu, |\beta| < 1, \nu < 4, (\nu, \beta = \text{const})\}.$$

На рис. 5, а приведена бифуркационная диаграмма, рассчитанная при указанном значении β и вариации α . На этой диаграмме легко видеть, что усложнение колебаний при непрерывном изменении параметра α в сторону возрастающих значений происходит путем сгущающейся последовательности бифуркаций удвоения периода, заканчивающейся при некотором критическом значении параметра α установлением аperiodического движения. Затем следует область хаотичности. Диапазоны изменения α , в которых наблюдаются хаотические колебания, разделены малыми интервалами, где существуют устойчивые циклы.

В области $-1/4(\beta-1)^2 < \alpha < \nu, |\beta| < 1, \nu < 4, (\nu, \beta = \text{const})$ с изменением параметра α жестко возникает множество других устойчивых движений, например, 3-, 6-, 8-, 18-циклы и другие, с последующими бифуркациями удвоения периода. В результате существенно усложняется общая картина ветвления циклов. Для того,

чтобы прояснить эту картину, проследим за эволюцией различных устойчивых циклов в зависимости от α . Результаты расчетов сведены в табл. 1. Первый столбец таблицы указывает ветвь, второй – периодичность цикла, третий – номер цикла в пределах ветви, четвертый и пятый – границы диапазона существования локально устойчивого m -цикла. Последний столбец указывает величину этого диапазона.

Данные таблицы удобно представить в виде диаграммы (рис. 5, б), названной в [11,13] картиной ветвления. На этой диаграмме по оси абсцисс откладывается значение варьируемого параметра, а по оси ординат – величина m . На рисунке приведены не все ветви, указанные в табл. 1, а только те, область существования которых является относительно большой.

Таблица 1

$V_{k,j}$	m	i	$\alpha_{k,2^{i-1}j}$	$\alpha_{k,2^i j}$	$\Delta\alpha$
$V_{1,1}$	1	1	-0.1225	0.3675	0.49
	2	2	0.3675	0.9125	0.545
	4	3	0.9125	1.0258554050738	0.1133554050738
	8	4	1.0258554050738	1.0511256620352	0.0252702569614
	16	5	1.0511256620352	1.0565637581588	0.0054380961236
	32	6	1.0565637581588	1.0577304656609	0.0011667075021
	64	7	1.0577304656609	1.0579808932	0.0002255343391
	128	8	1.0579808932	1.0580344521	0.0000535589
	256	9	1.0580344521	1.0580459231	0.000011471
$V_{6,1}$	6	1	1.062372	1.0710703629071	0.0086983629071
	12	2	1.0710703629071	1.0750124047736	0.0039420418665
	24	3	1.0750124047736	1.0759204758	0.000908071087
	48	4	1.0759204758	1.0761186644	0.0001981886
	96	5	1.0761186644	1.0761612671	0.0000426027
$V_{7,1}$	7	1	1.2266174	1.2541834642429	0.0275660642429
	14	2	1.2541834642429	1.2600151726701	0.0058317084272
	28	3	1.2600151726701	1.2614289068416	0.0014137341715
	56	4	1.2614289068416	1.2617	0.0002710931584
$V_{9,1}$	9	1	1.293952248	1.2940570232	0.0001047748
	18	2	1.2940570232	1.2941079422	0.000050919
	36	3	1.2941079422	1.2941199612	0.000012019
	72	4	1.2941199612	1.2941226013	0.0000026401
$V_{12,1}$	12	1	1.0720080196	1.0728902059	0.0008821863
	24	2	1.0728902059	1.0733516722	0.0004614663
	48	3	1.0733516722	1.0734589837	0.0001073115
	96	4	1.0734589837	1.0734824547	0.000023471
$V_{20,1}$	20	1	1.0675791454	1.0677430954543	0.0001790954543
	40	2	1.0677430954543	1.0678313511	0.000088255646
	80	3	1.0678313511	1.0678520309	0.0000206798
$V_{20,2}$	20	1	1.10	1.1012085844	0.0012085844
	40	2	1.1012085844	1.1012928253	0.0000842409
	80	3	1.1012928253	1.1013113061	0.0000184808
$V_{21,1}$	21	1	1.26887	1.2692033433938	0.0003333433938

