



РЕЖИМЫ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В.П. Пономаренко, В.В. Матросов

Рассмотрена динамическая система на торе, описывающая поведение двух взаимосвязанных систем фазовой синхронизации. Исследуются режимы поведения систем в зависимости от начальных расстроек частот, отношения коэффициентов усиления цепей управления и степени связи через управляющие сигналы. Получены оценки бифуркационных значений этих параметров, позволяющие определить границы области захвата в режим синхронизации.

1. Данная работа является результатом продолжения исследований [1–5] динамических режимов при взаимодействии двух генераторов, управляемых с помощью систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Взаимодействие осуществляется через взаимные перекрестные связи и однонаправленную связь по цепям управления. Актуальность проводимого исследования определяется, с одной стороны, широким применением таких систем в задачах синтеза частот [6], синхронизации при приеме сложных сигналов [7,8], одновременной оценки фазы и угла поляризации линейно поляризованной электромагнитной волны в коммуникационных системах [9] и пр., а с другой стороны, связью с проблемами динамики нейронных сетей фазовых осцилляторов с центральным элементом [10] и связанных джозефсоновских переходов [11].

Рассматривается предельный случай, когда цепь фазового управления частотой каждого из парциальных генераторов не содержит фильтров низких частот. В этом случае динамика взаимодействующих генераторов с фазовым управлением описывается следующими уравнениями [2]:

$$d\varphi/d\tau = \gamma - \sin\varphi\cos\psi, \quad d\psi/d\tau = \beta - b\cos\varphi\sin\psi - \alpha\sin\varphi\cos\psi, \quad (1)$$

в которых τ – безразмерное время; φ и ψ – рассогласования фаз, а γ и β – относительные начальные расстройки частот входного сигнала и колебаний парциальных управляемых генераторов; $b = k_2/k_1$, k_1 и k_2 – коэффициенты усиления цепей управления; α – параметр, характеризующий степень связи через сигналы рассогласований. Система (1) является динамической системой на двумерном торе $T = \{(\varphi, \psi) | -\pi \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq \psi \leq \pi\}$. Основная задача исследования модели (1) состоит в определении областей пространства параметров, в которых реализуется режим синхронизации с соответствующим ему устойчивым состоянием равновесия и асинхронные режимы, определяемые колебательно-вращательными и вращательными предельными циклами на торе T . Эта задача рассмотрена в [1,2] для значений параметров в области S_0 существования состояния равновесий

системы (1), где $C_0 = \{\max(\alpha\gamma - b(1-\gamma), \alpha\gamma - b(1+\gamma)) < \beta < \min(\alpha\gamma + b(1-\gamma), \alpha\gamma + b(1+\gamma))\}$. Целью данной работы является, во-первых, получение оценок областей значений параметров с различными движениями системы (1) в случаях $b \ll 1$ и $b \gg 1$, а во-вторых, изучение асинхронных движений при значениях α, β, γ, b вне области C_0 . Исследование проведено с помощью качественно-численных методов и моделирования с использованием комплекса программ, предназначенного для исследования процессов нелинейной динамики в моделях систем с фазовым и частотным управлением [12].

2. Система (1) при значениях $\alpha, \beta, \gamma, b \in C_0$ имеет на поверхности тора T восемь состояний равновесия: $A_1(\varphi_1, \psi_1), B_1(\varphi_1 - \pi, \psi_1 - \pi), C_1(\pi - \varphi_1, -\psi_1), D_1(-\varphi_1, \pi - \psi_1), A_2(\pi/2 - \psi_1, \pi/2 - \varphi_1), B_2(-\psi_1 - \pi/2, -\varphi_1 - \pi/2), C_2(\psi_1 + \pi/2, \varphi_1 - \pi/2), D_2(\psi_1 - \pi/2, \varphi_1 + \pi/2)$, где величины φ_1 и ψ_1 определяются равенствами

$$\varphi_1 = 1/2(\arcsin \delta_1 + \arcsin \delta_2), \quad \psi_1 = 1/2(\arcsin \delta_1 - \arcsin \delta_2),$$

в которых $\delta_1 = \gamma + (\beta - \alpha\gamma)/b, \delta_2 = \gamma - (\beta - \alpha\gamma)/b$. Анализируя корни соответствующих характеристических уравнений, устанавливаем, что состояния равновесия A_2, C_2, B_2 и D_2 являются седловыми. При значениях $\beta \leq \alpha\gamma$, а также при $\beta > \alpha\gamma$ в случае

$$\sigma = (1 + b + \alpha)(1 - \delta_1^2)^{1/2} + (1 + b - \alpha)(1 - \delta_2^2)^{1/2} > 0,$$

состояния равновесия A_1 и B_1 устойчивые, а состояния равновесия C_1 и D_1 неустойчивые; при значениях $\beta > \alpha\gamma, \sigma < 0$ состояния равновесия A_1 и B_1 неустойчивые, а состояния равновесия C_1 и D_1 устойчивые. Далее будем рассматривать систему (1) при значениях $\alpha < b$, когда $\sigma > 0$ и состояния равновесия A_1 и B_1 являются устойчивыми, а состояния равновесия C_1 и D_1 — неустойчивыми при всех значениях $\alpha, \beta, \gamma, b \in C_0$.

Каждому из устойчивых состояний равновесия A_1 и B_1 отвечает режим стационарной генерации управляемых генераторов. Реализация этих режимов означает установление состояния синхронизации в перекрестно связанных системах ФАПЧ, область C_0 соответствует области удержания этого состояния при изменении параметров α, β, γ, b ($\alpha < b$).

3. Рассмотрим систему (1) при значениях $b < 1$. На рис. 1 представлен качественный параметрический портрет системы на плоскости параметров γ, β^* ($\beta^* = \beta/b$), построенный по результатам численного исследования системы (1). Кривые 1 и 2 отвечают бифуркациям совпадения сепаратрис седел с образованием на торе T сепаратрисных связок (при этих бифуркациях предельные циклы не образуются, изменяются лишь области притяжения $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1). Линии 3 и 4 — это границы области C_0 , штриховой линией проведена прямая $\beta^* = \alpha^* \gamma$ ($\alpha^* = \alpha/b$). Кривая 5 ($\beta^* = \beta_p^*$), берущая свое начало из точки М пересечения кривых 1 и 2, отвечает образованию на торе T четырех петель сепаратрис седел A_2, B_2

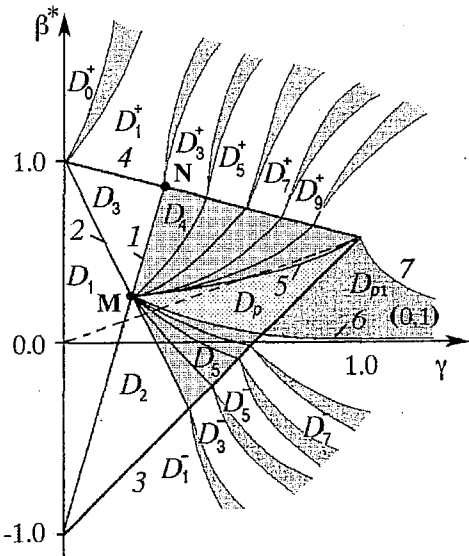


Рис. 1. Параметрический портрет системы (1) при $b < 1$

(неустойчивых), C_2, D_2 (устойчивых), охватывающих тор в направлении φ (φ -петель). Кривая 6 ($\beta^* = \beta_{c^*}$), также исходящая из точки M , и кривая 7 ($\beta^* = \beta_{c0^*}$) соответствуют двойным предельным циклам колебательно-вращательного типа. Заметим, что предельные циклы на торе принято характеризовать парой чисел (k, l) , где k и l – число оборотов, совершаемых изображающей точкой за один период цикла, по переменным ψ и φ , соответственно. Предельные циклы, образующиеся при $\beta^* = \beta_{c^*}$ и $\beta^* = \beta_{c0^*}$, имеют числа $k=0, l=1$ (такие циклы называют φ -циклами).

