



## ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ УСТОЙЧИВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ СИСТЕМАХ

*А. Ю. Жалнин*

На примере квазипериодически возбуждаемого отображения Хенона показано, что устойчивые двумерные многообразия узловой инвариантной кривой трехмерного отображения могут обладать как гладкой, так и фрактальной структурой. Фрактализация многообразий предшествует разрушению гладкой инвариантной кривой и возникновению странного нехаотического аттрактора. Для траекторий, принадлежащих узловой инвариантной кривой с фрактальными многообразиями и странному нехаотическому аттрактору, обнаруживается существование касаний устойчивых многообразий, соответствующих разным характеристическим показателям. Это ведет к нарушению параболической структуры многообразий в малой окрестности инвариантной кривой.

### Введение

Исследование путей разрушения регулярных квазипериодических движений представляет собой одну из актуальных проблем нелинейной динамики. Удобными моделями для исследования здесь являются системы, находящиеся под внешним квазипериодическим воздействием. Одной из эталонных систем среди них является квазипериодически возбуждаемое отображение Хенона [1]. Это простейшее трехмерное гладкое обратимое отображение, квазипериодическое по одной переменной. В силу этих свойств оно «моделирует» отображение Пуанкаре бигармонически возбуждаемого нелинейного осциллятора и должно описывать динамику достаточно широкого класса физических систем. Это отображение принадлежит к числу систем, для которых типичный сценарий разрушения регулярных квазипериодических движений и перехода к хаосу связан с возникновением странного нехаотического аттрактора (СНА) [1–6,7]. Оно послужит нам моделью для численного исследования.

В настоящей работе исследуются особенности разрушения регулярных квазипериодических движений с точки зрения структуры и трансформаций двумерных инвариантных многообразий притягивающего эргодического «тора» трехмерного гладкого обратимого отображения, а также динамика малых возмущений начальных условий вдоль траекторий на странном нехаотическом аттракторе. Под термином «эргодический тор трехмерного отображения» мы будем понимать гладкую замкнутую инвариантную кривую в фазовом пространстве

$$\{(x, y, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \mid x = x(\theta), y = y(\theta), \theta \in [0, 1]\}$$

модельной системы, а его двумерные многообразия представляют собой поверхности в фазовом пространстве. Исследование структуры многообразий важно для понимания механизмов бифуркаций, критических явлений [6] и глобальной структуры пространства параметров в квазипериодически возбуждаемых системах. Например, существование и гладкость двумерных многообразий эргодического «тора» является необходимым условием возможности таких основных бифуркаций, как удвоение «тора» [8], бифуркация потери симметрии «тора» и т.д.

В работе показано, что устойчивые двумерные многообразия притягивающей узловой инвариантной кривой могут обладать как гладкой, так и фрактальной структурой<sup>1</sup>. И тот и другой случаи существуют на множестве значений положительной меры в пространстве параметров модельной системы. Под «фрактализацией» многообразий понимается возникновение бесконечно изломанной зависимости параметрически заданной двумерной поверхности от фазовой координаты. В работе возникновение недифференцируемой структуры многообразий демонстрируется посредством вычисления касательных к многообразиям ведущего и неведущего устойчивых направлений вдоль инвариантной кривой. Возникновение недифференцируемой зависимости собственных направлений от фазовой координаты свидетельствует о недифференцируемости многообразий. Показательно, что фрактализация многообразий предшествует в системе Хенона разрушению эргодического «тора» и возникновению СНА.

В работе на основе численного анализа показано, что фрактализация многообразий происходит из-за возникновения плотного на инвариантной кривой множества нулевой меры точек, в которых имеет место касание устойчивых многообразий, соответствующих различным характеристическим показателям. Для остальных траекторий на «торе», не принадлежащих этому множеству и имеющих положительную меру на «торе», наблюдение угла между устойчивыми многообразиями показывает наличие ситуаций, сколь угодно близких к касанию<sup>2</sup>. В окрестности притягивающей узловой инвариантной кривой все многообразия являются устойчивыми, и структура многообразий в этой малой окрестности должна быть параболической. Наличие ситуаций, сколь угодно близких к касанию устойчивых многообразий, соответствующих разным характеристическим показателям (то есть к касанию ведущего и неведущего направлений), приводит к нарушению параболичности окрестности. Этот случай отличен от случая фокальной инвариантной кривой, в окрестности которой не существует устойчивых направлений и многообразия «закручиваются». Таким образом, в квазипериодической динамике возникает новый тип устройства окрестности устойчивой траектории: устойчивые многообразия нерегулярным образом зависят от координаты точки траектории на «торе», и угол между устойчивыми направлениями, соответствующими различным характеристическим показателям, может оказаться сколь угодно мал по мере того, как рассматриваются все более длинные участки траектории. После разрушения гладкого инвариантного «тора» аналогичная структура многообразий наблюдается для траекторий на СНА.

