Изв.вузов «ПНД», т.8, № 3, 2000

УДК 531.19

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ХАОСА

А.Ф. Голубенцев, В.М. Аникин

Рассматриваются хаотические отображения, характеристики которых выражаются через специальные функции – полиномы Чебышева и эллиптические функции. Проиллюстрирована топологическая эквивалентность полиномов Чебышева первого рода произвольной степени G кусочно-линейным эндоморфизмам, сохраняющим на интервале (0,1) меру Лебега. Найдены точные решения нестационарных уравнений Перрона – Фробениуса, отвечающих полиномам Чебышева, и исследована их сходимость к инвариантным распределениям. Показано, что показатель Ляпунова играет роль параметра, характеризующего скорость такой сходимости. Рассмотрены также сопряженные кусочно-линейным эндоморфизмам хаотические отображения, порождаемые изоморфными преобразованиями в форме эллиптических функций Якоби и лемнискатных функций Гаусса.

Введение

Нелинейная монотонная дифференцируемая замена переменных, проводимая в хаотических разностных схемах, приводит к топологически эквивалентным (сопряженным) отображениям [1–5]. Изоморфные преобразования не изменяют фундаментальных свойств хаотических отображений (например, эргодичности и перемешиваемости). Инвариантом при обратимых преобразованиях является и такое число, как показатель Ляпунова [6]. В этом контексте говорят о тождественности двух динамических систем, действующих в различных фазовых пространствах. В то же время при координатных преобразованиях изменяются вероятностные характеристики, вводимые для описания эргодических систем. Это позволяет «конструировать» хаотические датчики псевдослучайных величин с заданными вероятностными плотностями на различных интервалах числовой оси (см., например, [7]). В качестве «базисных» при построении сопряженных отображений естественно использовать кусочно-линейные эндоморфизмы, фундаментальные хаотические свойства которых хорошо изучены (см. библиографию к [2–5]).

Полное аналитическое описание траекторных и вероятностных характеристик новых отображений достигается в случае использования в качестве сопрягающих функций монотонных ветвей периодических функций [7–10]. В статье мы проиллюстрируем методику построения сопряженных отображений, характеристики которых точно описываются некоторыми специальными функциями – полиномами Чебышева первого рода, эллиптическими функциями Якоби и лемнискатными функциями Гаусса. Любопытной особенностью рассматриваемых разностных схем является то, что они могут включать как частный случай известное квадратичное отображение Улама – фон Неймана [11].

1. Полиномы Чебышева первого рода как хаотические отображения

Эргодические и перемешивающие свойства полиномов Чебышева первого рода впервые были отмечены в [12]. Здесь мы покажем, что полиномы Чебышева любого порядка являются *точными* эндоморфизмами в силу существования изоморфной связи с точным же кусочно–линейным («пилообразным») эндоморфизмом

$$x_{n+1} = f_G(x_n) = 1/2[1 - (-1)^{[Gx_n]}] + (-1)^{[Gx_n]}\{Gx_n\},\ x_n \in (0,1). \qquad (1)$$

Отображение (1) на единичном интервале обладает равномерным инвариантным распределением [4] (квадратные скобки в данном случае означают целую часть числа, а фигурные скобки – дробную). В случае G=2 (1) сводится к простейшему пирамидальному отображению (tent map).

В самом деле, проведем в (1) обратимую дифференцируемую замену переменных по правилу

$$x^* = h(x) = \cos\pi x,\ \ x = 1/\pi\cos^{-1}(x^*),\ \ x \in (0,1),\ \ x^* \in (-1,1). \qquad (2)$$

Благодаря периодичности косинуса, кусочно–линейное отображение (1) интервала (0,1) в себя посредством (2) трансформируется в *непрерывное* отображение, определенное на интервале (–1,1)

$$x^*_{n+1} = \cos(G\cos^{-1}x^*_n) = T_G(x^*),\ \ x^* \in (-1,1), \qquad (3)$$

где $T_G(x^*)$ – многочлен Чебышева первого рода степени G. Таким образом, (2) обладает коммутационным свойством: $h \circ f_G = T_G \circ h$.

Взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое соотношением (2) между (1) и (3), позволяет точно вычислить важные характеристики полиномиальных отображений. Независимо от порядка все многочлены Чебышева как хаотические отображения обладают *одной и той же* инвариантной мерой

$$\rho^*(x^*) = |d/dx^* h^{-1}(x^*)| = 1/[\pi(1-x^{*2})^{1/2}],\ \ x^* \in (-1,1). \qquad (4)$$

(Это соотношение следует из обычных правил преобразования вероятностных законов при монотонных координатных преобразованиях [13]). Но при этом каждый полином обладает *индивидуальной* динамикой, характеризуемой, в частности, явным представлением для текущей (n–й) итерации через начальное значение x^*_0. В самом деле, методом индукции легко показать, что

$$x^*_n = x^*_n(n,x^*_0) = \cos(G^n\cos^{-1}x^*_0) = T_{G^n}(x^*_0). \qquad (5)$$

На основе (5), пользуясь общим выражением для показателя Ляпунова [14], найдем его значение для отображений (3) (и, естественно, для (1))

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}(1/n)\ln|d/dx^*_0[x^*_n(n,x^*_0)]|=\lim_{n\to\infty}(1/n)\ln[G^n|\sin(G^n\cos^{-1}x^*_0)|/(1-x^*_0{}^2)^{1/2}]=\ln G.$$

Конкретные выражения для итеративных функций (3) легко получаются из рекуррентного уравнения для полиномов Чебышева [15]

$$T_{k+1}(x^*) = 2x^*T_k(x^*) - T_{k-1}(x^*),\ \ k = 0,1,\ldots,$$

где полагают $T_0(x^*)$=1, $T_1(x^*)=x^*$. Таким образом, к числу полиномиальных хаотических отображений интервала (–1,1) с инвариантной плотностью (4) принадлежат преобразования $T_2(x^*)=2x^{*2}-1$, $T_3(x^*)=4x^{*3}-3x^{*2}$, $T_4(x^*)=8x^{*4}-8x^{*2}-1$, $T_5(x^*)=16x^{*5}-20x^{*3}+5x^*$ и т.д.

Используя линейные замены переменных $x^*=2x-1$ и $x^*=1-2x$, из (3) можно получить хаотические полиномиальные генераторы, определенные на единичном интервале

$$f_G(x) = {}^1\!/_2\{1 \pm T_G(\pm(2x-1))\},\ x \in (0,1). \qquad (6)$$

Хаотические отображения (6) обладают инвариантной плотностью

$$\rho(x) = 2\rho^*(\pm(2x-1)) = 1/\{\pi[x(1-x)]^{1/2}\},\ x \in (0,1). \qquad (7)$$

При G=2 уравнение (6) сводится к отображению Улама – фон Неймана $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$ [11] с инвариантной плотностью (7).

2. Эволюция решений уравнения Перрона – Фробениуса

Получим точные нестационарные решения уравнения Перрона – Фробениуса, отвечающего хаотическим отображениям в форме полиномов Чебышева, и выясним, как трансформируется начальное распределение, задаваемое в виде равномерного закона, под действием этого оператора.

Знание явных траекторных решений (5) для хаотических полиномиальных отображений интервала (–1,1) позволяет записать уравнение Перрона – Фробениуса [3,4], описывающее эволюцию вероятностных распределений под действием рассматриваемого преобразования, в виде

$$\rho^*_n(x^*) = \int_{-1}^{1} \delta(x^* - x^*_n(n,x^*_0))\rho^*_0(x^*_0)dx^*_0, \qquad (8)$$

где $\rho^*_0(x^*_0)$ – начальная плотность, а $\rho^*_n(x^*)$ – преобразованная плотность после n итераций. Полагая, что начальное распределение на интервале (–1,1) является равномерным, то есть $\rho^*_0(x^*_0)={}^1\!/_2$, получим для нестационарного решения эволюционного уравнения следующее представление:

$$\rho^*_n(x^*) = \pi/G^n\int_0^1 \delta(x^* - \cos\pi\xi)\cos(\pi(\xi-1)/G^n)\Sigma_{k=0}^{G^{n-1}-1}\sin(k\pi/G^{n-1}+\pi/G^n)d\xi. \qquad (9)$$

Воспользовавшись формулой [16] для суммы

$$\Sigma_{k=0}^{n}\sin(ku+a) = \sin^{-1}(u/2)\sin((n+1)u/2)\sin(nu/2+a),$$

из (9) найдем

$$\rho^*_n(x^*) = \rho^*(x^*)(\pi/G^n)/\sin(\pi/G^n)\cos((\cos^{-1}x^*)/G^n-\pi/G^n)\sin^2(\pi/G),\quad x \in (-1,1) \qquad (10)$$