Бифуркационные кривые 1, 2, 5 и 6 выделяют в C_0 области D_1, \dots, D_5 и D_p . Фазовый портрет системы (1), соответствующий области D_1 , приведен на рис. 2, а; рис. 2, б, в показывают изменение этого фазового портрета при переходе через кривую 1 в область D_2 (б) и при переходе через кривую 2 в область D_3 (в). В области D_p на торе T существуют четыре предельных цикла с $k=0, l=1$: устойчивые L_1 и L_2 и неустойчивые Γ_1 и Γ_2 (г). Циклы L_1 и L_2 определяют асинхронные режимы перекрестно связанных систем ФАПЧ, при которых разность фаз φ неограниченно нарастает, а разность фаз ψ периодически изменяется относительно некоторого среднего значения.

Области D_4 и D_5 примечательны тем, что здесь на торе T реализуются бифуркации сепаратрисных связей, при которых сепаратрисы-седла охватывают тор в направлении φ . Численное исследование этих бифуркаций показывает, что соответствующие им бифуркационные кривые на плоскости (γ, β^*) исходят из точки M и оканчиваются в точках кривых 3 и 4. На рис. 1 изображено качественно расположение некоторых бифуркационных кривых сепаратрисных связей в областях D_4 и D_5 .

Для значений параметров из области $D_s = C_0 \setminus D_p$ единственным стационарным движением связанных систем является состояние синхронизации, которое в

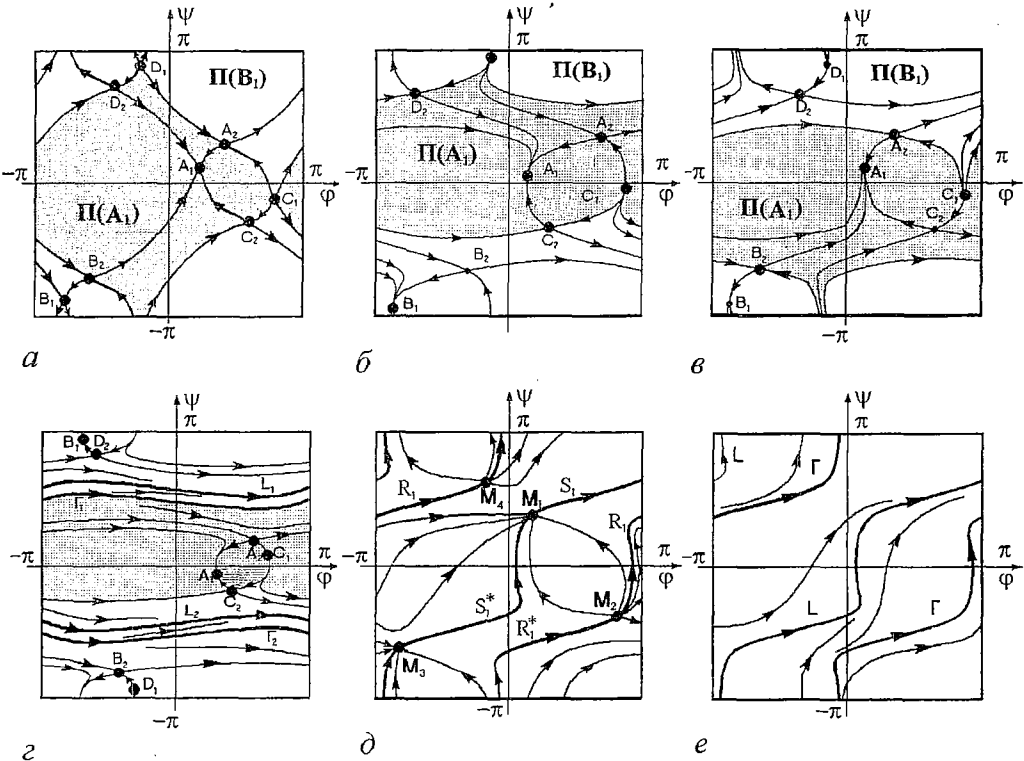


Рис. 2. Фазовые портреты при $b < 1$

соответствии с фазовыми портретами, приведенными на рис. 2, *a–в*, реализуется при любых начальных условиях. Для значений параметров из области D_p состояние синхронизации сосуществует с асинхронными режимами ϕ -циклов L_1 и L_2 (рис. 2, *з*). Какой из режимов при этом устанавливается в системе, зависит от начальных условий и определяется тем, какой из областей притяжения (состояний равновесия A_1 и B_1 или ϕ -циклов L_1 и L_2) принадлежит начальное состояние системы. Отметим, что причиной появления в C_0 области D_p является связь через управляющие сигналы систем ФАПЧ.

Численное исследование системы (1) при значениях параметров вне области C_0 показывает, что на линии 3 и 4 (границы области C_0) в точках их смыкания с кривыми сепаратрисных связей опираются клиновидные области квазипериодических движений. Эти области ограничены бифуркационными кривыми, соответствующими двойным предельным циклам системы (1). На рис. 1 штриховкой приблизительно отмечено расположение некоторых областей с квазипериодическими движениями на торе T . Области D_0^+ , D_{2i+1}^+ , D_{2i+1}^- , ($i=1,2,3,\dots$), расположенные между областями квазипериодических движений, и область D_{p1} , ограниченная частями линий 3 и 6 и кривой 7, соответствуют существованию на торе T предельных циклов системы (1): при значениях параметров из области D_{p1} существуют предельные циклы L_1 , Γ_1 , L_2 и Γ_2 с $k=0$, $l=1$; в областях D_{2i+1}^+ существует пара предельных циклов (устойчивый и неустойчивый), которые характеризуются значениями $k=1$, $l=2i+1$; в областях D_{2i+1}^- существуют устойчивый и неустойчивый циклы с $k=-1$, $l=2i+1$ (знак минус означает изменение на противоположное направления движения фазовой точки на цикле по переменной ψ); в области D_0^+ существуют четыре предельных цикла (два устойчивых и два неустойчивых) с $k=1$, $l=0$, то есть четыре ψ -цикла.

При переходе с увеличением (с уменьшением) параметра β^* из области C_0 через границу 4 (через границу 3) в области D_{2i+1}^+ (в области D_{2i+1}^-) предельные циклы с $k=1$, $l=2i+1$ (с $k=-1$, $l=2i+1$) образуются в результате бифуркаций сепаратрисных контуров седло-узлов состояний равновесия. В качестве примера на рис. 2 приведены фазовые портреты системы (1) для части линии 4 (см. рис. 1) слева от точки N (рис. 2, *д*) и для области D_1^+ (рис. 2, *е*). Рис. 2, *д* иллюстрирует сепаратрисные контуры седло-узлов M_1 и M_3 и седло-узлов M_2 и M_4 с $k=l=1$, а на рис. 2, *е* показаны устойчивый L и неустойчивый Γ предельные циклы с $k=l=1$, родившиеся из этих петель.