<sup>1</sup> Понятие «многообразия» обобщает в различных направлениях понятие линии и поверхности и относится к дифференцируемым (или кусочно дифференцируемым) объектам. Однако в силу сложившейся терминологии мы будем использовать данный термин по отношению к соответствующим инвариантным множествам, связанным с эргодическим «тором», и в случае их недифференцируемости.

<sup>2</sup> Эта ситуация весьма сходна с известными в хаотической динамике свойствами гиперболичности или негиперболичности седловых траекторий. Так, в работе [9] при численном исследовании свойств седловых траекторий на хаотическом аттракторе в автономной системе Хенона седловая траектория считается гиперболической, если существует отличный от нуля минимальный угол между устойчивым и неустойчивым многообразиями вдоль траектории, и негиперболической, если такого угла не существует и возможны ситуации, сколь угодно близкие к касанию.

## 1. Многообразие траекторий и их численный анализ

В этом разделе мы опишем процедуру численного анализа многообразий устойчивых фазовых траекторий в квазипериодически возбуждаемом отображении и их трансформаций. Рассмотрим гладкое обратимое двумерное отображение (в нашем случае отображение Хенона)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \tilde{f}(x_n, y_n) = \lambda - x_n^2 + y_n, \\y_{n+1} &= \tilde{g}(x_n, y_n) = by_n.\end{aligned}\tag{1}$$

Пусть точка  $(x_0, y_0)$  является неподвижной точкой отображения (1) и выполняется условие  $S^2 - 4J > 0$ , где  $J$  – определитель матрицы Якоби отображения (1) в этой точке,  $S$  – след этой матрицы. Это условие означает, что неподвижная точка имеет два действительных некрратных мультипликатора. Связанные с ними собственные векторы определяют направления, касательные к инвариантным многообразиям в неподвижной точке. Модифицируем теперь отображение (1) внесением квазипериодического возмущения

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n, \theta_n) = \lambda - x_n^2 + y_n + \varepsilon \cos 2\pi \theta_n, \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n, \theta_n) = by_n, \\\theta_{n+1} &= \theta_n + \omega, \text{ mod } 1,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\omega$  – иррациональное число, традиционно выбранное равным «золотому сечению»:  $\omega = (5^{1/2} - 1)/2$ . При  $\varepsilon = 0$  отображение (2) обладает тривиальной инвариантной кривой

$$\{(x, y, \theta) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{S}^1 \mid x = x_0, y = y_0, \theta \in [0, 1]\}.$$

В том случае, если один из мультипликаторов отображения (1) по модулю больше единицы, а другой – меньше, инвариантная кривая является седловой и имеет устойчивое и неустойчивое двумерные инвариантные многообразия, представляющие собой гладкие поверхности в трехмерном фазовом пространстве, как это показано на рис. 1, а. Если же оба мультипликатора по модулю меньше (или больше) единицы, «тор» отображения (2) является устойчивым (или, соответственно, неустойчивым) узловым, и его окрестность состоит из континуального множества гладких двумерных инвариантных многообразий, имеющего параболическую структуру, как показано на рис. 1, б. Именно устойчивым узловым «торам», структуре их многообразий и ее трансформациям посвящены все наши дальнейшие рассуждения.

Пусть теперь параметр принимает достаточно малые, но отличные от нуля значения. В рассматриваемой нами динамической системе малые значения параметра внешнего воздействия не разрушают гладкой инвариантной кривой и его двумерных многообразий<sup>3</sup>, и при  $\varepsilon \neq 0$  и малом  $\varepsilon$  система (2) имеет гладкий инвариантный «тор»  $\{x(\theta), y(\theta), \theta \in [0, 1]\}$ . Его устойчивые инвариантные многообразия деформируются, но также остаются гладкими двумерными поверхностями в трехмерном фазовом пространстве. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  многообразия могут все более изламываться, пока при некотором критическом значении параметра не наступает их фрактализация. Фрактализация многообразий связана с негладкой зависимостью собственных направлений, касательных к

<sup>3</sup> Действительно, дальнейший численный анализ показывает, что разрушение гладкого «тора» и фрактализация его двумерных инвариантных многообразий в системе Хенона имеет место лишь при достаточно больших значениях параметра.