где $\rho^*(x^*)$ – инвариантная плотность (4). Полученный результат (10) интересен с различных позиций. Во–первых, он проясняет характер эволюции нестационарного решения к инвариантному распределению; легко видеть, что нестационарные решения сходятся к инвариантному по первому замечательному пределу математического анализа

$$\lim_{n\to\infty}\rho^*_n(x^*) = \rho^*(x^*).$$

Во–вторых, формула (10) верна для всех $G\geq2$. В–третьих, из (10) следует, что скорость установления распределения, инвариантного относительно преобразований (3), зависит от величины $G=e^{\lambda_G}$, связанной с показателем Ляпунова ($\lambda_G=\ln G$). Другими словами, (10) явно иллюстрирует тот факт, что положительный показатель Ляпунова служит не только мерой скорости разбегания (при итерациях) траекторий, стартующих из первоначально близких точек, но и мерой скорости установления инвариантного распределения в том случае, когда начальное распределение отлично от инвариантного: чем больше значение показателя Ляпунова, тем выше скорость сходимости.

Используя соотношение (7), мы можем записать нестационарные решения уравнения Перрона – Фробениуса и для топологически эквивалентных (3) полиномиальных отображений (6), определяемых на единичном интервале (0,1):

$$\rho_n(x)=2\rho^*_n(1-2x)=\rho(x)(\pi/G^n)/\sin(\pi/G^n)\cos((\cos^{-1}x^{1/2})/G^{n-1})\sin^2(\pi/G),\quad x\in(0,1),\qquad (11)$$

где инвариантная плотность $\rho(x)$ определяется формулой (7). В частном случае G=2 из общей формулы (11) следует результат [17], относящийся к отображению Улама – фон Неймана.

Подытожим сказанное в форме следующей ***теоремы***:

1. *Кусочно–линейное «пилообразное» отображение* (1) *и полиномы Чебышева первого рода* (3) *для каждого целого $G\geq2$ являются тождественными точными эндоморфизмами. Соответствующий изоморфизм* (2) *удовлетворяет коммутационному соотношению*

$$h\circ f_G=T_G\circ h.$$

2. *Хаотические отображения на основе полиномов Чебышева любого порядка обладают единой инвариантной плотностью* (4) (*для интервала* (–1,1)) *или* (7) (*для интервала* (0,1)).

3. *Индивидуальная динамика каждого отображения описывается траекториями* (5) *и показателем Ляпунова $\lambda=\ln G$.*

4. *Для начального равномерного распределения сходимость нестационарных решений уравнения Перрона – Фробениуса для полиномов Чебышева как хаотических отображений к инвариантной плотности определяется первым замечательным пределом математического анализа.*

3. Хаотические отображения с инвариантными законами распределения в форме эллиптических функций Якоби

В двух последующих разделах статьи приводятся некоторые результаты применения эллиптических функций Якоби и их частных представлений – лемнискатных функций Гаусса в качестве сопрягающих изоморфизмов при замене переменных в пирамидальном отображении

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n, & x_n\in(0,{}^1\!/_2),\\ 2(1-x_n), & x_n\in({}^1\!/_2,1).\end{cases}\qquad (12)$$

Новые, сопряженные (12) отображения характеризуются инвариантными законами распределения в форме эллиптических интегралов.

Напомним, что эллиптические функции Якоби $\mathrm{sn}(u,k)$, $\mathrm{cn}(u,k)$ и $\mathrm{dn}(u,k)$ определяются обращением соответствующих эллиптических интегралов [18]

$$u=\int_0^{\mathrm{sn}(u,k)}dt/[(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{1/2},$$

$$u=\int_{\mathrm{cn}(u,k)}^{1}dt/[(1-t^2)(k'^2-k^2t^2)]^{1/2},$$

$$u=\int_{\mathrm{dn}(u,k)}^{1}dt/[(1-t^2)(t^2-k'^2)]^{1/2}.$$

Здесь k – модуль эллиптического интеграла (рассматриваются действительные k), $k'^2=1-k^2$. При построении сопряженных отображений используются формулы удвоения аргумента для эллиптических функций, свойства их симметрии, в том числе периодичность. Период $4K$ имеют, например, $\mathrm{sn}(u,k)$ и $\mathrm{cn}(u,k)$, период

$2K$ – $\mathrm{dn}(u,k)$ и квадраты эллиптических функций;

$$K = F(\pi/2,k) = \int_0^{\pi/2} d\psi/(1-k^2\sin^2\psi)^{1/2}$$

– полный эллиптический интеграл.

