

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Ж.Т. Жусубалиев

Исследуется динамика четырехмерной релейной системы с гистерезисом. В плоскости параметров определены области режимов периодических и хаотических колебаний. Изучаются закономерности возникновения периодических движений, устанавливаются возможные их бифуркации. Анализируются причины возникновения недетерминированных режимов

Введение

Релейные системы с гистерезисом представляют важный класс нелинейных автоматических систем, широко применяемых в различных областях техники [1–11]. Основным режимом работы систем указанного класса является режим автоколебаний, которые поддерживаются не внешним периодическим воздействием, а определяются свойствами самой системы [1].

Исследованию колебательных свойств релейных систем с гистерезисом посвящены многочисленные работы. В большинстве публикаций основное внимание уделяется изучению лишь периодических движений. Результатов, относящихся к релейным системам со сложной динамикой, значительно меньше. Некоторые данные можно найти в работах [2,3,5–9], в которых изучались конкретные системы управления. К числу первых работ, где были обнаружены аperiodические колебания, соответствующие хаотическому поведению, как указано в [12], следует отнести работы А.С. Алексеева [2,3]. В работе [3] методом точечных отображений исследовалась динамика релейного регулятора температуры с зоной опережения. Были найдены области параметров, где существуют сложные периодические колебания, которые при изменении параметров претерпевают бесконечное число бифуркаций удвоения периода, завершающихся установлением аperiodического движения. В [12] показано, что диапазон изменения параметра, в котором наблюдается хаотическое поведение, прорежен интервалами, где реализуются периодические колебания, причем области периодичности расположены всюду плотно, то есть в любой сколь угодно малой окрестности параметров, соответствующих хаотическим колебаниям, имеются устойчивые предельные циклы. Такое поведение, в частности, является типичным для систем, движение которых точно или приближенно описывается одномерным точечным отображением с гладким максимумом [12–14].

В работах [5,6] исследуется процесс стабилизации космического аппарата относительно заданного положения оси его ориентации, осуществляемой с

помощью релейной системы управления. В [5] показано, что управляющее воздействие может возбуждать упругие колебания конструкции, «в результате чего возникает взаимосвязь системы с упругими колебаниями, а при существенной взаимосвязи динамика становится хаотической».

Работы Н.С. Постникова [7–9] посвящены исследованию динамики ядерных реакторов с релейной системой управления. В этих работах показано, что в случае, когда объект управления колебательно–неустойчивый, в релейных системах с гистерезисом наряду с периодическими могут возникать и хаотические колебания. В работе [9] для систем второго и третьего порядка с колебательно–неустойчивой линейной частью в плоскости параметров построены области периодичности и хаоса. Рассмотрена задача выбора закона управления обратной связи, обеспечивающего в системах произвольного порядка хаотические колебания с такой же средней частотой переключения релейного элемента, что и в двумерной или трехмерной системе, выбранной в качестве эталона.

Можно ожидать, что в релейных системах с гистерезисом и колебательно–неустойчивой линейной частью возникновению хаоса предшествуют сложные бифуркационные переходы аналогичные тем, что изучались в [12–14] при анализе автоколебательных систем с хаотической динамикой. Однако подробное изучение бифуркаций и механизмов хаотизации колебаний в работах [7–9] проведено не было. По–видимому, в [7–9] неявно предполагалось, что усложнение предельных циклов при изменении параметров происходит по типичным сценариям [12–14].

Надо заметить, что в релейных системах с гистерезисом и зоной нечувствительности переходы к хаосу могут иметь некоторые особенности, связанные с S –бифуркациями [15,16]. Это следует из того факта, что правые части уравнений, описывающих поведение таких систем, являются разрывными. Как известно, в динамических системах с разрывными правыми частями возможны специфические нарушения условий существования периодического движения, связанные с изменением числа участков фазовых траекторий, из которых сшивается траектория этого движения. Подобные нарушения топологической структуры фазового пространства получили название S –бифуркаций периодических решений [15,16] («border–collision bifurcations» [17]).

Возможность таких бифуркаций в двумерной и трехмерной модели релейной системы с гистерезисом и зоной нечувствительности усматривается при анализе фазовых траекторий, приведенных в [7–9]. Исследование S –бифуркаций в релейных системах с гистерезисом наталкивается на серьезные математические сложности. В конкретных прикладных задачах можно воспользоваться результатами, приведенными в [15,16].

С другой стороны, как будет показано ниже (см. также [18,19]), в релейных системах с гистерезисом типичной является ситуация, когда в широких диапазонах изменения параметров существует множество локально–устойчивых предельных циклов с различными динамическими характеристиками. Они возникают жестко, например, через седло–узловую бифуркацию, при изменении параметров могут претерпевать конечную либо бесконечную последовательность прямых и обратных бифуркаций удвоения, завершающихся переходом к хаосу. Кроме того, хаотизация колебаний может происходить через возникновение и последующее разрушение квазипериодического движения, соответствующего в фазовом пространстве двумерному тору. В результате чего имеются области параметров, где наряду с локально–устойчивыми предельными циклами существуют режимы хаотических или квазипериодических колебаний.

При таких условиях воздействие внешнего шума, даже сколь угодно малого, может привести к внезапному переходу от одного динамического состояния к другому с различными характеристиками, в частности, от детерминированной динамики к хаотической [20,21].

В представленной работе исследуются динамические свойства релейной системы с гистерезисом, описываемой четырехмерной кусочно–линейной автономной динамической системой. Цель настоящей работы состоит в детальном изучении закономерностей возникновения различных типов движений, установле–

нии возможных бифуркаций и анализе сценариев усложнения колебаний, приводящих к хаотизации движений.

1. Постановка задачи

В качестве конкретного примера релейной системы с гистерезисом рассмотрим преобразователь постоянного напряжения, схема замещения которого приведена на рис. 1. Энергетическая часть системы содержит транзисторный преобразователь (ТП) постоянного напряжения, работающий в ключевом режиме, и сглаживающие LC -фильтры. Сигнал обратной связи ξ , несущий информацию об отклонении выходного напряжения U_1 от заданного значения U_{ref} , подается на релейный элемент с гистерезисом, который формирует прямоугольные импульсы для управления ключевыми элементами преобразователя. Такие преобразователи широко применяются в технике, например, в системах энергообеспечения космических и летательных аппаратов, испытательных стендах для экспериментального исследования низкотемпературных и высокотемпературных сверхпроводников, в электротехнологии, во вторичных источниках электропитания радиотехнических и вычислительных комплексов, в усилителях низкой частоты, электроприводах постоянного и переменного тока [22,23].