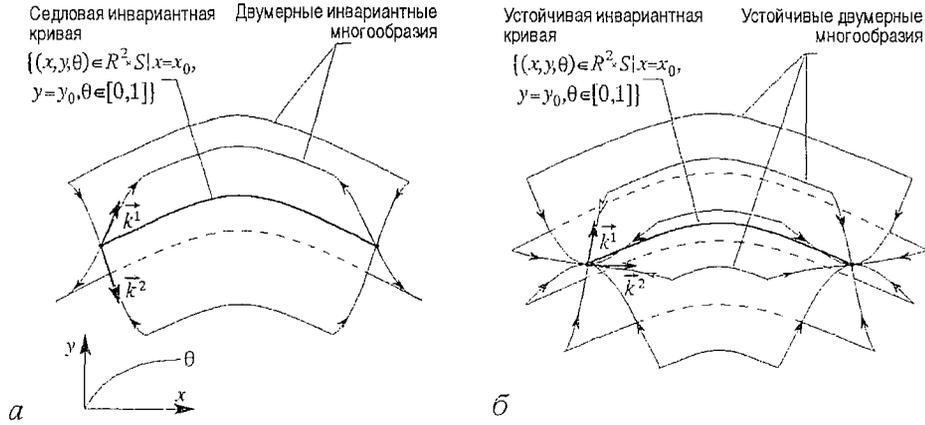


Рис. 1. Схематическое изображение гладких двумерных многообразий седловой (а) и устойчивой узловой (б) инвариантных кривых отображения (2) при  $\epsilon=0$

многообразиям в каждой точке на «торе» (то есть ведущего и неведущего направлений), от фазовой координаты. Поэтому для анализа гладкости или фрактальности многообразий нам будет достаточно ограничиться линейным приближением, то есть определить устойчивые направления, касательные к многообразиям в каждой точке траектории на «торе», как функции фазовой координаты.

Для этого рассмотрим эволюцию малого возмущения начальных условий. За одну итерацию она описывается матрицей  $\hat{A}^1 = \hat{J}(x_0, y_0, \theta_0)$  – матрицей Якоби отображения (2)

$$(\delta x_1, \delta y_1, \delta \theta_1)^T = \hat{J}(x_0, y_0, \theta_0)(\delta x_0, \delta y_0, \delta \theta_0)^T. \quad (3)$$

После  $n$  итераций матрица эволюции малого возмущения представляет собой

$$\hat{A}^n = \hat{J}(x_{n-1}, y_{n-1}, \theta_{n-1}) \hat{J}(x_{n-2}, y_{n-2}, \theta_{n-2}) \dots \hat{J}(x_0, y_0, \theta_0).$$

Матрица  $\hat{A}^n$  имеет вид

$$\hat{A}^n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Один собственный вектор матрицы  $\hat{A}^n$  соответствует тривиальному собственному числу (равному 1 и связанному с квазипериодичностью), а два других имеют вид  $\mathbf{k}^1 = (k_x^1, k_y^1, 0)$  и  $\mathbf{k}^2 = (k_x^2, k_y^2, 0)$ , то есть ортогональны оси фазовой переменной.

При движении по «тору» устойчивые направления, касательные к многообразиям в данной точке траектории, не могут быть найдены как собственные векторы матрицы  $\hat{A}^n$  после произвольных  $n$  итераций отображения (2), начиная с данной точки, нас интересующей, поскольку в общем случае через  $n$  итераций точка не возвращается в свою окрестность. Однако значение  $\omega$  было выбрано равным «золотому сечению», следовательно, последовательность точек с номерами – числами Фибоначчи – сходится к начальной точке, а в случае предположения о малости воздействия и дифференцируемости многообразий «тора» последовательность касательных направлений также сходится к касательным направлениям в начальной точке. Таким образом, направления в данной точке траектории, касательные к многообразиям в этой точке, могут быть определены как предельные значения собственных векторов матрицы  $\hat{A}_{F_m}$  при  $m \rightarrow \infty$ , где  $F_m = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  – числа Фибоначчи.

Этот способ отыскания касательных к многообразиям направлений был приведен в предположении их гладкой зависимости от фазовой координаты. Он

применим лишь в области дифференцируемости многообразий. Приведем другой способ отыскания касательных направлений, позволяющий анализировать структуру многообразий во всех областях существования инвариантного «тора». Произвольно заданный вектор малого возмущения после достаточно большого количества итераций в *типичном случае* стремится к направлению, соответствующему наибольшему показателю Ляпунова. В случае устойчивого «тора» это тривиальный (нулевой) показатель. Однако выше было показано, что устойчивые направления, соответствующие нетривиальным показателям, ортогональны оси фазовой переменной. Поэтому зададим произвольный вектор  $\mathbf{k}_0=(k_{x,0},k_{y,0},0)$  и будем следить за его эволюцией под действием линейного оператора, описывающего эволюцию малого возмущения в формуле (3). Напишем отображение эволюции в явном виде, внося при этом такое условие нормировки, чтобы модуль вектора всегда был равен единице

$$\begin{bmatrix} k_{x,n+1} \\ k_{y,n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{[(\partial f/\partial x k_{x,n} + \partial f/\partial y k_{y,n})^2 + (\partial g/\partial x k_{x,n} + \partial g/\partial y k_{y,n})^2]^{1/2}} \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{x,n} \\ k_{y,n} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega, \text{ mod } 1.$$