Сопряженные отображения, получаемые из (1) обратимой заменой переменных

$$x^* = h(x),\ x = h^{-1}(x^*),\ x \in (0,1),\ x^* \in (h(0),h(1)),$$

будем кратко описывать по плану:

а) сопрягающая функция – *изоморфизм*;

б) получаемое сопряженное хаотическое отображение – *сопряженный эндоморфизм*;

в) явное представление для текущей итерации – «*точное решение*»;

г) *инвариантные дифференциальная плотность и интегральный закон распределения*

$$\rho(x^*) = |d/dx^*[h^{-1}(x^*)]|,\quad \Phi(x^*) = \int_{h(0)}^{x^*} \rho(x^*)dx^* = h^{-1}(x^*).$$

Пример расчета названных характеристик приводится в Приложении. Данные, почерпнутые из литературы, отмечаются ссылкой на соответствующий источник.

Отображение 1

а) *Изоморфизм:* $x^* = \mathrm{sn}^2(Kx,k),\ x = \mathrm{sn}^{-1}(x^{*1/2},k)/K,\ x,x^* \in [0,1]$;

б) *разностное уравнение* [9]:

$$x^*_{n+1}=4x^*_n(1-x^*_n)(1-k^2x^*_n)/(1-k^2x^{*2}_n)^2,\ x^*_n\in(0,1),\qquad k^2\in(0,1);$$

в) *точное решение* [9]: $x^*_n = x^*_n(n,x^*_0) = \mathrm{sn}^2(2^n\mathrm{sn}^{-1}(x^{*1/2}_0,k),k)$;

г) *инвариантные плотность и закон распределения:*

$$\rho(x^*) = 1/\{2K[x^*(1-x^*)(1-k^2x^{*2})]^{1/2}\},\quad \Phi(x^*) = F(\sin^{-1}(x^{*1/2}),k)/K.$$

Отображение 2

а) *Изоморфизм:* $x^*=\mathrm{dn}^2(Kx,k),\ x=\mathrm{dn}^{-1}(x^{*1/2},k)/K,\ x\in[0,1],\ x^*\in[k'^2,1],\ k'^2\in[0,1]$;

б) *разностное уравнение* [9]: $x^*_{n+1}=[(k'^2-2k'^2x^*_n+x^{*2}_n)/(k'^2-2x^*_n+x^{*2}_n)]^2,\ x^*_n\in[k'^2,1]$;

в) *точное решение* [9]: $x^*_n = \mathrm{dn}^2(2^n\mathrm{dn}^{-1}(x^{*1/2}_0,k),k)$;

г) *инвариантные плотность и закон распределения:*

$$\rho(x^*) = 1/\{2K[x^*(1-x^*)(x^*-k'^2)]^{1/2}\},\quad \Phi(x^*) = 1-F(\sin^{-1}((1-x^*)^{1/2}/K),k)/K.$$

Отображение 3 [19]

а) *Изоморфизм:* $x^*={}^1/_2[1-\mathrm{cn}(2Kx,k)],\ x = \mathrm{cn}^{-1}(1-2x^*,k)/(2K),\ x,x^*\in[0,1]$;

б) *разностное уравнение:*

$$x^*_{n+1} = 4x^*_n(1-x^*_n)[1-4k^2x^*_n(1-x^*_n)]/\{1-[4kx^*_n(1-x^*_n)]^2\},\ x^*_n \in [0,1],\ k \in [0,1];$$

в) *точное решение:* $x^*_n = {}^1/_2[1-\mathrm{cn}(2^n\mathrm{cn}^{-1}(1-2x^*_0,k),k)]$;

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{2K[x^*(1-x^*)(k'^2+k^2(1-2x^*)^2]\}, \quad \Phi(x^*) = \mathrm{cn}^{-1}(1-2x^*,k)/(2K).$$

