



УПРАВЛЯЕМАЯ ПРОТИВОФАЗНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА В СВЯЗАННЫХ КУБИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

В.В. Астахов, А.В. Шабунин, П.А. Стальмахов, А.В. Климишин

Изучается явление противофазной синхронизации во взаимодействующих хаотических системах с симметрией на примере диссипативно связанных кубических отображений. Исследованы движения в симметричном подпространстве, получены условия устойчивости режима управляемой противофазной синхронизации хаоса, рассмотрен процесс десинхронизации хаоса: описаны колебательные режимы и изменение структуры бассейна притяжения хаотического аттрактора при выходе из области синхронизации.

Введение

Исследование явления синхронизации в связанных хаотических системах является одной из важных задач нелинейной динамики, имеющих большое фундаментальное и прикладное значение во многих областях науки и техники.

Одним из простейших видов взаимного согласования движений взаимодействующих хаотических систем является так называемая полная синхронизация хаоса [1] – [6]. В связанных идентичных колебательных системах возможна ситуация, когда выше некоторого порогового значения коэффициента связи колебания подсистем полностью совпадают, $x=y$, где x , y – векторы динамических переменных первого и второго осциллятора, соответственно. То есть режиму полной синхронизации соответствует хаотический аттрактор, расположенный в симметричном подпространстве $x=y$ полного фазового пространства связанных систем. Однако существует класс хаотических динамических систем (например, связанные кубические отображения, осцилляторы Дуффинга, генераторы Чуа), обладающих симметрией не только по отношению к замене $x \rightarrow y$, но и к замене $x \rightarrow -y$. В подобных системах существует два симметричных подпространства $x=y$ и $x=-y$. Поэтому возможны два вида полной синхронизации хаоса, каждому из которых соответствует движение в своем симметричном подпространстве. Движения в первом из них соответствуют режиму полной синфазной синхронизации, а во втором – режиму полной противофазной синхронизации. Противофазная синхронизация хаоса в однонаправленно связанных системах в виде дискретных отображений и обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривалась в работе [7]. В ней, следуя [8], рассматривалась «master-slave»-синхронизация хаоса. Следует отметить, что эффект противофазной синхронизации хаоса имеет большое прикладное значение: появляются новые возможности при разработке методов скрытой передачи информации, что подробно обсуждается в [7].

Хорошо известно, что устойчивые и грубые режимы синфазной синхронизации хаоса могут быть реализованы только при определенных типах связи выше некоторого порогового значения. Однако при многих видах взаимодействия, в широкой области значений коэффициента связи в системе существуют синфазные и противофазные синхронные хаотические движения, но они являются неустойчивыми к возмущениям, направленным трансверсально к симметричному подпространству. В подобных случаях в системе можно осуществить переход из режима несинхронных хаотических колебаний к режиму синхронизации, используя методы управления хаосом. С их помощью определенные хаотические множества, соответствующие синфазным или противофазным синхронным движениям, можно превратить в устойчивые по одним собственным направлениям, оставляя неустойчивыми по другим.

В данной работе рассматривается задача об управляемой противофазной синхронизации хаоса в связанных кубических отображениях. В качестве управляющего воздействия используется цепь обратной связи. Построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от величины параметра управления. Определена область устойчивости противофазного синхронного хаоса. Показано, что разрушение режима управляемой противофазной синхронизации сопровождается явлением пузырения хаотического аттрактора (bubbling attractor) [9] и изрешечиванием его бассейна притяжения (riddled basins) [10].

Исследуемая система

Будем рассматривать систему связанных отображений вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma \{f(y_n) - f(x_n)\}, \\y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma \{f(x_n) - f(y_n)\},\end{aligned}\tag{1}$$

где x_n , y_n – динамические переменные первой и второй подсистемы, γ – коэффициент связи. Динамика парциальной системы описывается отображением

$$x_{n+1} = f(x_n) = (a-1)x_n - ax_n^3,\tag{2}$$

a – управляющий параметр парциальной системы.

В отсутствие связи ($\gamma = 0$) в парциальном отображении (2) при $0 < a < 2$ существует устойчивая неподвижная точка C_0 с координатой $x=0$. С ростом управляющего параметра при $a=2$ ее собственное значение $\mu=a-1$ становится равным $+1$, и C_0 претерпевает бифуркацию потери симметрии (или бифуркацию вил), в результате которой она становится неустойчивой, а в ее окрестности рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек C_1 и C_2 с координатами $x_1 = \{(a-2)/a\}^{1/2}$ и $x_2 = -\{(a-2)/a\}^{1/2}$, соответственно. При дальнейшем увеличении a на базе неподвижных точек C_1 и C_2 происходит каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся при $a=3.3$ возникновением хаотических аттракторов. При $a=3.6$ два симметричных друг другу хаотических аттрактора объединяются в один.