Пересечение с изменением γ и β левых границ областей квазипериодических движений при переходе на параметрическом портрете $\{\gamma, \beta^*\}$ (см. рис. 1) из области D_{2i+1}^+ (из области D_{2i+1}^-) в область D_{2i+3}^+ (в область D_{2i+3}^-) приводит к исчезновению пары предельных циклов (устойчивого и неустойчивого) с $k=\pm 1$, $l=2i+1$. При пересечении с изменением γ и β в указанном направлении правых границ областей квазипериодических движений на торе T образуется пара предельных циклов (устойчивый и неустойчивый) с $k=\pm 1$, $l=2i+1$. При продолжении движения по параметрам γ и β и пересечении бифуркационных линий β_{c0}^* или β_c^* происходит рождение предельных ϕ -циклов L_1 , Γ_1 , L_2 и Γ_2 с $k=0$, $l=1$. На рис. 3 даны фазовые портреты системы (1), построенные при значениях $\gamma=1.05$, $b=0.1$, $\alpha=0.025$ и при изменении β^* от 10 до 0.2, иллюстрирующие устойчивые предельные циклы с $(k, l)=(1,1)$; (1,3); (1,5); (1,7); (1,9); (1,11) и (0,1) и квазипериодические движения, наблюдаемые при значениях параметров вне области C_0 .

Численное исследование системы (1) в областях квазипериодических движений показывает, что эти области неоднородны. В них содержатся как точки, соответствующие квазипериодическим движениям, так и точки, отвечающие предельным циклам, индексы вращения которых отличны от $(\pm 1, 2i+1)$.

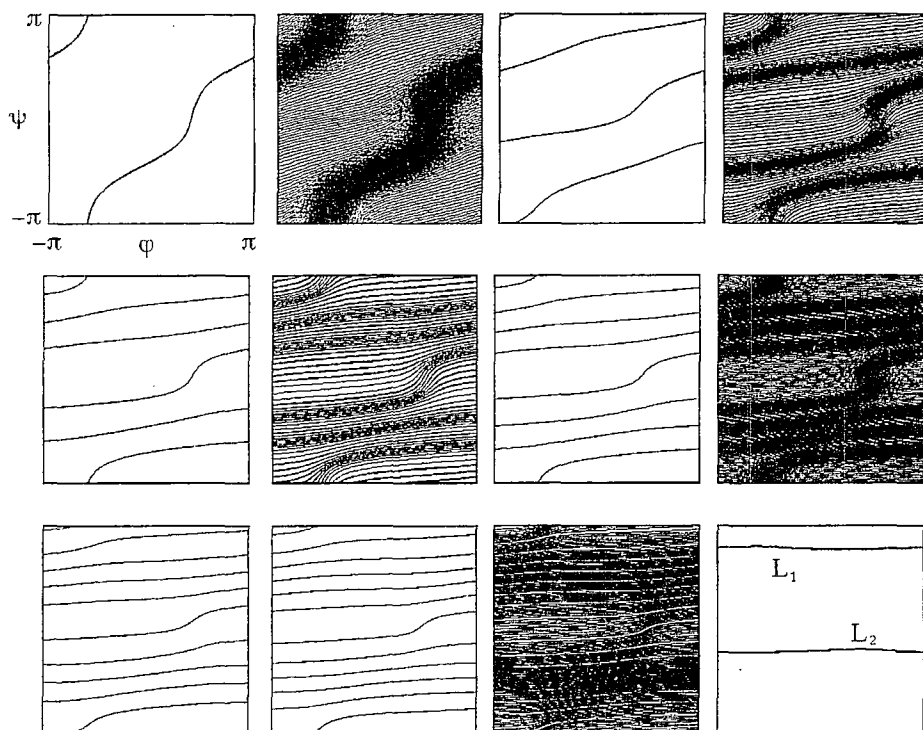


Рис. 3. Периодические и квазипериодические движения, наблюдаемые вне области C_0

4. Рассмотрим асимптотическое поведение кривых β_p^* , β_c^* и β_{c0}^* при значениях $b \ll 1$. При помощи замены $d\tau_1 = (\gamma - \sin\phi \cos\psi) d\tau$ систему (1) преобразуем к системе

$$d\phi/d\tau_1 = 1 = \partial H(\phi, \psi) / \partial \psi + \mu p(\phi, \psi), \quad (2)$$

$$d\psi/d\tau_1 = \mu(\beta^* - \cos\phi \sin\psi - \alpha^* \sin\phi \cos\psi) / (\gamma - \sin\phi \cos\psi) = -\partial H(\phi, \psi) / \partial \phi + \mu q(\phi, \psi),$$

где $H(\phi, \psi) = \psi$, $p(\phi, \psi) = 0$, $q(\phi, \psi) = (\beta^* - \cos\phi \sin\psi - \alpha^* \sin\phi \cos\psi) / (\gamma - \sin\phi \cos\psi)$, $\mu = b$. Исследование системы (2) проведем методом малого параметра (методом Понтрягина [13]). При $\mu = 0$ система (2) является консервативной, ее фазовые траектории определяются уравнением $H(\phi, \psi) = h$ ($h = \text{const}$) и представляют собой замкнутые кривые, охватывающие тор T в направлении ϕ (при $0 < \gamma < 1$ эти кривые для значений $h_1 < h < h_2$, $-h_2 < h < -h_1$, где $h_1 = \arccos \gamma$, $h_2 = \pi - h_1$, расположены в области $\gamma - \sin\phi \cos\psi > 0$). Значения h , соответствующие замкнутым кривым консервативной системы, от которых при малых $\mu > 0$ рождаются ϕ -циклы системы (2), находятся из уравнения

$$\Psi_1(h) = \int_{\psi=h} [q(\phi, \psi) - p(\phi, \psi)] d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} (\beta^* - \cos\phi \sin\psi - \alpha^* \sin\phi \cos\psi) / (\gamma - \sin\phi \cos\psi) d\phi = 0.$$

Функция $\Psi_1(h) = 2\pi(\alpha^* + (\beta^* - \alpha^* \gamma) / (\gamma^2 - \cos^2 h)^{1/2})$. При $\beta^* < 0$ функция $\Psi_1(h) < 0$, а при $\beta^* > \alpha^* \gamma$ функция $\Psi_1(h) > 0$, следовательно, при этих значениях β^* , γ , α^* уравнение $\Psi_1(h) = 0$ не имеет корней. При значениях $0 < \beta^* < \min[\alpha^* \gamma, \alpha^* (\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})]$ существует четыре корня уравнения $\Psi_1(h) = 0$:

$$h_1^* = \arccos[\gamma^2 - (\beta^* - \alpha^* \gamma)^2 / \alpha^{*2}]^{1/2}, \quad h_2^* = \pi - h_1^*,$$

$$h_3^* = -h_1^*, \quad h_4^* = -h_2^* \quad (h_2^* < h_1^* < \pi/2).$$

Значениям h_1^* , h_2^* , h_3^* и h_4^* соответствуют четыре ϕ -цикла Γ_1, L_1, L_2 и Γ_2 . Циклы L_1 и L_2 устойчивые, так как $\Psi_{1h}'(h_{2,3}^*) < 0$, а циклы Γ_1 и Γ_2 неустойчивые, так как $\Psi_{1h}'(h_{1,4}^*) > 0$. При значениях $\beta^* = \alpha^* \gamma$, $\gamma < 1$ происходит стягивание предельных циклов L_1, L_2, Γ_1 и Γ_2 к петлям сепаратрис седел D_2, C_2, A_2 и B_2 , соответственно. При $\beta^* = 0$ на торе T существуют два двойных предельных цикла, один из которых образуется в результате слияния ϕ -циклов L_1 и Γ_1 , а другой – в результате слияния циклов L_2 и Γ_2 . При $\beta^* = \alpha^*(\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})$, $\gamma > 1$ система (2) также имеет два двойных предельных цикла: один из них возникает при слиянии ϕ -циклов L_2 и Γ_1 , а другой – при слиянии ϕ -циклов L_1 и Γ_2 .