Рассматриваемая система описывается системой кусочно-линейных автономных дифференциальных уравнений вида [18]

$$dX/dt = G(X), \quad X = (x_1, x_2, x_3, x_4)', \quad G = (g_1, g_2, g_3, g_4)' \quad (1)$$

Здесь

$$g_1 = \eta(-x_1 - x_2 + \Omega),$$

$$g_2 = \gamma[x_1 - 1/2[1 + K_k^{(F)}(\xi(X))]x_3],$$

$$g_3 = \mu/2[1 + K_k^{(F)}(\xi(X))]x_2 - \nu x_3 - \mu x_4,$$

$$g_4 = \lambda(x_3/\alpha - x_4/\beta),$$

$$K_k^{(F)} = K_{k-1}^{(F)} \text{sign}[\chi_0 + (-1)^{N_k-1} \xi(X)], \quad K_0^{(F)} = -1,$$

$$N_k = N_{k-1} + 1/2[1 - \text{sign}(K_k^{(F)} K_{k-1}^{(F)})], \quad N_0 = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

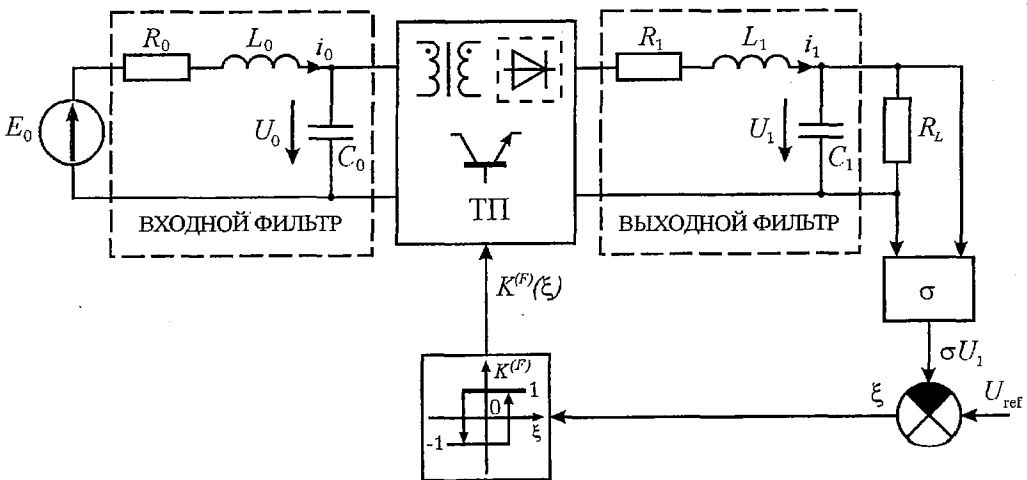


Рис. 1

$$\xi(X) = \sigma x_4 - \vartheta,$$

где

$$x_1=R_0 i_0/E_*, x_2=U_0/E_*, x_3=R_0 i_1/E_*, x_4=U_1/E_*, \eta=R_0/L_0, \Omega=E_0/E_*,$$

$$\gamma=1/(C_0 R_0), \mu=R_0/L, \nu=R_1/L, \lambda=1/(C R_*), \beta=R_L/R_*, \alpha=R_1/R_*, \vartheta=U_{ref}/E_*.$$

Здесь i_0, i_1, U_0, U_1 – токи в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах входного и выходного фильтров; L_0, L_1, C_0, C_1 – индуктивности и емкости фильтров; R_0, R_1 – сопротивления, характеризующие потери в фильтрах и преобразователе; E_0, R_L – входное напряжение и сопротивление нагрузки; σ – коэффициент передачи датчика обратной связи по выходному напряжению; $K_{k-1}^{(F)}, K_k^{(F)}$ – значения сигнала ($K^{(F)}=-1$ или $K^{(F)}=1$) на выходе релейного элемента соответственно в областях $t_{k-1}<t<t_k$ и $t_k<t<t_{k+1}$, где $t_k, k=1,2,\dots$ – моменты переключения релейного элемента, соответствующие переходу сигнала ошибки $\xi(X)$ через пороговые значения $+\chi_0$ или $-\chi_0$ в одном направлении. Знак штрих «'» в (1) обозначает операцию транспонирования.

В исследованиях варьировались величины E_0, R_L , соответствующие нормированным параметрам Ω, β динамической системы (1), а остальные параметры полагались фиксированными: $R_0=0.5$ Ом, $R_1=2.1$ Ом, $L_0=10^{-3}$ Гн, $L_1=6 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C_0=3 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_1=2.5 \cdot 10^{-5}$ Ф, $U_{ref}=2.4$ В, $\chi_0=0.25$, $\sigma=0.1$. Базовые величины E_*, R_* при нормировании динамических переменных и варьируемых параметров принимались равными $E_*=1$ В и $R_*=1$ Ом.

Величина гистерезиса релейного элемента и параметры фильтра выбираются из условий обеспечения заданной точности регулирования, малого уровня амплитуды переменной составляющей тока и напряжения силовых фильтров, высокого быстродействия [22, 23]. С другой стороны, параметры фильтра оказывают существенное влияние на массогабаритные и энергетические показатели, а минимальное значение гистерезиса релейного элемента ограничивается максимально допустимой частотой переключения преобразователя из-за увеличения динамических потерь в ключевых элементах с ростом частоты [22, 23].

Выбор из всей совокупности параметров тех, которые являются варьируемыми, определялся тем, что основными дестабилизирующими факторами, влияющими на динамические характеристики системы в процессе эксплуатации, обычно являются изменение тока нагрузки (величины R_L) и вариации входного напряжения. Диапазон изменения тока нагрузки зависит от режимов работы устройств, получающих питание от преобразователя [22, 23].

Исследование динамической системы (1) было сведено к изучению свойств четырехмерного отображения [18]

$$X_k = F(\tau_k, X_{k-1}), \quad (2)$$

где $X_k=X(t_k)$, $\tau_k=t_k-t_{k-1}$ – наименьший корень уравнения

$$(-1)^{k-1} \chi_0 + \vartheta - U X_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad U = (0, 0, 0, \sigma). \quad (3)$$

Совокупность рекуррентных соотношений (2) и уравнение (3) определяют отображение сдвига в пространстве той же размерности, что и фазовое пространство.