Отображение 4

а) Изоморфизм:

$$x^* = \mathrm{cn}(2Kx,k), \ x = \mathrm{cn}^{-1}(x^*,k)/(2K), \ x \in [0,1], \ x^* \in [-1,1]; \tag{13}$$

б) разностное уравнение:

$$x^*_{n+1} = [x^{*2}_n - (1-x^{*2}_n)(k'^2+k^2x^{*2}_n)]/[1-k^2(1-x^*_n{}^2)^2], \ x^*_n \in [-1,1]; \tag{14}$$

в) точное решение:

$$x^*_n = \mathrm{cn}(2^n\mathrm{cn}^{-1}(x^*_0,k),k); \tag{15}$$

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{2K[(1-x^{*2})(k'^2+k^2x^{*2})]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = 1-\mathrm{cn}^{-1}(x^*,k)/(2K). \tag{16}$$

Отображение 5

а) Изоморфизм: $x^* = \mathrm{dn}(Kx,k)]$, $x = \mathrm{dn}^{-1}(x^*,k)/K$, $x \in [0,1]$, $x^* \in [k',1]$;

б) разностное уравнение: $x^*_{n+1} = (k'^2-2k'^2x^*_n+x^*_n{}^4)/(k'^2+2x^{*2}_n-x^*_n{}^4)$, $x^*_n \in [k',1]$;

в) точное решение: $x^*_n = \mathrm{dn}(2^n\mathrm{dn}^{-1}(x^*,k),k)$;

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{K[(1-x^{*2})(x^{*2}-k'^2)]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = 1-\mathrm{dn}^{-1}x^*/K.$$

4. Лемнискатные функции Гаусса в теории одномерных отображений

Отображения, приводимые ниже, получены на основе изоморфизмов в форме лемнискатных функций Гаусса. Эти функции можно рассматривать как частный случай эллиптических функций Якоби для $k^2={}^1/_2$, а именно: лемнискатные косинус и синус определяются соответственно как

$$\mathrm{cl}\, u = \mathrm{cn}(2^{1/2}u, {}^1/_2{}^{1/2}),$$

$$\mathrm{sl}\, u = \mathrm{cl}(\omega^*/2 - u) = \mathrm{cn}(K_0 - 2^{1/2}u),$$

где $\omega^*=2^{1/2}K_0=2\int_0^1 dt/(1-t^4)^{1/2}$ – полупериод лемнискатных функций cl и sl, являющийся периодом квадратов cl^2 и sl^2 этих функций.

Отображение 6 [20]

а) Изоморфизм: $x^*=\mathrm{sl}(\omega^*x/2)$, $x=2\mathrm{sl}^{-1}(x^*)^{1/2}/\omega^*$, $x,x^*\in[0,1]$;

б) разностное уравнение: $x^*_{n+1} = 4x^*_n(1-x^*_n{}^2)/(1+x^*_n{}^2)^2$, $x^*_n\in[0,1]$;

в) точное решение: $x^*_n=\mathrm{sl}^2(2^n\mathrm{sl}^{-1}(x^*_0)^{1/2})$;

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*) = 1/\{\omega^*[x^*(1-x^*)]^{1/2}\}, \quad \Phi(x^*) = 2\mathrm{sl}^{-1}(x^*)^{1/2}/\omega^*.$$

Отображение 7 [20]

а) Изоморфизм: $x^*=\mathrm{cl}\ \omega^* x$, $x=1/[\omega^*(1-x^{*4})^{1/2}]$, $x\in[0,1]$, $x^*\in[-1,1]$;

б) разностное уравнение: $x^*_{n+1}=[2x^{*2}_n-(1-x^{*2}_n)^2]/[2-(1-x^{*2}_n)^2]$, $x^*_n\in[-1,1]$;

в) точное решение: $x^*_n=\mathrm{cl}^2(2^n\mathrm{cl}^{-1}x^*_0)$;

г) инвариантные плотность и закон распределения:

$$\rho(x^*)=1/[\omega^*(1-x^{*4})^{1/2}],\quad \Phi(x^*)=\mathrm{cl}^{-1}x^*/\omega^*.$$

Заключение

Итак, хаотические отображения в форме полиномов Чебышева первого рода являются точными эндоморфизмами, обладающими инвариантными плотностями в форме (4) и (7), а также явными представлениями для итераций (5). Последнее позволяет записать соответствующее уравнение Перрона – Фробениуса в специфическом виде (8), найти его решения (10) и (11) (для различных интервалов задания полиномов), установить закономерности их асимптотического поведения. Полученное представление для решения эволюционного уравнения позволяет трактовать показатель Ляпунова как меру скорости сходимости нестационарного распределения к инвариантному.