Все значения функций в формуле (4.1) берутся при соответствующем наборе координат  $(x_n, y_n, \theta_n)$ . При итерациях по траектории, принадлежащей инвариантной кривой, координаты  $x_n$  и  $y_n$  являются функциями фазовой координаты  $\theta_n$ :  $x_n=x(\theta_n)$ ,  $y_n=y(\theta_n)$ . Это позволяет рассматривать отображение (4.1) как обыкновенное отображение под квазипериодическим воздействием. Его прямые итерации дают предельные значения  $k_{x,n}=k_x^1(\theta_n)$ ,  $k_{y,n}=k_y^1(\theta_n)$ , определяющие с точностью до знака направление, соответствующее при данном  $\theta_n$  большему нетривиальному показателю Ляпунова (неведущее направление). Абсолютно аналогичным способом можно найти направление, соответствующее меньшему показателю Ляпунова (ведущее направление). Для этого надо взять отображение, обратное отображению (2) (тогда минимальный показатель станет максимальным) и повторить для него все приведенные выше рассуждения. Это даст отображение, аналогичное (4.1), которое мы в явном виде выписывать не будем, но будем ссылаться на него как на (4.2). Очевидно, что данные отображения будут обладать одинаковыми инвариантными решениями, но решение, устойчивое для (4.1), будет неустойчивым для (4.2), и наоборот.

Бифуркации и кризисы аттракторов отображений (4.1) и (4.2) соответствуют трансформациям многообразий «тора» отображения (2). Этим свойством мы и воспользуемся для дальнейшего анализа.

## 2. Фрактализация многообразий инвариантной кривой

Зафиксируем параметры  $b$  и  $\varepsilon$  отображения (2) на значениях  $b=0.5$  и  $\varepsilon=0.6$ . Изменяя  $\lambda$ , проследим эволюцию аттрактора отображения (2) и многообразий траекторий на этом аттракторе.

При  $\lambda=0.55$  аттрактором отображения (2) является гладкий эргодический «тор». Что представляют собой его многообразия? В предыдущем разделе было показано, что касательные к ним (и ортогональные к оси фазовой переменной) устойчивые направления определяются предельными значениями переменных отображений (4.1) и (4.2) при данном  $\theta$ :  $\mathbf{k}^{1,2}=(k_x^{1,2}(\theta), k_y^{1,2}(\theta), 0)$ . Аттрактором отображения (4.1) при данном  $\lambda$  является удвоенный «тор», а отображение (4.2) имеет два аттрактора – симметричных относительно фазовой оси «тора» (рис. 2, а, б). Все инвариантные кривые гладкие, и их гладкость говорит о том, что многообразия инвариантной кривой отображения (2), по крайней мере в первом,