Введем некоторые понятия. Пусть $X_c(t)$ – периодическое движение автономной системы (1) с периодом T

$$X_c(t+T) \equiv X_c(t). \quad (4)$$

В силу (4) с ростом t функция $\xi(X_c(t))$ будет также изменяться периодически

$$\xi(X_c(t+T)) \equiv \xi(X_c(t)),$$

проходя пороговые значения $+\chi_0$ и $-\chi_0$ в моменты $t=t_k$

$$(-1)^{k-1}\chi_0 + \xi(X_c(t_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом выходной сигнал релейного элемента $K_c^{(F)}(\xi(X_c(t)))$ представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов. Период T периодического движения $X_c(t)$ определяется как сумма промежутков времени τ_k движения изображающей точки между последовательными переключениями релейного элемента

$$T = \sum_{k=1}^m a_k, \quad a_k = \tau_{2k-1} + \tau_{2k}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Здесь число переключений s релейного элемента на периоде T четно и равно $2m$, а τ_{2k-1} , τ_{2k} – длительности соответственно положительного (отрицательного) и отрицательного (положительного) импульсов. Движение с таким периодом здесь и далее будем называть m -циклом.

Предельные циклы при анализе бифуркаций находились численно из решения системы трансцендентных уравнений относительно $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$

$$\Phi_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (5)$$

полученной на основе (2), (3) и условия периодичности аналогично тому, как это делалось в [20, 21, 24]. Такой алгоритм позволяет находить как устойчивые, так и неустойчивые m -циклы. Однако решение системы (6) представляет трудную задачу. Здесь лишь отметим, что автор не ограничился только одним методом. Получение информации, приведенной в статье, потребовало привлечения широкого набора методов вычислительной математики. В частности, так как указанный алгоритм является локальным, то пришлось его дополнять итерационной процедурой поиска устойчивых предельных циклов, являющейся, по существу, модификацией метода установления, которая оказалась наиболее эффективной, если не единственной, при анализе эволюции предельных циклов с большим периодом.

Устойчивость предельных циклов исследовалась на основе теории, изложенной в [24]. Как известно, исследование локальной устойчивости периодических решений динамических систем с разрывными правыми частями сводится к рассмотрению линеаризованных уравнений относительно малых возмущений с разрывным решением [25]. Величина скачка в точках разрыва определяется матрицей пересчета [24–26]. Однако получение матрицы пересчета является сложной задачей. В некоторых случаях можно использовать результаты, приведенные в работах М.А. Айзермана, Ф.Р. Гантмахера [25] и А.Ф. Филиппова [26], где при выводе матрицы пересчета применен геометрический подход. В отличие от [25, 26], в [24] для этой цели был использован аналитический подход, основанный на применении обобщенных функций. В [24] было показано, что формирование матрицы пересчета в общем случае некорректно, на что многие авторы при анализе динамических систем с разрывными правыми частями не обращают внимания. При этом в [24] было найдено условие, определяющее применимость матрицы пересчета, полученной в [25]. Методология, использованная в [24] для неавтономных динамических систем, автором обобщена на случай автономных динамических систем с разрывной правой частью.

Заметим, что в автономной системе с n -мерным фазовым пространством один из мультипликаторов ρ_k , $k = \overline{1, n}$ основной матрицы Φ_n , то есть корней уравнения

$$\det(\Phi_m - \rho E) = 0,$$

всегда равен единице. Поэтому число мультипликаторов, определяющих локальную устойчивость предельных циклов, будет равно $n-1$.

2. Бифуркации и хаотические колебания в релейной системе с гистерезисом

Пусть $\Pi = \{(\Omega, \beta) : \Omega_{\min} < \Omega < \Omega_{\max}, \beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}\}$ – диапазон вариации параметров Ω, β динамической системы (1). Пусть $P = (\Omega, \beta), P \in \Pi$ – фиксированный набор параметров (точка в Π). Разбиение плоскости параметров Π динамической системы (1) на области различных режимов колебаний приведено на рис. 2. Здесь $\Pi_k^m \subset \Pi, k=0,1,2,\dots; m \geq 1$ – односвязные множества, такие что при любых $P \in \Pi_k^m$ существует локально устойчивое периодическое движение $X_c(t, P)$ (m -цикл), непрерывное по параметрам в Π_k^m . Индекс k введен для различия множеств, которым отвечают движения с одинаковой периодичностью. Разным движениям, одновременно существующим при фиксированных P , соответствуют разные Π_k^m . На рисунке отражены только те области, которые являются относительно большими в Π . Область хаотичности обозначена через $\tilde{\Pi}$. Периодическое движение, соответствующее рабочему режиму колебаний, назовем основным движением [27], а то множество из Π_k^m , на котором определено это движение – основным

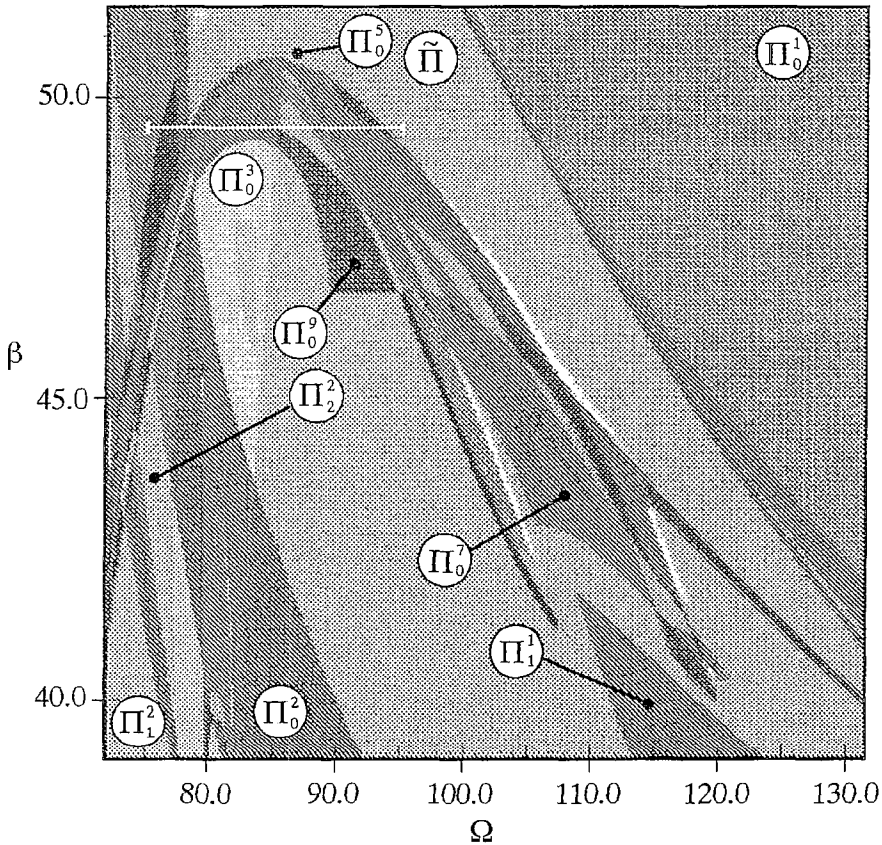


Рис. 2

множеством Π_0 . Выбор основного множества Π_0 определяется требованиями к качеству функционирования системы [27]. Не исключен вариант, когда основной может являться область, отвечающая режиму хаотических колебаний. Так, например, в работах [7–9] на ряде конкретных примеров указан случай, когда использование в качестве рабочего режима хаотических колебаний (вместо периодических) существенно улучшает показатели качества функционирования системы. На рисунке хорошо видно, что почти все Π_k^m взаимно пересекаются, следовательно, некоторые из них пересекаются непусто с Π_0 : $\Pi_k^m \cap \Pi_0 \neq \emptyset$, $k=1,2,\dots; m \geq 1$.