На рис. 4 приведены бифуркационные кривые $\beta^* = \alpha^* \gamma$ (кривая 5), $\beta^* = 0$ (кривая 6) и $\beta^* = \alpha^*(\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})$ (кривая 7), выделяющие на плоскости параметров (γ, β^*) области D_{s0}, D_{p0}, D_{p1}^* и D_0 . Область D_{s0} , в которой отсутствуют предельные циклы системы (2), соответствует состоянию синхронизации связанных систем ФАПЧ. В области D_{p0} в зависимости от начальных условий реализуются либо состояние синхронизации, либо асинхронные режимы ϕ -циклов L_1 и L_2 . В области D_{p1}^* существуют только асинхронные режимы циклов L_1 и L_2 . В области D_0 реализуются периодические и квазипериодические движения. Области D_{s0}, D_{p0} и D_{p1}^* дают асимптотическое представление изображенных на рис. 1 областей D_s, D_p и D_{p1} , соответственно, при $b \ll 1$ ($D_s > D_{s0}$, при $b \rightarrow 0$ $D_s \rightarrow D_{s0}$, $\beta_p^* \rightarrow \alpha^* \gamma$, $\beta_c^* \rightarrow 0$, $\beta_{c1}^* \rightarrow \alpha^*(\gamma - (\gamma^2 - 1)^{1/2})$; $D_p < D_{p0}$, $D_p \rightarrow D_{p0}$ при $b \rightarrow 0$; $D_{p1} < D_{p1}^*$, $D_{p1} \rightarrow D_{p1}^*$ при $b \rightarrow 0$). Области D_{s0}, D_{p0} и D_{p1}^* могут использоваться в качестве аналитических оценок областей D_s, D_p и D_{p1} , тем более точных, чем меньше b .

5. Численное исследование системы (1) показывает, что при увеличении параметра b до значения $b=1$ бифуркационные кривые 1 и 2 (см. рис. 1) приближаются к границам области C_0 – кривым 3 и 4, область D_p уменьшается и исчезает; при $b=1$ область D_s совпадает с областью C_0 .

Рассмотрим систему (1) при значениях $b > 1$. На рис. 5 приведен качественный параметрический портрет $\{\gamma, \beta^*\}$, построенный по результатам численного исследования системы (1) при $b > 1$. Кривые 1, 2, 3 отвечают сепаратрисным связкам, не охватывающим тор T . На рис. 6 даны фазовые портреты системы (1) для областей D_6, \dots, D_9 , выделяемых кривыми 1, 2 и 3, при значениях $\gamma > 0$. В этих областях система (1) не имеет предельных циклов. Рис. 6

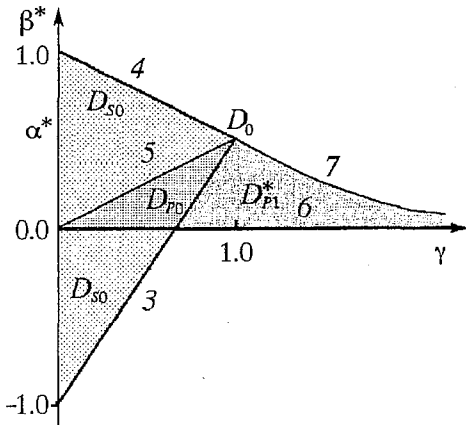


Рис. 4. Расположение бифуркационных кривых при значениях $b \ll 1$

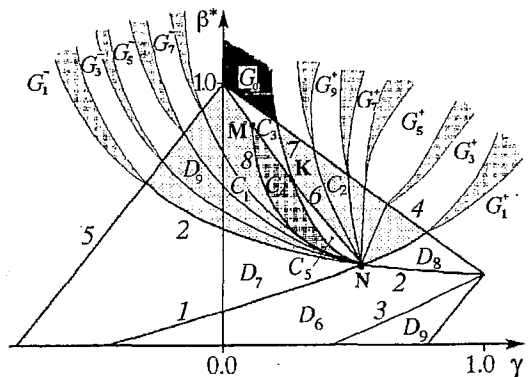


Рис. 5. Параметрический портрет системы (1) при $b > 1$

показывает изменение областей притяжения $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1 в результате бифуркаций сепаратрисных связок.

В области D_α , заключенной между частями линий 1, 3, 4 и 5, установлено существование еще трех бифуркационных кривых: $\beta^* = \beta_{p1}^*$ (кривая б), $\beta^* = \beta_{c2}^*$

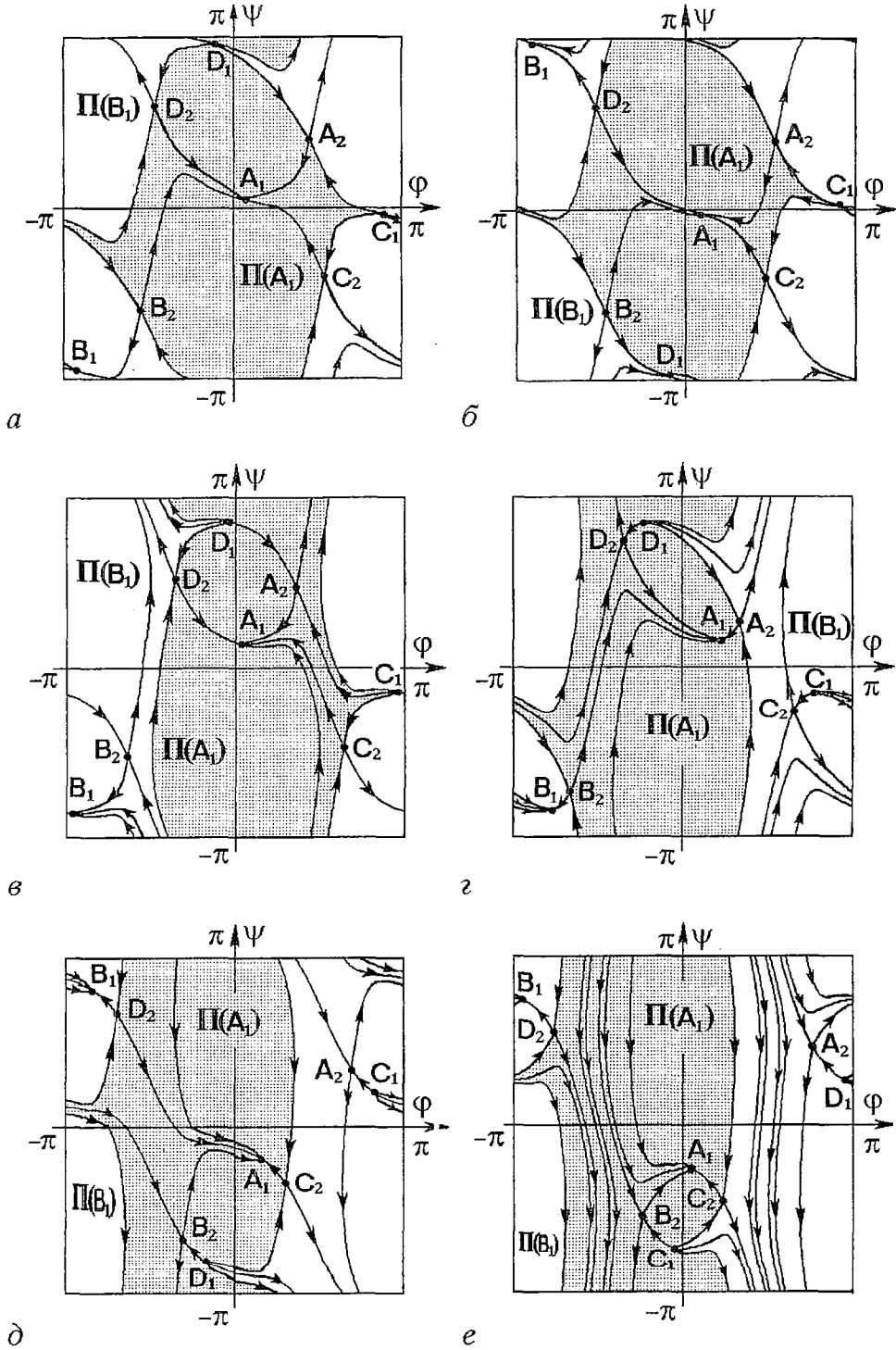
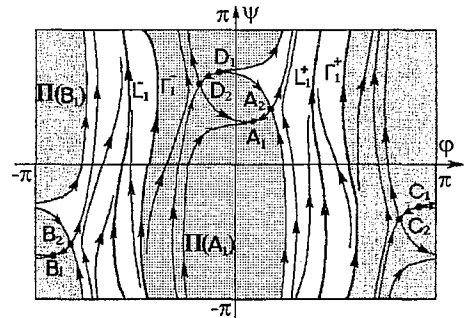