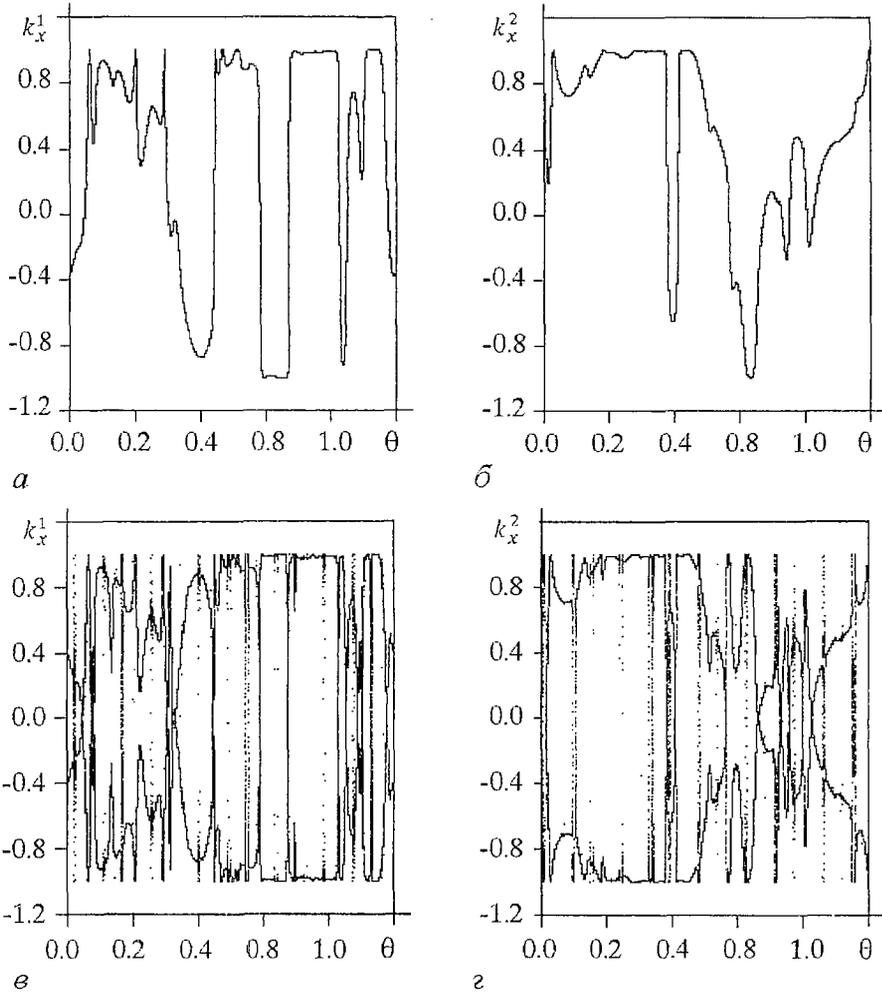


Рис. 2. Проекция аттракторов отображений (4.1) и (4.2): *a* – удвоенный «тор» отображения (4.1) (каждая вторая итерация); *б* – «тор» отображения (4.2) при значении параметра  $\lambda=0.55$ ; *в*, *г* – СНА отображений (4.1) и (4.2), соответственно, при  $\lambda=0.56$ . Здесь и на следующих рисунках значения остальных параметров –  $b=0.5$ ,  $\epsilon=0.6$

то есть линейном, приближении в ее окрестности являются гладкими поверхностями. Увеличивая значение параметра  $\lambda$ , можно наблюдать, как инвариантные кривые отображений (4.1) и (4.2) все более изламываются, пока при  $\lambda_f \approx 0.559$  в обоих отображениях одновременно не возникает СНА (рис. 2, *в*, *г*). Таким образом, множество устойчивых направлений, касательных к многообразиям, оказывается недифференцируемым, что свидетельствует о фрактальности самих многообразий. При этом аттрактор отображения (2) остается гладким «тором». Его фрактализация происходит лишь при  $\lambda_c \approx 0.656$ . На всем интервале значений параметра  $[\lambda_f, \lambda_c]$  аттрактором системы (2) является эргодический «тор» с фрактальными многообразиями. Факт фрактализации «тора» в отображении (2) и возникновения СНА в отображениях (4.1) и (4.2) может быть показан при помощи метода диагностики СНА, развитого в работе [7] и примененного при анализе многомерных систем в работе [1]. Отметим, что подобная структура многообразий наблюдается и при меньших значениях параметра  $\lambda$ , на интервалах  $\lambda \in [0.266, 0.416]$  и  $\lambda \in [0.484, 0.521]$ , что свидетельствует о ее типичности.

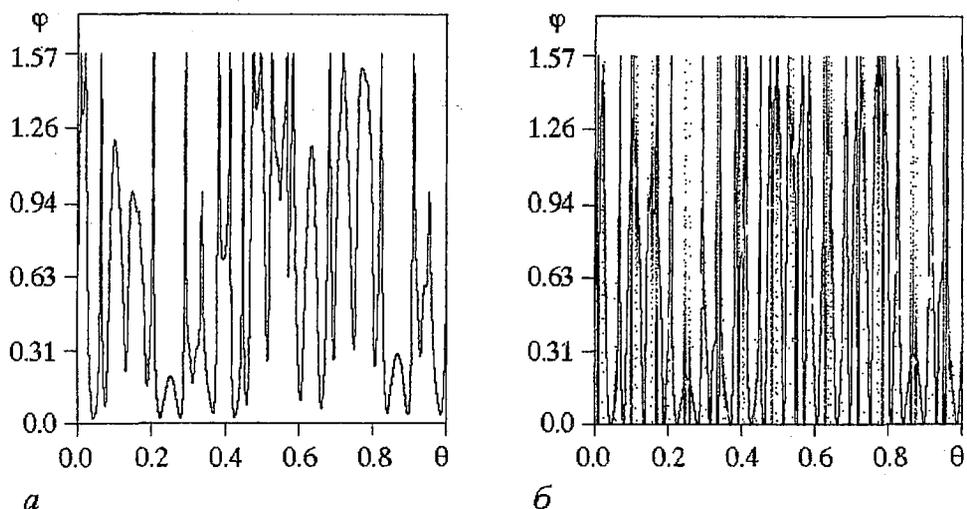


Рис. 3. Зависимость угла между многообразиями на узловой инвариантной кривой от фазовой координаты: *a* – вблизи критического значения при  $\lambda_f=0.556$ ; *b* – при критическом значении  $\lambda_f=0.559$