В работах [28,29], как обобщение исследований [20,21], было введено понятие нормальных структур объектов. Пусть S – структура релейной системы с гистерезисом (см. рис.1), поведение которой описывается динамической системой (1). Структура S нормальна, если

$$\Pi_0 \cap \left[\bigcup_{k,m} \Pi_k^m \setminus \Pi_0 \right] = \emptyset, \quad \bigcap_{k,m} \Pi_k^m \neq \emptyset \quad (6)$$

или

$$\Pi_0 \cap \left[\bigcap_{k,m} \Pi_k^m \right] = \emptyset, \quad \bigcup_{k,m} \Pi_k^m \neq \emptyset. \quad (7)$$

Выполнение условия (6) или (7) означает, что для любых $P \in \Pi_0$ существует единственное устойчивое движение и, следовательно, это движение глобально устойчиво.

Как видно из рис. 2, структура объекта, на которой определена динамическая система (1), является аномальной. Представим множество Π_0 в виде $\Pi_0 = \Pi_{\text{conv}} \cup (\Pi_0 \setminus \Pi_{\text{conv}})$. Здесь Π_{conv} – та часть Π_0 , где существует единственное движение. Множество Π_{conv} называют областью конвергентности. Оно может быть односвязным, не односвязным или пустым [29]. Для практических приложений важно не столько знание всей области конвергентности, сколько оценка ее радиуса. Пусть Π_{conv} – непустое множество и $P_0 \in \Pi_{\text{conv}}$ – базовые (номинальные) значения параметров [27]. Под *радиусом области конвергентности* r_{conv} понимается минимальное расстояние от базовой точки P_0 до границы Π_{conv} [29].

Если радиус конвергентности мал, то даже незначительные вариации параметров или малые внешние случайные воздействия могут привести к катастрофической смене характера динамики, например, к внезапному переходу от одних устойчивых циклов к другим с различными динамическими характеристиками, либо к катастрофической хаотизации колебаний, что чрезвычайно опасно для функционирующей системы.

Опираясь на двухпараметрическую диаграмму (см. рис. 2), несколько подробнее остановимся на анализе бифуркаций при движении по параметрам. Для определенности анализ проведем в сечении $L = \{(\Omega, \beta): 72.0 < \Omega < 110.0; \beta = 49.5\}$. Выбор конкретной траектории деформации системы (1) в плоскости параметров Π связан с тем, что сечение L пересекает большинство областей, составляющих диаграмму, приведенную на рис. 2. На рис. 3 изображена бифуркационная диаграмма, качественно иллюстрирующая особенности переходов от движений одного типа к движениям другого при непрерывном изменении параметра Ω .

Бифуркационная диаграмма строилась с помощью специального алгоритма. Для каждого значения параметра производился поиск движений с начальных условий, генерируемых многократно случайным образом, а также с начальных условий, отвечающих точкам фазового пространства динамической системы (2), лежащим на траекториях движений, найденных при предыдущем значении параметра. В алгоритме использованы эвристические процедуры определения направления движения по параметру в пределах заданного диапазона его вариации и динамического изменения числа начальных условий, генерируемых случайно, учитывающие информацию, полученную на предыдущих шагах.

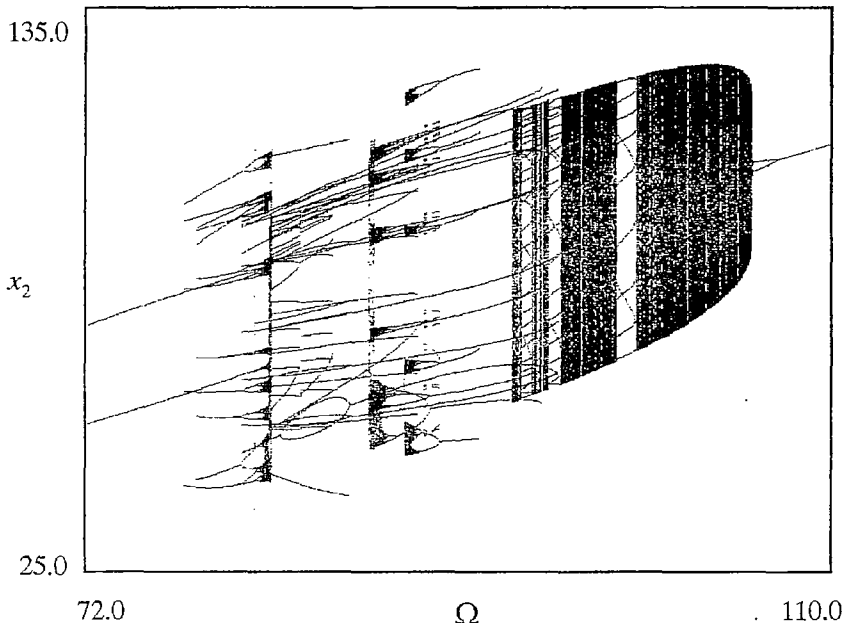


Рис. 3

Результаты бифуркационного анализа для участка $\hat{L} = \{(\Omega, \beta): 75.0 < \Omega < 95.0; \beta = 49.5\}$, $\hat{L} \subset L$, обозначенном на рис. 2 отрезком прямой, сведены в таблицу. В первом столбце таблицы приведено обозначение ветви, к которой относятся устойчивые m -циклы, указанные во втором столбце; в третьем – приведены диапазоны изменения Ω , в которых существуют локально-устойчивые m -циклы, составляющие ветвь. Последние два столбца содержат информацию о поведении системы в точках границ ветвей, где используются следующие обозначения: «+» – точки, отвечающие параметрам седло-узловой бифуркации; «-» – точки, к которым при движении по параметру сгущается последовательность бифуркаций удвоения периода; через «*» обозначены два особых случая поведения системы на границах соответствующих ветвей, которые подробно рассматриваются далее. Данные этой таблицы представлены на рис. 4 в виде диаграммы, названной в [20,21] картиной ветвления. Заметим, что на рис. 4 и в таблице указаны не все ветви. В частности, на рис. 4 не приведены ветви, соответствующие областям существования резонансных циклов, и ветвь, начинающаяся с 2-цикла (см. рис. 3).