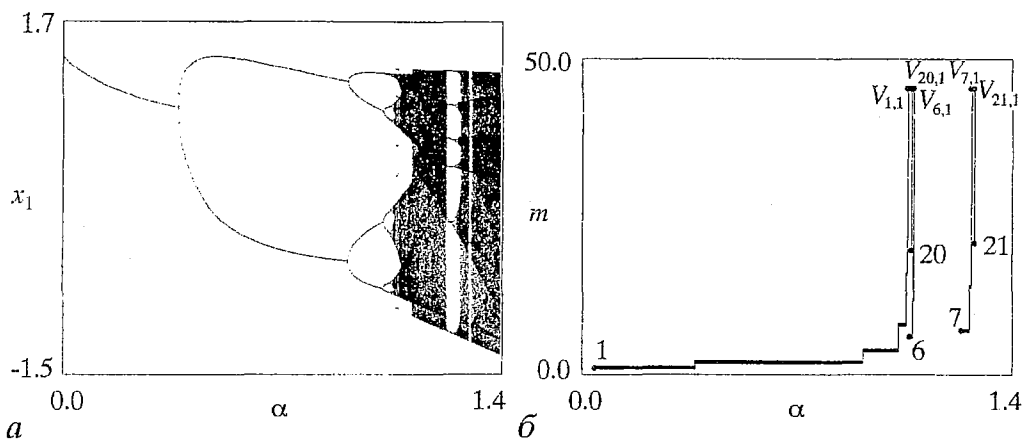


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма (а) и картина ветвления для $0 \leq \alpha \leq 1.4$ (б); здесь $\beta = 0.3$

Далее используются обозначения, принятые в [11,13]. Для ветвей введены обозначения $V_{k,j}$, где индекс k указывает, с какого k -цикла начинается ветвь. Максимальное значение j указывает на количество найденных ветвей, имеющих одно и то же значение k . Все ветви начинаются с k -циклов, возникающих жестко. Некоторые из $V_{k,j}$ определены на множествах, которые не были указаны на рис. 4 в силу малости их размеров в Π .

Диапазон существования каждой ветви $V_{k,j}$ представляется в виде совокупности интервалов

$$\{\alpha: \alpha_{k \cdot 2^{i-1}, j} < \alpha < \alpha_{k \cdot 2^i, j}\}, \quad i=1, 2, \dots$$

Здесь параметры $\alpha_{k \cdot 2^i, j}$, $i=1, 2, \dots$ соответствуют потере устойчивости $k \cdot 2^{i-1}$ -цикла и мягкому возникновению $k \cdot 2^i$ -цикла, $\alpha_{k, j}$ – жесткому возникновению k -цикла. С увеличением i происходит сужение интервалов $\Delta \alpha_{k \cdot 2^{i-1}, j} = \alpha_{k \cdot 2^i, j} - \alpha_{k \cdot 2^{i-1}, j}$ существования $k \cdot 2^{i-1}$ -цикла (см. табл. 1), так что для каждой ветви имеется предельное значение $\alpha_{k, j}^*$, отвечающее аperiodическому движению

$$\alpha_{k, j} < \alpha_{k \cdot 2, j} < \dots < \alpha_{k \cdot 2^i, j} < \dots < \alpha_{k, j}^*.$$