Рассмотрим процесс потери гладкости многообразиями эргодического «тора» отображения (2) более подробно. Как уже было отмечено, аттрактор отображения (4.1) является репеллером для отображения (4.2) и наоборот, поэтому можно рассматривать их эволюцию в одном и том же фазовом пространстве. По мере приближения к критическому значению  $\lambda_f$  можно наблюдать возникновение множества точек, в которых имеет место касание устойчивых и неустойчивых инвариантных решений. При критическом значении параметра это множество является плотным в силу эргодичности движения по оси фазовой переменной, а аттракторы систем становятся странными. Этот процесс аналогичен сценарию рождения СНА, описанному в работе [5]. Для исходного отображения (2) это означает возникновение плотного на «торе» множества точек, в которых имеет место касание многообразий, соответствующих разным характеристическим показателям. Проиллюстрируем это утверждение прямым вычислением угла между ведущим и неведущим устойчивыми направлениями. При фиксированных параметрах угол в данной точке траектории на «торе» или СНА является функцией фазовой переменной  $\varphi=\varphi(\theta)$ . Зная касательные направления  $\mathbf{k}^1(\theta)$  и  $\mathbf{k}^2(\theta)$  в данной точке, мы можем определить угол как

$$\varphi(\theta) = \arccos(\mathbf{k}^1(\theta)\mathbf{k}^2(\theta))/(\|\mathbf{k}^1\|\|\mathbf{k}^2\|)$$

с дополнительным условием  $\varphi \in [0, \pi/2]$ . Вблизи критического значения параметра  $\lambda_f$  зависимость угла между многообразиями от фазовой координаты приведена на рис. 3, *a*. Функция является кусочно дифференцируемой (существующие на графике изломы связаны с нашим определением угла в интервале  $\varphi \in [0, \pi/2]$ ). В нижней части графика мы можем наблюдать множество точек, в которых график почти касается оси  $\varphi=0$ . Эти касания возникают при достижении критического значения  $\lambda_f$ , их множество становится плотным вследствие эргодичности движения по оси фазовой переменной, а сама зависимость  $\varphi(\theta)$  – фрактальной (рис. 3, *b*), поскольку наличие плотного множества точек, в которых  $\varphi(\theta)=0$ , делает график бесконечно изломанным.

### 3. Численное наблюдение нарушения параболической структуры окрестности инвариантной кривой

Множество точек, в которых имеет место точное касание многообразий, обладает на «торе» нулевой мерой, несмотря на свою плотность. В этом разделе

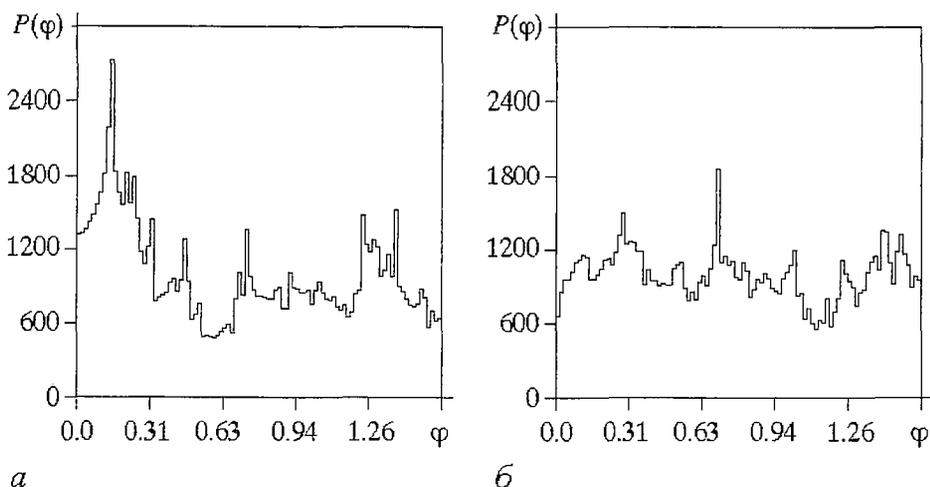


Рис. 4. Гистограммы вероятностных распределений угла между многообразиями для узловой инвариантной кривой с фрактальными многообразиями отображения (2) при  $\lambda=0.6$  (а), и для странного нехаотического аттрактора при  $\lambda=0.66$  (б), вдоль участка траектории длиной  $10^5$  точек

мы будем рассматривать типичные траектории, не принадлежащие этому множеству и имеющие положительную меру, и покажем, что в окрестности таких траекторий имеет место нарушение параболической структуры многообразий в соответствии с рассуждениями, предложенными во введении.