Все ветви, составляющие эту диаграмму, обладают некоторыми общими свойствами, а именно:

- каждая ветвь $V_{m,k}$ представляет собой совокупность диапазонов существования устойчивых $2^n m$ -циклов, $n=0, 1, \dots, p$. Величина p может быть конечной или бесконечной;

- если ветвь состоит более чем из одного такого диапазона, то есть $p \geq 1$, то во всех внутренних граничных точках диапазонов существования устойчивых $2^n m$ -цикла и $2^{n+1} m$ -цикла, $n=0, 1, \dots, p-1$ происходит потеря устойчивости $2^n m$ -цикла и мягкое возникновение $2^{n+1} m$ -цикла через бифуркацию удвоения периода.

Помимо количественных показателей m и k ветви $V_{m,k}$ качественно отличаются по характеру потери устойчивости во внешних граничных точках – точке возникновения предельного цикла с минимальным m и точке исчезновения цикла с максимальным m в пределах существования ветви. По этому признаку все рассматриваемые ветви можно разбить на несколько классов.

1. Ветви $V_{9,2}$, $V_{15,1}$, $V_{21,1}$, $V_{27,1}$ и $V_{36,1}$ начинаются с циклов, возникающих через седло-узловую бифуркацию. При уменьшении параметра Ω m -цикл претерпевает

последовательность бифуркаций удвоения периода, заканчивающуюся установлением апериодического движения.

Таблица

Ветви	m	Ω	Характер потери устойчивости на границах ветвей	
			Правая граница	Левая граница
$V_{3,1}$	3	$67.36 < \Omega < 84.97732$	*	+
	6	$84.97732 < \Omega < 84.97745$		
$V_{5,1}$	5	$76.01 < \Omega < 79.76$		
	10	$79.76 < \Omega < 80.39$		
	20	$80.39 < \Omega < 80.57$	*	-
	40	$80.57 < \Omega < 80.61$		
$V_{5,1}^*$	5	$89.21 < \Omega < 91.17$		
	10	$88.36 < \Omega < 89.21$	-	+
	20	$88.14 < \Omega < 88.36$		
$V_{7,1}$	7	$77.31 < \Omega < 79.65$		
	14	$79.65 < \Omega < 80.41$	+	-
	28	$80.41 < \Omega < 80.59$		
$V_{7,1}^*$	7	$88.73 < \Omega < 94.18$		
	14	$87.11 < \Omega < 88.73$	-	+
	28	$86.74 < \Omega < 87.11$		
$V_{9,1}$	9	$84.84 < \Omega < 94.92$		
	18	$81.53 < \Omega < 84.84$	+	+
	9	$78.54 < \Omega < 81.53$		
$V_{9,2}$	9	$80.17 < \Omega < 80.32$		
	18	$80.11 < \Omega < 80.17$	-	+
	36	$80.09 < \Omega < 80.11$		
$V_{11,1}$	11	$79.44 < \Omega < 88.68$	+	+
$V_{13,1}$	13	$79.87 < \Omega < 84.13$	+	+
$V_{15,1}$	15	$88.43 < \Omega < 88.49$	-	+
	30	$88.40 < \Omega < 88.43$		
$V_{21,1}$	21	$88.68 < \Omega < 89.24$	-	+
$V_{27,1}$	27	$82.34 < \Omega < 83.96$	-	+
$V_{36,1}$	36	$87.32 < \Omega < 87.62$	-	+

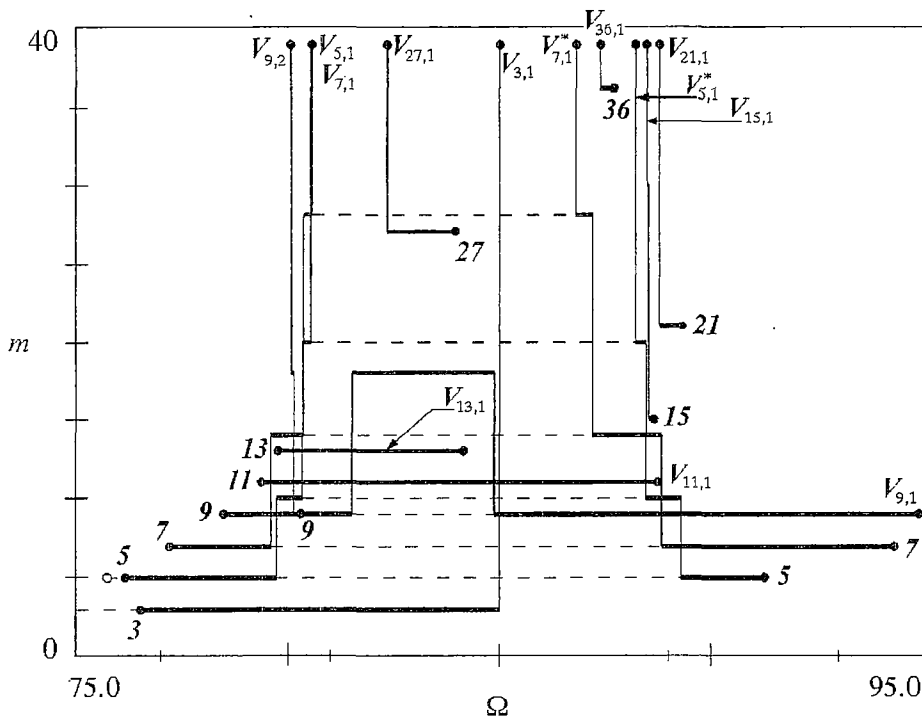


Рис. 4

2. Ветви $V_{11,1}$ и $V_{13,1}$ начинаются и заканчиваются при значениях параметров, соответствующих исчезновению устойчивого цикла, его слиянию с неустойчивым в результате седло–узловой бифуркации.