Следуя [12], эти параметры назовем точками сгущения. Точки сгущения на рис. 5, б изображены в виде вертикальных линий. Начала окон периодичности на бифуркационных диаграммах совпадают с началом соответствующих ветвей. Некоторые из $V_{k,j}$ ($k \neq 1$) пересекаются с $V_{1,1}$ -непусто. В тех диапазонах α , где $V_{1,1} \cap V_{k,j} \neq \emptyset$, $k \neq 1$ кроме устойчивого 2^i -цикла существуют и устойчивые $k \cdot 2^d$ -циклы ($i, d \geq 0$). Установление того или иного m -цикла определяется начальными условиями и свойствами области притяжения этого движения. Характер разбиения фазовой плоскости системы (1) на области притяжения различных циклов в точках $P \in \Pi_{i,l} \cap \Pi_{q,p}$ проиллюстрирован на рис. 6, а численные данные приведены в табл. 2. Первый столбец таблицы содержит номера диаграмм с изображением областей притяжения, указанные на рис. 6. Во втором и третьем столбце табл. 2 приведены значения параметров, при которых рассчитывались области притяжения. В четвертом столбце приведены периоды сосуществующих устойчивых циклов (aperiodическим колебаниям соответствует $m=0$). В последних столбцах указаны граничные значения переменных x_1, x_2 .

Сопоставляя картины ветвления с бифуркационными диаграммами, легко заметить, что в пределах существования ветви $V_{1,1}$ имеются интервалы, где наряду с периодическими существуют и хаотические движения. Здесь в зависимости от