Рис. 6. Фазовые портреты, соответствующие значениям параметров из области C_s .

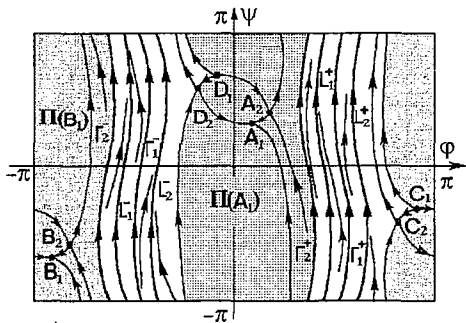
(кривая 7), $\beta^* = \beta_{c3}^*$ (кривая 8), исходящих из точки N пересечения кривых 1 и 2. Кривая β_{p1}^* соответствует образованию на торе T четырех петель сепаратрис седел A_2, B_2, C_2 и D_2 , охватывающих тор в направлении ψ (ψ -петель). Петли сепаратрис седел A_2 и B_2 устойчивы при $\beta_{p1}^* > \beta_{p0}^*$ и неустойчивы при $\beta_{p1}^* < \beta_{p0}^*$, петли сепаратрис седел C_2 и D_2 устойчивы при $\beta_{p1}^* < \beta_{p0}^*$ и неустойчивы при $\beta_{p1}^* > \beta_{p0}^*$, где β_{p0}^* находится из условия обращения в ноль седловой величины седел A_2, B_2, C_2 и D_2 , которое записывается в виде $(1+b+\alpha)(1-\delta_1^2)^{1/2} - (1+b-\alpha)(1-\delta_2^2)^{1/2} = 0$ [2]. Кривые β_{c2}^* и β_{c3}^* отвечают двойным предельным циклам на торе T , характеризующимся числами $k=1, l=0$ (ψ -циклам). При $\beta^* = \beta_{c2}^*$ существуют два таких цикла (один в области $0 < \varphi < \pi$, другой в области $-\pi < \varphi < 0$), а при $\beta^* = \beta_{c3}^*$ — четыре (два в области $0 < \varphi < \pi$ и два в области $-\pi < \varphi < 0$). На рис. 5 расположение бифуркационных кривых $\beta_{p1}^*, \beta_{c2}^*$ и β_{c3}^* дано в случае, когда точка К пересечения кривых β_{p1}^* и β_{c2}^* находится на кривой β_{p1}^* ниже точки М, соответствующей $\beta^* = \beta_{p0}^*$. На части кривой β_{p1}^* выше (ниже) точки М петли сепаратрис седел A_2 и B_2 устойчивы (неустойчивы), а петли сепаратрис седел D_2 и C_2 неустойчивы (устойчивы).

Кривые 6, 7 и 8 определяют в области D_α области C_1, \dots, C_5 (см. рис. 5). В областях C_1 и C_2 система (1) не имеет предельных циклов. При переходе с изменением параметров через часть кривой 6 выше точки М из области C_1 в область C_3 возникают четыре предельных ψ -цикла (c $k=1, l=0$): устойчивые L_1^+ и L_1^- и неустойчивые Γ_1^+ и Γ_1^- ($L_1^+, \Gamma_1^+ \in \{0 < \varphi < \pi\}, L_1^-, \Gamma_1^- \in \{-\pi < \varphi < 0\}$). Фазовый портрет системы (1) в области C_3 приведен на рис. 7, а. Его особенностью является наличие на торе T четырех областей притяжения: $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1 , $\Pi(L_1^+)$ и $\Pi(L_1^-)$ ψ -циклов L_1^+ и L_1^- . Циклы L_1^+ и L_1^- определяют асинхронные режимы связанных систем ФАПЧ, в которых ψ неограниченно нарастает, а φ периодически изменяется относительно некоторого среднего значения. С приближением в области C_3 к кривой 7 ψ -циклы L_1^+ и Γ_1^+ , а также ψ -циклы L_1^- и Γ_1^- сближаются. При пересечении линии 7 и переходе в область C_2 эти циклы исчезают в результате слияния L_1^- и Γ_1^- , L_1^+ и Γ_1^+ .

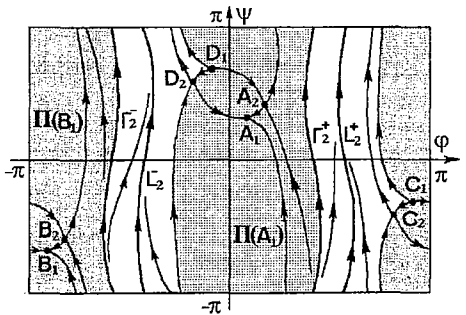
При переходе из области C_3 в область C_4 через часть МК кривой 6 на торе T при наличии циклов L_1^+, Γ_1^+, L_1^- ,



а



б



в

Рис. 7. Фазовые портреты для параметров из области C_p

Γ_1^- возникают еще четыре ψ -цикла: устойчивые L_2^+ и L_2^- и неустойчивые Γ_2^+ и Γ_2^- из петель сепаратрис седел C_2, D_2 и A_2, B_2 . Фазовый портрет системы (1) в области C_4 изображен на рис. 7, б; он стал сложнее, чем в области C_3 – теперь на торе T имеется шесть областей притяжения: $\Pi(A_1)$ и $\Pi(B_1)$ состояний равновесия A_1 и B_1 , $\Pi(L_1^+)$, $\Pi(L_2^+)$, $\Pi(L_1^-)$ и $\Pi(L_2^-)$ ψ -циклов L_1^+, L_2^+, L_1^- и L_2^- . При приближении с изменением параметров в области C_4 к кривой δ сближаются ψ -циклы L_1^+ и Γ_2^+ , L_2^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_2^- , L_2^- и Γ_1^- . При пересечении линии δ и переходе в область C_1 эти циклы исчезают в результате слияния L_1^+ и Γ_2^+ , L_2^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_2^- , L_2^- и Γ_1^- .