3. Ветвь $V_{9,1}$, как и ветви $V_{11,1}$ и $V_{13,1}$, начинается и заканчивается при параметрах, при которых 9–цикл возникает (исчезает) через седло–узловую бифуркацию. Однако, в отличие от предыдущего случая, этот режим при изменении параметра Ω испытывает две бифуркации удвоения периода, сначала прямую, а затем обратную. На рис. 5 приведены зависимости мультипликаторов 9–цикла от параметра Ω , наглядно иллюстрирующие динамику изменения его характера. При $\Omega \approx \Omega_{9,1}$, $\Omega_{9,1} = 78.5385$ жестко возникает пара 9–циклов – устойчивого и неустойчивого – через седло–узловую бифуркацию (максимальный по модулю мультипликатор 9–цикла в точке $\Omega_{9,1} = 78.5385$ обращается в +1). В точке $\Omega \approx \Omega_{18,1}$, $\Omega_{18,1} = 81.5327$ 9–цикл теряет устойчивость (максимальный по модулю мультипликатор устойчивого 9–цикла выходит из единичного круга через -1) и мягко возникает 18–цикл через бифуркацию удвоения периода. При дальнейшем увеличении параметра Ω в точке $\Omega \approx \Omega_{18,1}^*$, $\Omega_{18,1}^* = 84.8455$ 9–цикл становится вновь устойчивым через «обратную» бифуркацию удвоения периода

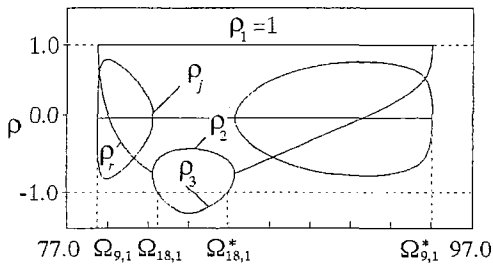


Рис. 5

(мультипликаторы 9–цикла входят внутрь единичного круга через -1), а в точке $\Omega \approx \Omega_{9,1}^*$, $\Omega_{9,1}^* = 94.9232$ устойчивый 9–цикл исчезает, сливаясь с неустойчивым 9–циклом через седло–узловую бифуркацию. Таким образом, ветвь $V_{9,1}$ как бы состоит из двух симметричных полуветвей (симметричных не по параметру Ω , а по своей структуре, то есть совокупности составляющих их диапазонов существования m –циклов),

состоящих из единственных отрезков существования 9-циклов и соединяющихся отрезком, отвечающим области существования 18-цикла.

С этой ветвью связана еще одна особенность, которая состоит в том, что ветви $V_{9,1}$ и $V_{9,2}$ пересекаются непусто, вследствие чего в диапазоне $80.1733 < \Omega < 80.3162$ существуют два типа 9-циклов с различными динамическими характеристиками.

4. Ветви $V_{5,1}$ и $V_{5,1}^*$, а также $V_{7,1}$ и $V_{7,1}^*$ попарно представляют собой скорее одну ветвь, состоящую из двух симметричных полуветвей (см. рис. 4). Здесь, как и выше, под симметричностью имеется в виду не симметричное расположение соответствующих бифуркационных значений параметра, а симметричность структуры полуветвей, то есть тот факт, что обе ветви состоят из диапазонов существования одних и тех же m -циклов и переходы, возникновение и исчезновение m -циклов происходят одинаковым образом. Так, обе пары ветвей состоят из областей существования жестко возникающего (за исключением ветви $V_{5,1}$, которая будет рассмотрена ниже) базового m -цикла ($m=5$ и $m=7$, соответственно) и областей существования $2^n m$ -циклов, $n=1,2,\dots$, мягко возникающих в результате бифуркаций удвоения периода. Весьма примечателен тот факт, что соответствующие m -циклы из левой и правой полуветви не просто совпадают по периодичности, но являются одним и тем же режимом, претерпевающим в области своего существования две бифуркации удвоения периода – прямую и обратную. На рис. 4 области существования неустойчивых циклов изображены пунктирными линиями. Эволюция каждого m -цикла повторяет эволюцию 9-цикла ветви $V_{9,1}$, описанную ранее. Как мы видим, ветвь $V_{9,1}$ можно считать вырожденным случаем слияния полуветвей той же структуры, что и рассматриваемые в этом пункте за счет неполного каскада бифуркаций удвоения периода. Поскольку в пределах ветвей $V_{5,1}$, $V_{5,1}^*$, $V_{7,1}$, $V_{7,1}^*$ происходит бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода, сгущающаяся к аperiodическому движению, можно сказать, что как полуветви ветви $V_{9,1}$ соединяются через область существования устойчивого 18-цикла, так и полуветви $V_{5,1}$ и $V_{5,1}^*$, $V_{7,1}$ и $V_{7,1}^*$ соответственно соединяются отрезками существования аperiodических колебаний. Ветвь $V_{5,1}$ полностью соответствует вышеприведенному описанию, за одним исключением: базовое движение отвечает резонансному циклу, возникающему вследствие синхронизации квазипериодического движения.

5. Ветвь $V_{3,1}$ начинается с 3-цикла, возникающего жестко. Характер возникновения 3-цикла имеет некоторые особенности по сравнению с теми циклами, которые были рассмотрены ранее. В точке $\Omega_{3,1} \approx 67.3586$ возникает пара неустойчивых 3-циклов. При увеличении Ω один из них становится устойчивым (величина максимального по модулю мультипликатора становится меньше единицы при $\Omega_{3,1} \approx 76.8338$), а мультипликаторы другого все больше удаляются от границы единичного круга, и это движение остается неустойчивым во всей области своего существования. Первый 3-цикл при $\Omega_{6,1} \approx 84.97732$ претерпевает бифуркацию удвоения, что приводит к мягкому возникновению 6-цикла, исчезающего в результате седло-узловой бифуркации при $\Omega \approx 84.97745$.

В других сечениях картины ветвлений могут отличаться от той, что приведена на рис. 4. Для примера на рис. 6, 7 приведены бифуркационные диаграммы, построенные в сечениях $L = \{(\Omega, \beta): 57.0 < \Omega < 132.0, \beta = 31.15\}$ и $L = \{(\Omega, \beta): \Omega = 82.85149, 48.0 < \beta < 52.0\}$, соответственно, на которых легко видеть (см. также рис. 3), что хаотизация колебаний может происходить как через каскады прямых и обратных бифуркаций удвоения периода, так и через возникновение и последующее разрушение двумерного тора. На рис. 8, 9 приведены вид фазовых траекторий в проекции на трехмерное пространство и спектры колебаний, соответствующие режимам квазипериодических и хаотических колебаний. Приведенные на рис. 3,4,6,7 результаты дают достаточно общую картину в