Для определения параболичности (или непараболичности) окрестности данной траектории нам необходимо определить нижнюю границу для угла между многообразиями вдоль траектории  $\varphi_{\min} = \inf_{n=0,1,2,\dots,\infty} \varphi(\theta_n)$ . В численном эксперименте мы имеем дело с участками траекторий конечной длины и поэтому будем исследовать  $\varphi_{\min}(\theta_0, M) = \min_{n=0,1,2,\dots,M} \varphi(\theta_n)$  при достаточно больших значениях  $M$ .

На рис. 4, а, б представлены гистограммы распределения угла вдоль типичных траекторий для «тора» в области недифференцируемости многообразий и для США. Из гистограмм видно, что вероятность отлична от нуля при значениях угла, сколь угодно близких к нулю. В пределе численного эксперимента не удастся обнаружить отличную от нуля нижнюю границу для угла, поскольку угол

$\varphi_{\min}(\theta_0, M)$  оказывается сколь угодно мал по мере того, как мы рассматриваем все более и более длинные участки траектории. Этот результат не зависит от выбора начальных условий. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим поведение функции  $\Phi_M = \max_{\theta_0 \in [0,1]} \varphi_{\min}(\theta_0, M)$ . График этой функции для 100 траекторий со случайным образом выбранными начальными условиями представлен на рис. 5. Из рисунка видно, что при больших  $M$  функция  $\Phi_M$  ведет себя как

$$\Phi_M \propto M^\gamma,$$

где  $\gamma \approx -1$ . Таким образом, типичность непараболических траекторий означает, что для многообразий всех (или почти всех) траекторий при данных значениях параметров возможны ситуации, сколь

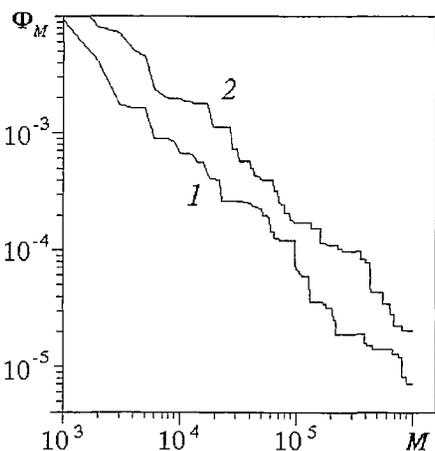


Рис. 5. Значения функции  $\Phi_M$  для системы (2) для 100 случайно выбранных начальных условий и различных  $\lambda$ : 1 – 0.6 (тор с фрактальными многообразиями); 2 – 0.66 (США)

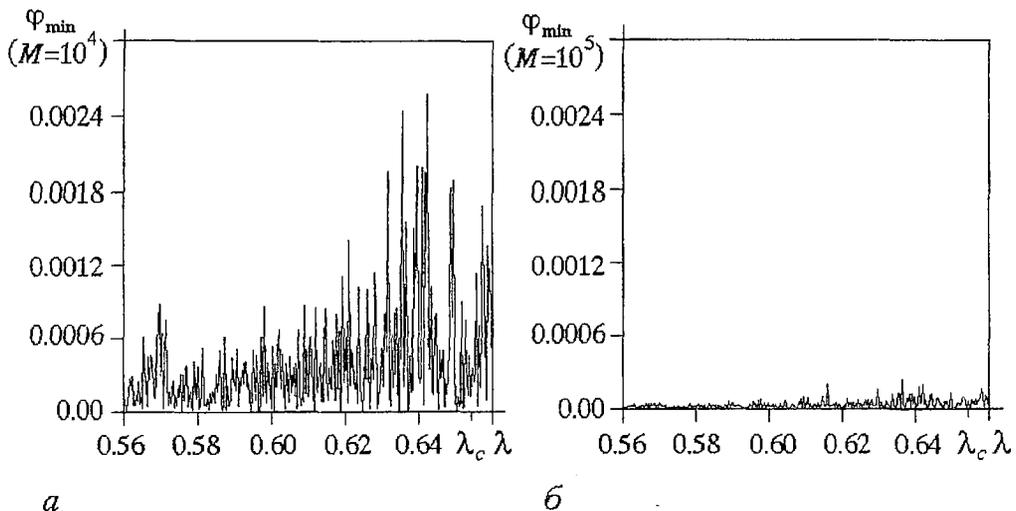


Рис. 6. Влияние увеличения длины рассматриваемого фрагмента траектории на величину минимального угла между многообразиями: зависимость  $\varphi_{\min}$  от  $\lambda$  при двух значениях  $M$

угодно близкие к касательным. Следовательно, теперь мы можем пренебречь зависимостью минимального угла от начальной фазы и писать просто  $\varphi_{\min} = \varphi_{\min}(M)$ .