При переходе с изменением γ и β^* из области C_4 в область C_5 через часть НК кривой 7 исчезают ψ -циклы L_1^+, Γ_1^+, L_1^- и Γ_1^- , в области C_5 на торе T существуют ψ -циклы L_2^+, Γ_2^+, L_2^- и Γ_2^- (рис. 7, в). С приближением в области C_5 к линии δ ψ -циклы L_2^+ и Γ_2^+ , а также ψ -циклы L_2^- и Γ_2^- удаляются один от другого. При пересечении с изменением γ и β^* части НК кривой δ предельные циклы L_2^+, L_2^-, Γ_2^+ и Γ_2^- исчезают, сливаясь с соответствующими петлями сепаратрис седел C_2, D_2, A_2 и B_2 . В результате фазовый портрет, приведенный на рис. 7, в, преобразуется в фазовый портрет, качественно аналогичный показанному на рис. 6, в.

Для значений параметров из области $C_s = C_0 \setminus C_p$, где $C_p = C_3 \cup C_4 \cup C_5$, в системе при любых начальных условиях реализуется состояние синхронизации. Для параметров из области C_p состояние синхронизации сосуществует с асинхронными режимами ψ -циклов L_1^+, L_1^-, L_2^+ и L_2^- .

В области D_α существуют еще бифуркационные кривые, соответствующие сепаратрисным связкам, охватывающим тор T в направлении ψ . Как показали результаты численного исследования системы (1), эти линии исходят из точки N , проходят в областях C_1 и C_2 и оканчиваются в точках границ 4 и 5 области C_0 . На рис. 5 изображено качественно расположение некоторых из этих линий. Из точек смыкания кривых сепаратрисных связок и границ 4 и 5 берут начало проходящие вне области C_0 бифуркационные кривые, соответствующие двойным предельным циклам на торе T . Вид некоторых из них показан на рис. 5. Эти кривые, кривая 7 и часть линии $\gamma=0$ при $\beta^* > 1$ выделяют вне C_0 области G_0, G_{2i+1}^+ и G_{2i+1}^- ($i=0,1,2,3,\dots$) существования предельных циклов и области квазипериодических движений системы (1), отмеченные на рис. 5 штриховкой.

В области G_0 на торе T существуют ψ -циклы L_1^+, Γ_1^+, L_1^- и Γ_1^- (рис. 7, а). В областях G_{2i+1}^+ и G_{2i+1}^- на торе T существует по паре предельных циклов (устойчивого и неустойчивого), которые характеризуются значениями $k=2i+1, l=1$ в областях G_{2i+1}^+ и значениями $k=2i+1, l=-1$ в областях G_{2i+1}^- . Пересечение с изменением параметров γ и β^* левых (правых) границ областей квазипериодических движений при переходе из области G_{2i+3}^+ в область G_{2i+1}^+ (из области G_{2i+3}^- в G_{2i+1}^-) приводит к исчезновению предельных циклов с $k=2i+3, l=1$ (с $k=2i+3, l=-1$). При пересечении с изменением γ и β^* в указанном направлении правых (левых) границ областей квазипериодических движений на торе T образуется пара предельных циклов (устойчивый и неустойчивый) с $k=2i+1, l=\pm 1$.

Установленные свойства движений системы (1) вне области C_0 иллюстрирует приведенная на рис. 8 бифуркационная диаграмма $\{\gamma, \phi\}$, соответствующая значениям $b=10.0, \beta^*=1.1, \alpha^*=0.25$. Стартовым состоянием системы при $\gamma=0.1$ (то есть в области G_0) является ψ -цикл L_1^- , параметр γ изменяется от 0.1 до 5.0. Диаграмма $\{\gamma, \phi\}$ характеризует процесс преобразования ψ -цикла L_1^- в устойчивый предельный цикл с $k=1, l=1$ при переходе с увеличением γ из области G_0 в область G_1^+ . На рис. 9 показаны фазовые портреты системы (1), иллюстрирующие некоторые из устойчивых предельных циклов и квазипериодические движения.

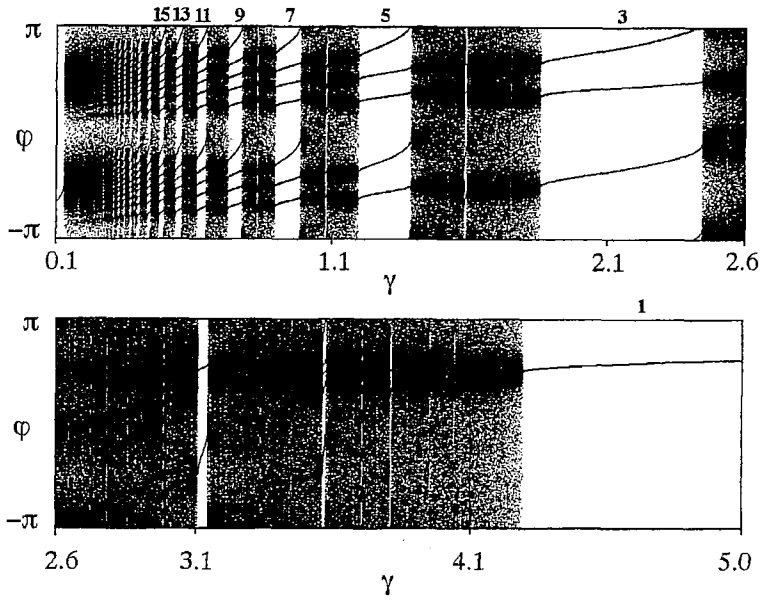


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма $\{\gamma, \varphi\}$

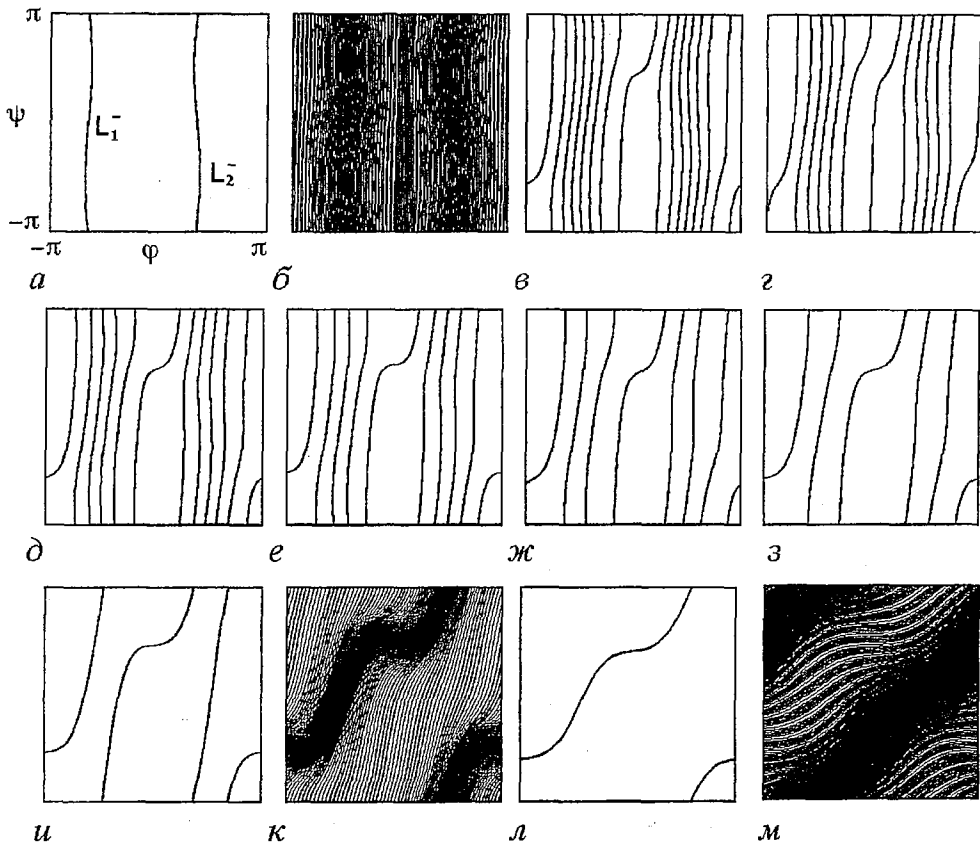


Рис. 9. Периодические (а, в-и, л) и квазипериодические (б, к, м) движения, реализуемые вне области S_0 со значениями (k, l) : а - (1, 0); в - (15, 1); г - (13, 1); д - (11, 1); е - (9, 1); ж - (7, 1); з - (5, 1); и - (3, 1); л - (1, 1)