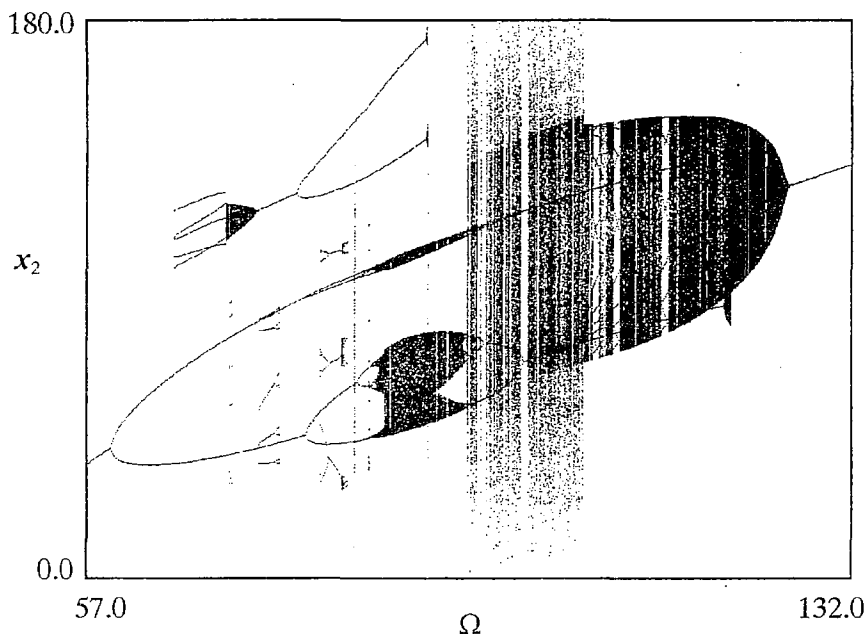


Рис. 6

отношении возможных типов движений и сценариев смены колебательных режимов при изменении параметров (см. также [18,19]).

Как видно из рис. 4, ветви $V_{m,k}$ взаимно пересекаются (см. также рис. 3,6,7). В областях их пересечений в зависимости от начальных условий могут реализоваться различные движения, а при определенных соотношениях радиусов областей притяжения локально-устойчивых циклов и величины случайных помех либо возникает хаотическая динамика, либо возможен катастрофический переход от детерминированной динамики к хаотической и обратно [21]. В [19] было выявлено, что в релейных системах недетерминированные режимы могут возникать и в случае существования единственного устойчивого периодического движения. Показано, что это происходит за счет перескока фазовой точки, при

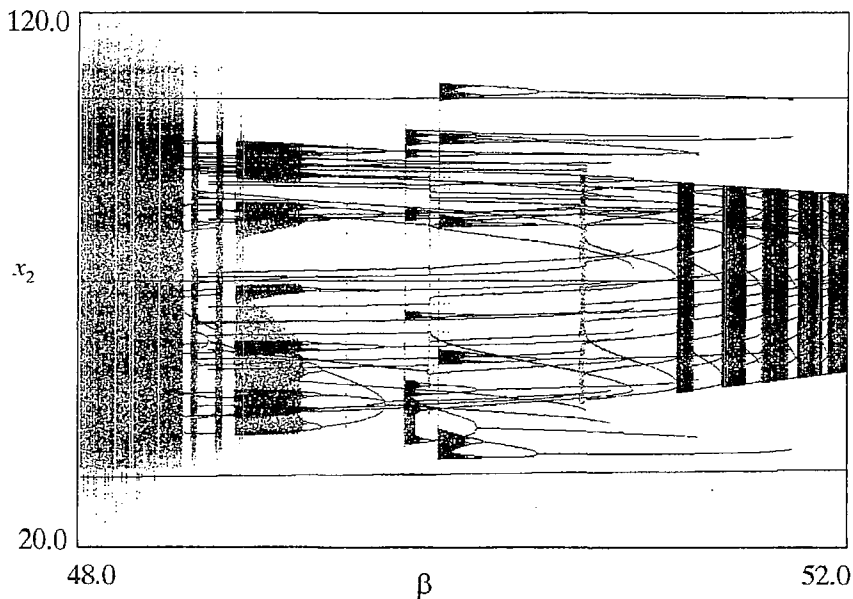


Рис. 7

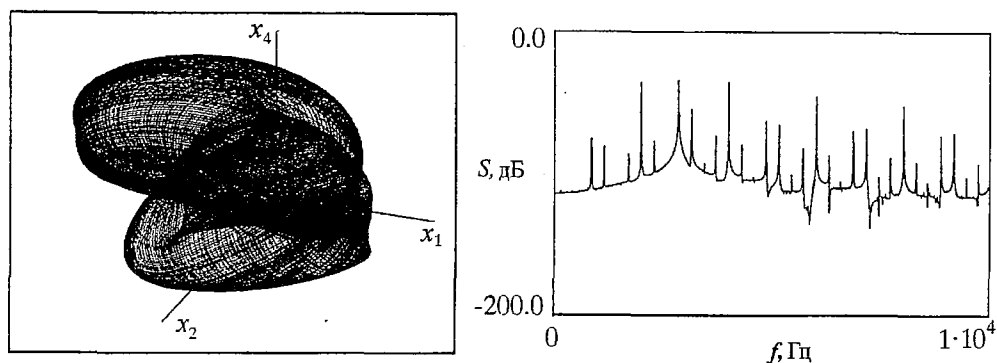


Рис. 8

наличии внешних возмущений, с одной части траектории одного и того же устойчивого периодического движения на другую вследствие малости радиуса внутренней области притяжения [12,21].

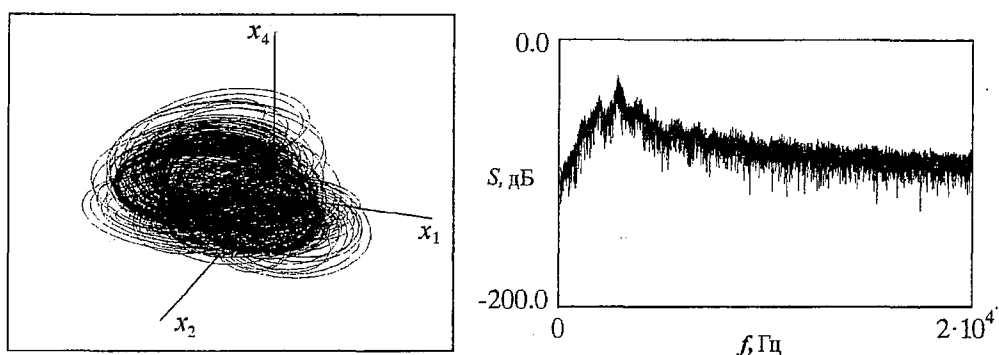


Рис. 9

Заключение

- Показано, что в релейных системах в широких диапазонах изменения параметров имеет место неединственность движений. Это является причиной функционирования системы в различных режимах, а при наличии случайных внешних воздействий возможен либо резкий (катастрофический) переход от одного динамического состояния к другому с различными динамическими характеристиками, в частности, от одного периодического движения к другому, либо чередование двух крайних типов движений — детерминированного и хаотического. Следствием последних является не только значительное увеличение динамических ошибок и ухудшение качественных показателей системы, но и внезапные отказы. Установлено, что катастрофические явления характерны для объектов с аномальной структурой.