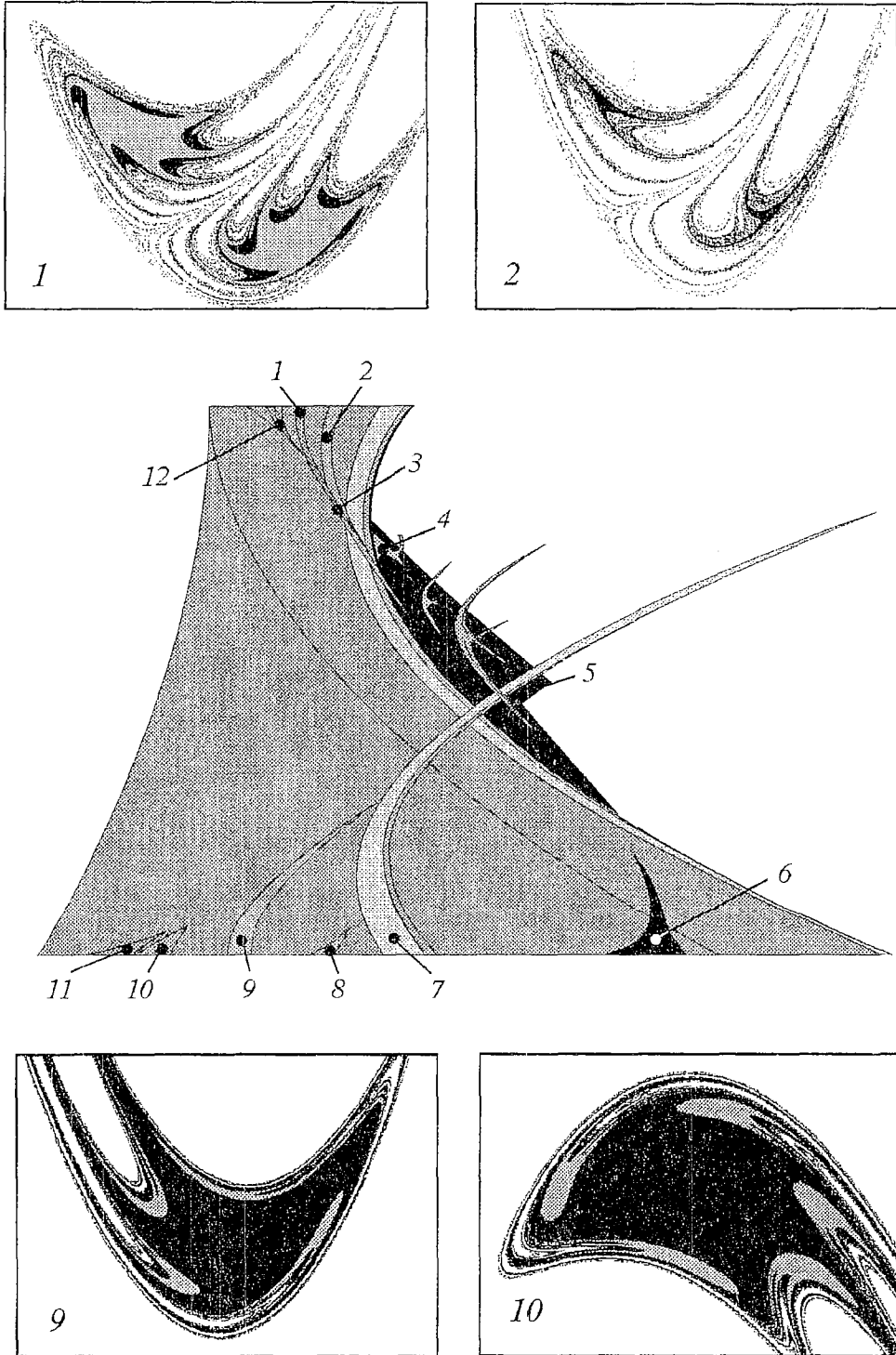


Рис. 6. Разбиение фазового пространства отображения Хенона на области притяжения различных колебательных режимов для некоторых точек плоскости параметров

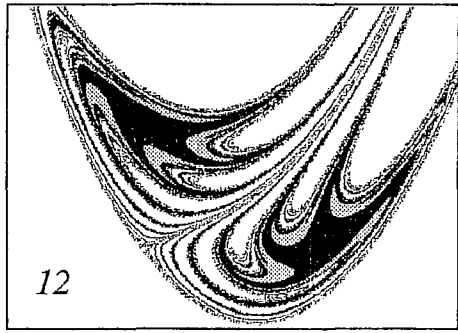
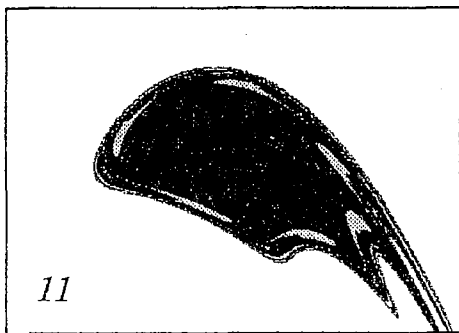
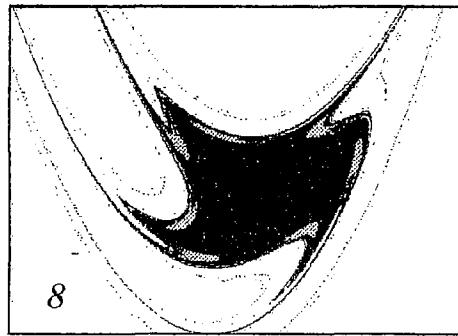
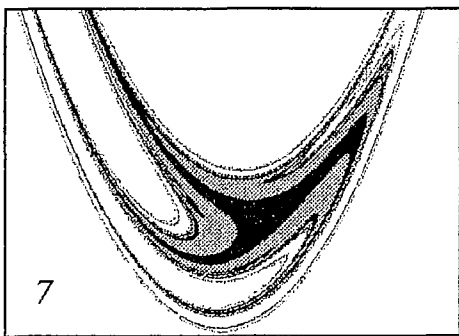
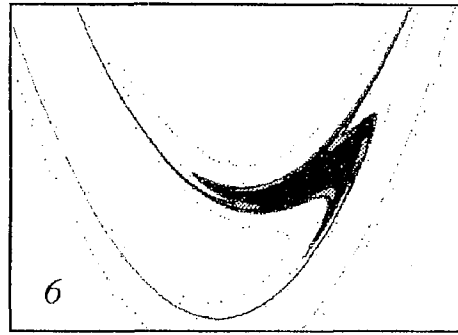
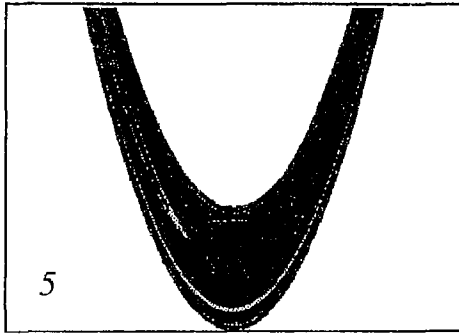
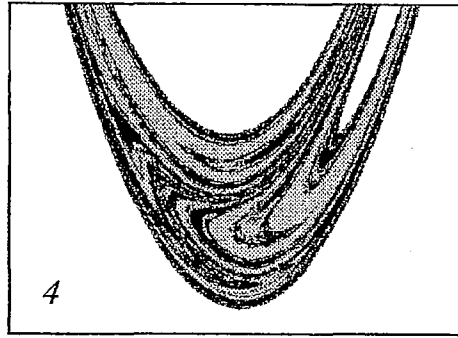
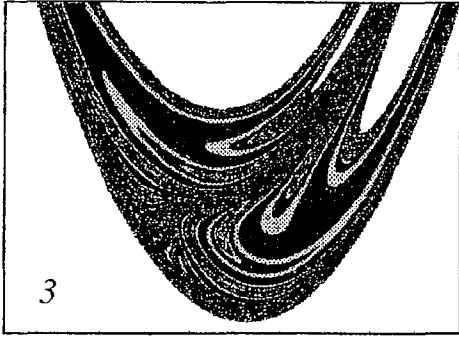