6. Рассмотрим асимптотическое поведение бифуркационных кривых β_{p1}^* , β_{c2}^* и β_{c3}^* при значениях $b \gg 1$. Производя замену $d\tau_2 = (\beta - b \cos \psi \sin \psi - \alpha \sin \psi \cos \psi) \text{sign} \beta d\tau$, не изменяющую направление движения по траекториям в области $(\beta - b \cos \psi \sin \psi - \alpha \sin \psi \cos \psi) \text{sign} \beta > 0$, получим вместо системы (1) систему с малым параметром $\mu_1 = 1/b \ll 1$

$$d\psi/d\tau_2 = -\text{sign} \beta, \quad d\phi/d\tau_2 = -\mu_1(\gamma - \sin \psi \cos \psi) \text{sign} \beta / (\beta^* - \cos \psi \sin \psi - \alpha \sin \psi \cos \psi). \quad (3)$$

Исследование системы (3) проведем методом малого параметра аналогично тому, как было выполнено исследование системы (2).

При $\mu_1 = 0$ система (3) является консервативной, ее фазовые траектории определяются уравнением $\phi = h$ ($h = \text{const}$) и представляют собой замкнутые кривые, охватывающие тор T в направлении ψ . Функция Понтрягина для системы (3) имеет вид

$$\Psi_2(h) = 2\pi\alpha^* \sin^2 h \text{sign} \beta / (\alpha^{*2} \sin^2 h + \cos^2 h) +$$

$$+ 2\pi[\gamma - \alpha^* \beta^* \sin^2 h / (\alpha^{*2} \sin^2 h + \cos^2 h)] / (\beta^{*2} - \alpha^{*2} \sin^2 h - \cos^2 h)^{1/2},$$

где $h \in (h_3 \leq h \leq h_4) \cup (-h_4 \leq h < -h_3)$ при $\alpha^* < \beta^* < 1$; $h \in [-\pi, \pi]$ при $\beta^* > 1$; $h_3 = \arcsin[(1 - \beta^{*2}) / (1 - \alpha^{*2})]^{1/2}$, $h_4 = \pi - h_3$.

Уравнение $\Psi_2(h) = 0$ не имеет корней, а система (3) не имеет ψ -циклов при следующих значениях параметров: при $\alpha^* < \beta^* < \beta_{01}^*$, где $\beta_{01}^* = \{\beta^* = \beta_{02}^*, 0 \leq \gamma < \alpha^*\} \cup \{\beta^* = \beta_{03}^*, \alpha^* \leq \gamma < 1\}$, $\beta_{02}^* = 1 - \gamma(1 - \alpha^{*2}) / (2\alpha^*)$, $\beta_{03}^* = \alpha^*(1 + \gamma^2) / (2\gamma)$, когда $\Psi_2(h) < 0$; при $\beta^* > \max(\beta_{03}^*, \beta_{04}^*)$, при $-1 < \beta^* < -\alpha^*$, $\gamma \leq 0$ и при $\beta^* \leq -1$, $\gamma > 0$, где $\beta_{04}^* = \{\beta^* = \beta_{05}^*, 0 \leq \gamma < 1\} \cup \{\beta^* = \alpha^*, \gamma \geq 1\}$, $\beta_{05}^* = -\gamma(1 - \alpha^{*2}) / (2\alpha^*) + [\gamma^2(1 - \alpha^{*2}) / (4\alpha^{*2}) + 1]^{1/2}$, когда $\Psi_2(h) > 0$.

При значениях $\beta_{02}^* < \beta^* < \min(\beta_{03}^*, \beta_{05}^*)$ уравнение $\Psi_2(h) = 0$ имеет восемь корней:

$$h_{1,2}^* = \arcsin[\gamma / (2\alpha^{*2}(2\alpha^*\beta^* + \gamma(1 - \alpha^{*2}))) \mp [(2\alpha^*\beta^* + \gamma(1 - \alpha^{*2}))^2 \mp 4\alpha^{*2}]^{1/2}]^{1/2},$$

$$h_{3,4}^* = \pi - h_{2,1}^*, \quad h_{5,6}^* = -h_{1,2}^*, \quad h_{7,8}^* = -h_{3,4}^*.$$

При этом производная $\Psi'_{2h}(h_j^*) < 0$ для $j = 2, 4, 5, 7$, $\Psi'_{2h}(h_j^*) > 0$ для $j = 1, 3, 6, 8$. Корни h_2^* , h_4^* , h_5^* и h_7^* соответствуют устойчивым предельным циклам L_1^+ , L_2^+ , L_2^- и L_1^- , а корни h_1^* , h_3^* , h_6^* и h_8^* — неустойчивым предельным циклам Γ_2^+ , Γ_1^+ , Γ_1^- и Γ_2^- системы (3), которые характеризуются значениями $k=1$, $l=0$ (рис. 7, б).

При значениях $\beta_{03}^* < \beta^* < \beta_{05}^*$ уравнение $\Psi_2(h) = 0$ имеет четыре корня h_1^* , h_4^* , h_5^* и h_8^* , которым соответствуют предельные циклы Γ_2^+ , L_2^+ , L_2^- и Γ_2^- (рис. 7, в). При $\beta_{05}^* < \beta^* < \beta_{03}^*$, $\gamma > 0$ также существуют четыре корня уравнения $\Psi_2(h) = 0$ — h_2^* , h_3^* , h_6^* и h_7^* , которым соответствуют предельные циклы L_1^+ , Γ_1^+ , Γ_1^- и L_1^- (рис. 7, а).

Значения $\beta^* = \beta_{02}^*$, $\beta^* = \beta_{03}^*$ и значения $\gamma = 0$, $|\beta^*| \geq 1$, соответствующие существованию двойных корней уравнения $\Psi_2(h) = 0$, отвечают бифуркациям двойных предельных циклов системы (3). При $\beta^* = \beta_{02}^*$ система (3) имеет четыре двойных предельных ψ -цикла, которые образуются в результате слияния циклов L_1^+ и Γ_2^+ , L_2^- и Γ_1^- , L_2^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_2^- . При $\beta^* = \beta_{03}^*$ существуют два двойных ψ -цикла, которые образуются в результате слияния циклов L_1^+ и Γ_1^+ , L_1^- и Γ_1^- . Значениям $\beta^* = \beta_{05}^*$ соответствует стягивание циклов L_2^+ , Γ_2^+ , L_2^- и Γ_2^- к петлям сепаратрис седла, охватывающих тор T в направлении оси ψ .