Аналогичная картина наблюдалась при всех исследованных в работе значениях параметров, при которых аттрактором является узловое «тор» с фрактальными многообразиями или СНА. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим зависимость минимального угла  $\varphi_{\min}(M, \lambda)$  вдоль участка траектории от параметра  $\lambda$  в области существования данных видов аттракторов, и изменение этой зависимости при увеличении длины исследуемой траектории (рис. 6). Из рисунка видно, как существенно (на порядок) уменьшается этот угол при увеличении рассматриваемого количества итераций с  $M=10^4$  до  $M=10^5$ .

### Заключение

В заключение перечислим основные результаты приведенных в работе численных экспериментов.

- Устойчивые двумерные многообразия инвариантной кривой трехмерного гладкого обратимого отображения могут обладать как гладкой, так и фрактальной структурой. И тот и другой случаи существуют на множестве значений положительной меры в пространстве параметров квазипериодически возбуждаемого отображения Хенона. Фрактализация многообразий предшествует разрушению гладкой инвариантной кривой и образованию странного нехаотического аттрактора в системе Хенона.

- Исследование вероятностных распределений угла между устойчивыми многообразиями вдоль траекторий на узловое инвариантной кривой с фрактальными многообразиями и странном нехаотическом аттракторе показывает, что этот угол может быть сколь угодно мал и возможны ситуации, сколь угодно близкие к касанию. Таким образом, в квазипериодической динамике возникает новый тип устройства окрестности устойчивой траектории: устойчивые многообразия нерегулярным образом зависят от координаты точки траектории на «торе», и угол между устойчивыми направлениями, соответствующими различным характеристическим показателям, может оказаться сколь угодно мал по мере того, как рассматриваются все более длинные участки траектории.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-17735) и Федеральной программы «Интеграция» (грант № 696.3)*

## Библиографический список

1. *Sosnovtseva O., Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.* Multiband strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced system // *Phys. Lett. A.* 1996. Vol. 128, № 3. P. 255.
2. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.* Strange attractors that are not chaotic // *Phys.* 1984. Vol. 13D. P. 261.
3. *Ding M., Grebogi C., Ott E.* Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // *Phys. Rev. A* 1989. № 39. P. 2593
4. *Heagy J.F., Hammel S.M.* The birth of strange nonchaotic attractors // *Phys. D.* 1994. Vol. 70. P. 140
5. *Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.* Strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced circle map. // *Phys.* 1995. Vol. D88. P. 176.
6. *Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Пиковский А.С., Селезнев Е.П., Фойдель У.* О динамике нелинейных систем под внешним квазипериодическим воздействием вблизи точки окончания линии бифуркации удвоения тора // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 6. С. 3.
7. *Pikovsky A., Feudel U.* Characterizing strange nonchaotic attractors // *Chaos.* 1995. Vol. 5. P. 253.
8. *Kaneko K.* Doubling of torus // *Prog. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 1806.
9. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic? // *Nonlinearity.* 1993. 6. P.779.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 15.11.99  
после доработки 15.05.00

## ON INVARIANT MANIFOLDS OF STABLE TRAJECTORIES IN QUASIPERIODICALLY FORCED NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

*A.Y. Jalnina*

In terms of the quasiperiodically driven Henon map we show that two-dimensional stable invariant manifolds of the nodal invariant curve of a smooth invertible three-dimensional map can possess both differentiable and fractal structure. The fractalization of manifolds precedes the destruction of a smooth invariant curve and the birth of a strange nonchaotic attractor in modeling system. An observation of the angle between manifolds along trajectories that belong to the invariant curve after its manifolds fractalization and the strange nonchaotic attractor shows an existence of tangencies of the stable manifolds corresponding to different characteristic exponents. This fact means the violation of parabolic structure of manifolds in a small vicinity of the nodal invariant curve.



*Жалнин Алексей Юрьевич* – родился в Балашове (1977). Окончил факультет нелинейных процессов СГУ по специальности физика (2000), аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Автор нескольких публикаций по нелинейной динамике. Область научных интересов – численные методы в качественной теории динамических систем, странные нехаотические аттракторы, управление хаосом.