- При проектировании сложных технических систем проблема различения структур приобретает большое значение. Так, например, Ю.И. Неймарк [30] обращает внимание на тот факт, что «в свое время были интересные и отчасти забытые работы И.И. Гальперина по выделению структурных схем линейных систем, устойчивых при любых значениях параметров, устойчивых в силу своей структуры. Сегодня во всем мире ищутся системы управления, малочувствительные к изменениям своих параметров или грубые, по терминологии Андронова — Понтрягина. В этом вопросе более важным является отыскание систем, робастных в силу своей структуры». Концепция нормальных структур [28,29], с позиций

которой рассмотрены динамические особенности релейной системы с гистерезисом, является важным шагом в этом направлении. Как указано в работе [29], дальнейшее развитие этой концепции связано, прежде всего, с исследованием множеств P_k^m и свойств полноты их в совокупности.

Автор выражает благодарность профессору Э. Мосекильде за поддержку и помощь в проведении исследований, за плодотворное сотрудничество, и профессору В.С. Анищенко за возможность обсуждения результатов и искренний интерес к представленной работе.

Библиографический список

1. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
2. Алексеев А.С. Электронная модель двухпозиционного регулятора температуры с зоной опережения // ДАН СССР. 1952. Т. 57, № 3. С. 393.
3. Алексеев А.С. Двухпозиционный регулятор температуры с зоной опережения // Памяти А.А. Андропова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С.45.
4. Митришкин Ю.В. Минимизация амплитуды автоколебаний в релейной системе управления с устойчивой линейной динамической частью // АиТ. 1989. № 9. С. 91.
5. Крутова И.Н. Исследование процесса стабилизации многомерной динамической системы с релейным управлением // АиТ. 1999. № 4. С. 27.
6. Крутова И.Н. Об устойчивости режима стабилизации космического аппарата с учетом уругих колебаний // АиТ. 1999. № 7. С. 44.
7. Постников Н.С. Стохастические колебания в ядерном реакторе с релейной системой регулирования // Атомная энергия. 1994. Т. 76, вып. 1. С. 3.
8. Postnikov N.S. Dynamic chaos in relay system with hysteresis // Computational Mathematics and Modeling. 1997. Vol. 8, № 3. P. 62.
9. Постников Н.С. Стохастичность релейных систем с гистерезисом // АиТ. 1998. № 3. С. 57.
10. Palmor Z.J. A general and exact method for determining limit cycles in decentralized relay systems // Automatica. 1995. № 31. P. 1333.
11. Holzhueter Th. Simulation of relay control systems using MATLAB/SIMULINK // Control Engineering Practice. 1998. № 6. P. 1089.
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
13. Анищенко В.С. Сложные колебания простых систем. М.: Наука, 1990.
14. Mosekilde E. Topics in nonlinear dynamics: applications to physics, biology and economics systems. World Scientific, Singapore, 1996.
15. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
16. Жусубалиев Ж.Т., Емельянова Е.Ю. Анализ структуры С-бифуркационных границ кусочно-сшитой модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией // Информационные технологии моделирования и управления: Межвуз. сб. науч. тр. Воронежский гос. техн. ун-т, 1999. С.68.
17. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-collision bifurcations including «period two to three» for piecewise smooth systems // Physica. 1992. D57. P.39.
18. Жусубалиев Ж.Т. Бифуркации и хаотические движения в динамике релейных систем автоматического регулирования // III Международная конференция «Распознавание-97»: Сборник докладов. Курск, 1997. С. 25.
19. Жусубалиев Ж.Т., Сухотерин Е.А., Рудаков В.Н. О бифуркациях и хаотических колебаниях в релейной системе автоматического регулирования с гистерезисом. М., 1999. 54 с. Деп. в ВИНТИ 20.08.1999, № 2698-B99.
20. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992. № 8. С. 47.
21. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Михальченко С.Г. Стохастичность в

динамике стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // *Электричество*. 1996. № 3. С. 69.

22. Глазенко Т.А., Томасов В.С. Состояние и перспективы применения полупроводниковых преобразователей в приборостроении // *Изв. вузов. Приборостроение*. 1996. Т. 39, № 3. С. 6.

23. Кобзев А.В., Михальченко Г.Я., Музыченко Н.М. Модуляционные источники питания РЭА. Томск: Радио и связь, Томский отдел, 1990.

24. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т., Колоколов Ю.В., Терехин И.В. К расчету локальной устойчивости периодических режимов в импульсных системах автоматического регулирования // *АиТ*. 1992. № 6. С. 93.

25. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // *ПММ*. 1957. Т. 21. С. 658.

26. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

27. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.

28. Баушев В.С., Кобзев А.В., Михальченко Г.Я. Нормальные структуры устройств преобразования электрической энергии и автоматизация проектирования // *Проблемы преобразования электрической энергии: Тезисы докладов международной конференции*. М.: МЭИ, 1993. С. 38.

29. Баушев В.С., Кобзев А.В., Тановицкий Ю.Н. Нормальные структуры динамических объектов // *Аппаратно-программные средства автоматизации технологических процессов*. Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1997. С. 146.

30. Неймарк Ю.И. Динамическая система как основная модель современной науки // *АиТ*. 1999. № 3. С. 196.

*Курский государственный
технический университет*

*Поступила в редакцию 14.02.2000
после доработки 6.06.2000*

CHAOTIC OSCILLATION IN PIECEWISE-LINEAR MODEL OF THE RELAY SYSTEM WITH HYSTERESIS

Zh.T. Zhusubaliyev

Dynamics of the relay system with hysteresis is investigated. Fields of periodic and chaotic oscillation in the parameter space are determined. Regularities of periodic motion arising are studied and associated bifurcations are determined.



Жусубалиев Жаныбай Турсунбаевич – родился в Ошской области Киргизской ССР (1958). Окончил Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники (ТИАСУР, 1982). После окончания ТИАСУР работал в НИИ автоматики и электромеханики при ТИАСУР. В настоящее время работает доцентом кафедры вычислительной техники Курского государственного технического университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук в Томском политехническом институте (1989) по электротехническим комплексам и системам, включая их управление и регулирование, применение математического моделирования и нелинейной динамики в системах автоматического управления. Область научных интересов: нелинейная динамика и хаос, математическое моделирование нелинейных динамических систем, бифуркации и хаотические колебания в динамических системах с разрывными правыми частями, применение нелинейной динамики в теории импульсных и

релейных автоматических систем управления. Опубликовал около 80 научных работ по указанным направлениям. E-mail: cct@cafct.kursk.ru