Большинство рассмотренных выше нелинейных преобразований переменной в базисном пирамидальном отображении на основе эллиптических функций Якоби содержат зависимость от параметра – модуля эллиптического интеграла. Вариация этого параметра может влиять на границы отрезка задания нового отображения. Однако в силу взаимно однозначного соответствия с исходным хаотическим эндоморфизмом новое отображение может в определенном смысле только «копировать» поведение базисного эндоморфизма, то есть демонстрировать «чистый хаос» для некоторой *области изменения* параметра без проявлений качественного изменения динамики.

В примерах 1 и 2 мы, по существу, аналитически доказали хаотичность отображений, приведенных в [9] под номерами 10 и 11, «снабдив» их инвариантными распределениями.

Интересно и то, что известное отображение Улама – фон Неймана, $x^*_{n+1}=4x^*_n(1-x^*_n)$, определенное на интервале (0,1), и его «перезапись» (посредством линейных преобразований) на интервал (–1,1), представляемая полиномом Чебышева второго порядка, включаются в семейство «параметрических» **отображений 1**, **3** и **4**, отвечая критическому значению параметра $k=0$.

Авторы благодарят рецензента за обсуждение работы.

Приложение

Рассмотрим более подробно, как рассчитываются характеристики сопряженных отображений на примере **отображения 4** (см. уравнения (13) – (16)). Функция $x^*=\mathrm{cn}(2Kx,x)$ на отрезке [0,1] является монотонно убывающей, принимая значение 1 при $x=0$ и значение –1 при $x=1$. Поэтому, делая замену переменных в базисном отображении (12) согласно (13), получим

$$\mathrm{cn}^{-1}(x^*_{n+1},k)/(2K)=\begin{cases}2[1-1/(2K)]\mathrm{cn}^{-1}(x^*_n,k) & x^*_n\in(-1,0),\\ 2\mathrm{cn}^{-1}(x^*_n,k)/(2K), & x^*_n\in(0,1).\end{cases}$$

Умножая полученное соотношение на $2K$ и учитывая, что функция $\mathrm{cn}(u,k)$ имеет период $4K$, придем от кусочно-линейного отображения (12) к отображению, описываемому *единым аналитическим выражением* для всего интервала его определения

$$x^*_{n+1} = \mathrm{cn}(2\mathrm{cn}^{-1}(x^*_n,k),k), \qquad x^*_n \in (-1,1). \tag{A1}$$

Представление отображения в форме (A1) позволяет, во–первых, получить явное выражение для любой итерации через начальное значение и, во–вторых, переписать отображение в виде дробно–рациональной функции. В самом деле, методом математической индукции легко показать, что точное решение разностного уравнения (A1) имеет вид (15). Так, для n=0 из (A1) имеем

$$x^*_1 = \mathrm{cn}(2\mathrm{cn}^{-1}(x^*_0,k),k), \qquad x^*_0 \in (-1,1). \tag{A2}$$

Предполагая справедливость (15) для некоторого $n=k$, с учетом (A1) получим для $n=k+1$

$$x^*_{k+1}=\mathrm{cn}(2\mathrm{cn}^{-1}(x^*_k,k),k)=\mathrm{cn}(2\mathrm{cn}^{-1}(\mathrm{cn}(2^k\mathrm{cn}^{-1}(x^*_0,k),k),k),k)\equiv\mathrm{cn}(2^{k+1}\mathrm{cn}^{-1}(x^*_0,k),k),$$

что и доказывает (15).

Применяя, далее, в (A1) формулу удвоения аргумента для функции $\mathrm{cn}(u,k)$ (параметр k при записи опускается)

$$\mathrm{cn}2u=(\mathrm{cn}^2u-\mathrm{sn}^2u\cdot\mathrm{dn}^2u)/(1-k^2\mathrm{sn}^4u)=[\mathrm{cn}^2u-(1-\mathrm{cn}^2u)(k'^2+k^2\mathrm{cn}^2u)]/[1-k^2(1-\mathrm{cn}^2u)^2],$$

получим представление отображения в виде дробно–рациональной функции (14).