На рис. 10 приведен качественный вид бифуркационных кривых β_{02}^* , β_{03}^* и

β_{05}^* и областей C_3^*, C_4^* и C_5^* на плоскости (γ, β^*) , в которых система (3) при $\mu_1 \ll 1$ имеет предельные циклы. Области C_3^*, C_4^* и C_5^* дают асимптотическое представление областей $C_3 \cup G_0, C_4$ и C_5 (см. рис. 5), соответственно. При $b \rightarrow \infty$ область $C_3 \cup G_0 \rightarrow C_3^*$, область $C_4 \rightarrow C_4^*$, область $C_5 \rightarrow C_5^*$. Следовательно, значения $\beta_{02}^*, \beta_{03}^*$ и β_{05}^* можно использовать в качестве аналитических оценок области захвата C_s и области асинхронных режимов C_p , соответствующих существованию периодических асинхронных режимов перекрестно связанных систем ФАПЧ.

7. Проведенное исследование динамических состояний и бифуркаций в модели (1) позволило получить достаточно полное описание возможных режимов поведения перекрестно связанных систем фазовой автоподстройки с единичными фильтрами в цепях управления. Основным результатом исследования является выясненное сильное влияние связи по цепям управления. В отсутствие этой связи (то есть при $\alpha=0$) коллективное поведение взаимодействующих систем ФАПЧ в области C_0 качественно подобно поведению одиночной системы ФАПЧ первого порядка: состояние синхронизации является единственным стационарным режимом системы; область захвата в состояние синхронизации совпадает с областью C_0 существования этого режима. Введение связи по цепям управления ($\alpha \neq 0$) приводит к появлению в области C_0 области параметров, соответствующей одновременному существованию режима синхронизации и асинхронных режимов предельных циклов модели (1). Получены аналитические оценки границ областей параметров, отвечающих существованию предельных циклов модели (1) с индексами вращения (0,1) в случае достаточно малой величины отношения коэффициентов усиления по цепям управления и (1,0) в случае достаточно большой величины этого отношения.

Возможность существования таких предельных циклов позволяет реализовать автомодуляционные режимы связанных систем ФАПЧ, в которых частота колебаний каждого из управляемых генераторов периодически изменяется относительно некоторого среднего значения; при этом колебания одного из генераторов совершаются без набегов фазы на 2π , а колебания другого генератора — с вращением фазы. Установлена достаточно сложная структура областей притяжения стационарных режимов на фазовом торе, определяющая финальный результат в зависимости от начальных условий. Выяснено существование периодических и квазипериодических движений модели (1) при значениях параметров вне области C_0 , которым отвечают периодические и квазипериодические автомодуляционные режимы управляемых генераторов.

Из полученных результатов следует, что систему перекрестно связанных колец ФАПЧ, не содержащих фильтров низких частот в цепях управления, можно рассматривать как генератор сложнопериодических автомодуляционных колебаний, если выбрать значения параметров систем, соответствующие существованию предельных циклов модели (1). При этом, изменяя степень связи по цепям управления, можно эффективно воздействовать на свойства таких колебаний. Включение фильтров в цепях управления позволяет обеспечить в рассматриваемой системе, как показано в [3–5], генерацию хаотических автомодуляционных колебаний.

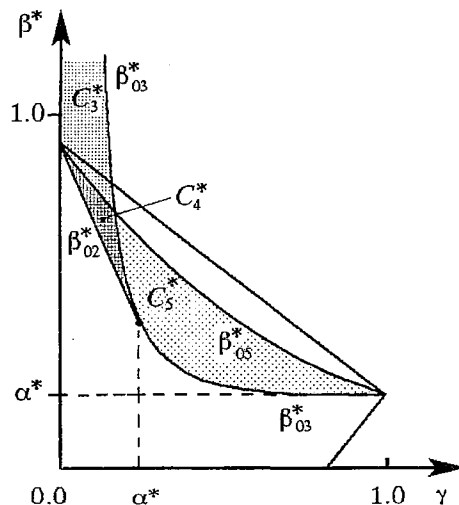


Рис. 10. Расположение бифуркационных кривых при значениях $b \gg 1$

Полученные оценки областей существования предельных циклов модели (1) типа (0,1) и (1,0) могут представить интерес и для теории сетей фазовых осцилляторов [10] при определении областей существования режимов полной и частичной синхронизации.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России» (проект 03.01.33) и РФФИ (проект 99-02-17742).

Библиографический список

1. Пономаренко В.П. К теории систем синхронизации с перекрестными связями // Известия вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14, № 11. С.1728.
2. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Динамические свойства двухконтурной взаимосвязанной системы фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1984. Т.29, № 6. С.1125.
3. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Нелинейные явления в системе взаимосвязанных устройств фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т.38, № 4. С. 711.
4. Пономаренко В.П., Матросов В.В. О динамике инерционной взаимосвязанной системы фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 4. С.721.
5. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Сложные колебания в системе взаимодействующих автогенераторов с фазовым управлением // Известия вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1604.
6. Федосова Т.С. Анализ систем фазовой синхронизации с двумя периодическими нелинейностями // Радиотехника. 1986. № 6. С. 46.
7. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Бакаева, М.В. Капранова. М.: Сов.радио, 1978.
8. Yuen J.H. A double-loop tracking system // IEEE Trans. on Commun. 1972. Vol. Com.-20. December. № 6. P.1142.
9. Ohlson J.E. Polarization tracking of a partially coherent signal using a double loop // IEEE Trans. on Commun. 1975. Vol.Com.-23. № 9. P.859.
10. Казанович Я.Б., Борисюк Р.М. Изучение режимов синхронизации в нейронных сетях фазовых осцилляторов с центральным элементом // Исследования по математической биологии. Сб. научных трудов, посвященный памяти А.Д.Базыкина / Под ред. Э.Э. Шноля. Пущино, 1996. С.124.
11. Белых В.Н., Веричев Н.Н. О динамике взаимосвязанных ротаторов // Известия вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 6. С.688.
12. Пономаренко В.П., Матросов В.В. Автоматизация исследований нелинейной динамики систем синхронизации // Вестник Верхне-Волжского отделения АТН РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Н.Новгород, 1997. Вып. 2(4). С.15.
13. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.

*Нижегородский государственный
университет*

Поступила в редакцию 13.06.2000

REGIMES OF BEHAVIOUR IN THE SYSTEM OF COUPLED OSCILLATORS WITH PHASE CONTROL

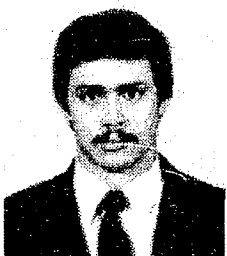
V.P. Ponomarenko, V.V. Matrosov

The dynamical system on phase torus is considered which describe the behaviour of the coupled phase locked loops. Possible regimes of the system's behaviour depending

on initial frequency mismatch, control circuit coefficients of amplification and coupling extent through controlling signal are investigated. Evaluations of capture range are obtained.



Пономаренко Валерий Павлович – родился в Мурманске (1941), окончил Горьковский государственный университет (1963). С 1968 года работает в Научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете (НИИ ПМК при ННГУ). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук (1972) и доктора физико-математических наук (1993) в области теории синхронизации, теории колебаний и динамики систем. С 1991 года – заместитель директора НИИ ПМК при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, применение нелинейной динамики в радиоавтоматике, синхронизация автоколебательных систем, математическое моделирование. Соавтор коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации». Опубликовал много научных статей по направлениям, указанным выше. E-mail: pmk@unn.ac.ru



Матросов Валерий Владимирович – родился в 1961 году, окончил факультет прикладной математики и кибернетики Горьковского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (1982), кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ. Область научных интересов – теория синхронизации, математическое моделирование нелинейных систем, автоматизация научных исследований. Имеет более 30 публикаций в отечественных и иностранных журналах.