Таблица 2

№	α	β	m	$x_{1\min}$	$x_{1\max}$	$x_{2\min}$	$x_{2\max}$
1	0.387	0.977	2.10	-4	4	-3.5	5
2	0.719	0.914	2.6	-3	3	-3	3
3	0.719	0.672	2.6,8	-3	3	-3	3
4	0.973	0.492	8.0	-3	3	-3	3
5	1.559	-0.086	3.0	-3	3	-2.2	4
6	2.613	-0.945	1.5	-1	1	-1.5	1
7	0.934	-0.805	1.3	-3	3	-3	4
8	0.66	-0.984	1.6	-3	3	-3	3
9	0.250	-0.820	1.4	-9.5	9	-8	12
10	-0.297	-0.969	1.5	-3.5	5	-6	3.5
11	-0.531	-0.984	1.6	-2	3.5	-4	2
12	0.504	-0.938	2.8	-3.5	3.5	-3.2	4

начальных условий может устанавливаться либо периодическое, либо хаотическое движение.

Заключение

В заключение кратко сформулируем основные результаты, представленные в настоящей работе.

- В плоскости параметров отображения Хенона численно и аналитически построены области режимов периодических и хаотических колебаний. При этом выделены два типа областей устойчивости циклов: $P_{k,j}$, P_k^{swallow} . Подробно описана структура множеств $P_{k,j}$ и свойства их в совокупности.

- Показано, что движения, определенные на множествах $P_{k,j}$, гладко зависят от параметров. При непрерывном движении по параметрам в пределах $P_{k,j}$ переход от одних устойчивых циклов к другим происходит мягко через последовательность прямых и обратных бифуркаций удвоения периода, тогда как в P_k^{swallow} наряду с мягкими возможны жесткие гистерезисные переходы.

- При пересечении границ $P_{k,j}$, отвечающих параметрам жесткого возникновения устойчивых циклов, возможны катастрофические переходы от одних устойчивых движений к другим, либо катастрофическая хаотизация колебаний. Однако такие переходы не являются гистерезисными.

- Множества $P_{k,j}$ пересекаются непусто, причем некоторые из $P_{k,j}$ имеют пересечения с областями, где реализуются хаотические колебания, вследствие чего возможно чрезвычайно большое многообразие бифуркационных переходов при вариации параметров.

Библиографический список

1. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы/ Под. ред. Я.Г.Синяя и О.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
2. Hitzl D.L., Zele F. An exploration of the Henon attractors // J.Stat. Phys. 1981. Vol. 26, № 4. P. 683.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
4. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.

5. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. 528 с.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
7. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
8. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Структура периодических орбит хаотической автоколебательной системы, описываемой разностными уравнениями второго порядка // РЭ. 1994, № 8–9. С. 1392.
9. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Kopeikin A.S. Chaotic attractors of two-dimensional invertible maps // Discrete Dynamics in Nature and Society. 1998. Vol. 2. P. 249.
10. Anishchenko V.S. and Strelkova G.I. Irregular attractors // Discrete Dynamics in Nature and Society. 1998. Vol. 2. P. 53.
11. Zhusubaliyev Zh.T., Rudakov V.N., Soukhoterina E.A., Mosekilde E. Bifurcation analysis of the Henon map // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2000 (to be published).
12. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992, № 8. С. 47.
13. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Михальченко С.Г. Стохастичность в динамике стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1996, № 3. С. 69.
14. Жусубалиев Ж.Т. К исследованию хаотических режимов преобразователя напряжения с широтно-импульсной модуляцией // Электричество. 1997, № 6. С. 40.
15. Жусубалиев Ж.Т. Бифуркации и хаотические движения в динамике релейных систем автоматического регулирования // Сборник материалов 3-й Международной конференции «Распознавание-97». Курск, 1997. С. 25.
16. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
17. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 324 с.
18. Mira C., Carcasses J., Millerioux G. and Gardini L. Plane foliation of two-dimensional noninvertible maps // Int. J. Bifurc. and Chaos. 1996. Vol. 6, № 8. P. 1439.
19. Kuznetsov A., Kuznetsov S. and Sataev I. Variety of types of critical behavior and multistability in period-doubling systems with unidirectional coupling near the onset of chaos // Int. J. Bifurc. and Chaos. 1993. Vol. 3, № 1. P. 139.
20. Barfred M., Mosekilde E. and Holstein-Rathlou N.-H. Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation // Chaos. 1996. Vol. 6, № 3. P. 280.
21. Mosekilde E. Topics in nonlinear dynamics. Applications to physics, biology and economic systems. World Scientific, 1996.
22. Gallas J. Dissecting shrimps: results for some one-dimensional physical models // Physica A. 1994, № 202. P. 196.

Курский государственный
технический университет

Поступила в редакцию 10.06.99
после доработки 22.05.00

ON DYNAMICS OF THE HENON MAP

Z.T. Zhusubaliyev, V.N. Rudakov, E.A. Soukhoterina

Division of the parameter plane for the two-dimensional Henon mapping into domains of periodic and chaotic oscillations is studied numerically and analytically. Regularities in the occurrence of different motions and bifurcational transitions are analyzed. It is shown that there are domains in the plane of parameters, where non-uniqueness of motions exists. This may lead to abrupt changes of the character of the dynamics under variation in the parameters, that is, to a sudden transition from one stable cycle to another or to chaoticization of the oscillations.



Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – родился в 1958 году в Ошской области Киргизской ССР, окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР, 1982). После окончания ТИАСУР работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. В настоящее время работает доцентом кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Томском политехническом институте (1989) по электротехническим комплексам и системам, включая их управление и регулирование, применение математического моделирования и нелинейной динамики в системах автоматического управления. Область научных интересов: нелинейная динамика и хаос, математическое моделирование нелинейных динамических систем, бифуркации и хаотические колебания в динамических системах с разрывными

правыми частями, применение нелинейной динамики в теории импульсных и релейных автоматических систем управления. Опубликовал около 80 научных работ по указанным направлениям. E-mail: cct@cafct.kursk.ru



Рудаков Вадим Николаевич – родился в 1971 году в Курской области. Окончил Курский государственный технический университет (1993). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1998) в области применения нелинейной динамики в системах автоматического управления. Опубликовал 20 научных статей по направлению, указанному выше.



Сухотерин Евгений Александрович – родился в 1972 году в Алма-Атинской области Казахской ССР, студент-магистрант Курского государственного технического университета. Опубликовал 7 научных статей по нелинейной динамике в системах автоматического управления.