Наконец, дифференцируя функцию

$$h^{-1}(x^*) = \mathrm{cn}^{-1}(x^*)/(2K),$$

находим инвариантную плотность, ассоциированную с данным отображением, а затем и соответствующий закон распределения (см. (16)).

В результате аналогичных действий определяются характеристики и всех других дробно–рациональных хаотических отображений, представленных в статье.

Библиографический список

1. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
2. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
3. *Якобсон М.В.* Эргодическая теория одномерных отображений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / Науч. ред. Р.В. Гамкрелидзе. Сер. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 2. С. 204.
4. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
5. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986.
6. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Ляпуновский характеристический показатель для динамических систем // Труды московского математического общества. 1968. Т. 19. С. 179.
7. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* The explicit solutions of Frobenius – Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. of Bifurc. and Chaos. 1998. Vol. 8, № 5. P. 1049.
8. *Шапиро А.П., Луппов С.П.* Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии. М.: Наука, 1983.
9. *Katsura Sh., Fukuda W.* Exactly solvable models showing chaotic behavior// Physica.1985. Vol. 130A, № 3. P. 597.
10. *Голубенцев А.Ф., Аникин В.М.* Инвариантные меры для хаотических разностных уравнений с точными решениями // Вопросы прикладной физики: Межвузовский научный сборник. Саратов: Изд–во Сарат. ун–та, 1998. Вып. 4. С. 29.
11. *Ulam S.M., von Neumann J.* On combination of stochastic and deterministic processes // Bulletin of the American Mathematical Society. 1947. Vol. 53, № 11. P. 1120.
12. *Adler R.L., Rivlin T.J.* Ergodic and mixing properties of Chebyshev polynomials // Proceedings of the American Mathematical Society. 1964. Vol. 15, № 5. P. 794.

13. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.

14. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.

15. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970.

16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. С. 63.

17. *Falk H.* Evolution of the density for a chaotic map // Physics Letters. 1984. Vol. 105, № 3. P. 101.

18. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.

19. *Tsuchiya T.* An exactly solvable difference equation that give pure chaos for a continuous range of a parameter // Zeitschrift fur Naturforschung. 1984. Vol. A39, № 1. P. 80.

20. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* Gauss lemniscate functions as exact solutions for chaotic maps // Nonlinear dynamics and chaos. Application in Physics, Biology and Medicine. Saratov: College, 1996. P. 75.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 19.01.2000
после доработки 28.03.2000

SPECIAL FUNCTIONS IN THE THEORY OF DETERMINISTIC CHAOS

A.F. Goloubentsev, V.M. Anikin

It is illustrated the Chebyshev polynomials are the exact endomorphisms that are conjugated to the piecewise linear chaotic transformations. Explicit nonstationary solutions of the Perron – Frobenius equations for the chaotic Chebyshev maps are found. Their convergence to invariant densities is analyzed. The results allow one to treat the Lyapunov exponent as the rate of such convergence. Some chaotic maps that are monotonically related to the tent map by Jacobian elliptic functions and Gaussian lemniscate ones and characterized by invariant distributions in the form of elliptic integrals are constructed.

Голубенцев Александр Федорович – родился в Смоленске (1933). Окончил Саратовский университет (1956). С 1959 года работает в СГУ. Доктор физико-математических наук, профессор. С 1988 года – заведующий кафедрой вычислительной физики и автоматизации научных исследований. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Автор монографий «Шумы и флуктуации в электронных потоках», «Введение в статистическую электронику», «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», «Эмиссионные и шумовые свойства неоднородных эмиттеров», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Член диссертационных советов СГУ и СГТУ.

Аникин Валерий Михайлович – родился в Аткарске Саратовской области (1947). Окончил Саратовский университет (1970). После окончания СГУ работал в научно-исследовательском институте механики и физики СГУ, с 1984 года – на кафедре вычислительной физики и автоматизации научных исследований СГУ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Область научных интересов – математическое моделирование стохастических и хаотических процессов. Соавтор монографий «Статистические модели квазирегулярных радиофизических и оптических структур», «Математические модели контактов организма человека с чужеродными агентами», а также учебных пособий по вычислительным методам и программированию. Ученый секретарь докторского диссертационного совета СГУ по специальностям радиофизика, оптика, физика полупроводников и диэлектриков.

E-mail: Anikinvm@info.sgu.ru