При введении связи динамика системы (1) существенно усложняется. Отметим, что данная система является симметричной по отношению к заменам переменных $x \leftrightarrow y$ и $x \leftrightarrow -y$. Симметричное подпространство, определяемое уравнением $x=y$, будем в дальнейшем называть «антисимметричным», чтобы отличать его от симметричного подпространства, задаваемого уравнением $x=-y$. Движения в симметричном подпространстве $x=y$ полного фазового пространства взаимодействующих систем соответствуют режиму полной синфазной синхронизации, а движения в антисимметричном подпространстве $x=-y$ соответствуют режиму полной противофазной синхронизации.

В системе связанных отображений при $0 < a < 2$ существует устойчивая неподвижная точка $C_{00}: \{x=0, y=0\}$. С увеличением параметра a на линии $a=2$ (l_{sp}^{00} , рис. 1) ее собственное значение $\mu_{\perp} = a-1$ становится равным $+1$. Точка C_{00} претерпевает бифуркацию потери симметрии (бифуркацию вил). В ее окрестности в симметричном подпространстве рождается пара устойчивых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{01}: \{x=y=[(a-2)/a]^{1/2}\},$$

$$C_{02}: \{x=y=-[(a-2)/a]^{1/2}\}.$$

Неподвижная точка C_{00} становится седловой, неустойчивой в симметричном подпространстве, но остается устойчивой в антисимметричном подпространстве.

При дальнейшем увеличении a на линии

$$a = 1 + 1/(1-2\gamma)$$

(l_{ap}^{00} на рис. 1) седловая точка C_{00} претерпевает вторую бифуркацию потери симметрии. Ее второе собственное значение $\mu_{\perp} = (1-2\gamma)(a-1)$ становится равным $+1$. В окрестности C_{00} в антисимметричном подпространстве $x=-y$ рождается пара седловых симметричных друг другу неподвижных точек

$$C_{10}: \{x=-y=[1-(1-\gamma)/[a(0.5-\gamma)]]^{1/2}\}, \quad C_{20}: \{x=-y=-[1-(1-\gamma)/[a(0.5-\gamma)]]^{1/2}\}.$$

Точка C_{00} становится репеллером.

Регулярные и хаотические режимы синфазной синхронизации формируются на базе неподвижных точек C_{01} и C_{02} . При изменении управляющего параметра a наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода синфазных периодических орбит, который приводит к появлению двух хаотических аттракторов A_{01} и A_{02} в симметричном подпространстве в окрестности точек C_{01} , C_{02} . При дальнейшем увеличении a происходит объединение двух синхронных хаотических аттракторов в один. Режимы синфазной синхронизации хаоса и бифуркационные механизмы десинхронизации синфазных хаотических движений в данной системе детально описаны в работе [6]. В настоящей работе исследуются движения в противофазном симметричном подпространстве.

Противофазная синхронизация в системе (1)

Противофазные режимы формируются на базе неподвижных точек C_{10} и C_{20} . Предельные множества, сформированные на базе этих двух точек, идентичны с точностью до преобразования симметрии. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только одного семейства режимов (например, сформированного около точки C_{10}).

Седловая неподвижная точка C_{10} рождается из седловой неподвижной точки C_{00} . Она является неустойчивой по отношению к возмущениям, трансверсальным к антисимметричному подпространству. На линии бифуркации вил l_{rp}^1 (рис. 1) точка

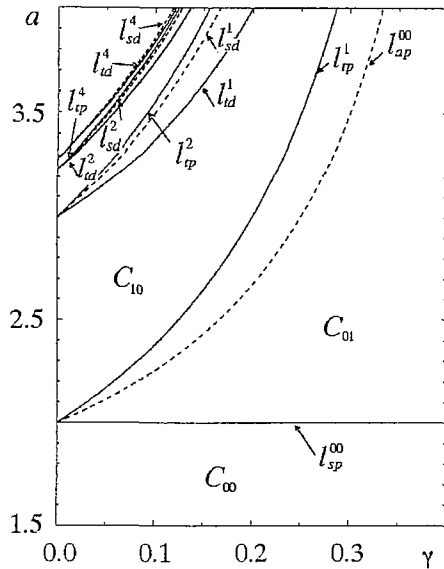


Рис. 1. Области существования режимов на плоскости параметров γ, a

C_{10} становится устойчивой. Данная неподвижная точка соответствует регулярным противофазным колебаниям с наименьшим периодом. На базе этой точки при изменении параметров a и γ наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода. Каждая из орбит, участвующих в каскаде, претерпевает бифуркацию удвоения периода дважды. Вначале, будучи устойчивой, – по одному направлению, затем, уже став седловой, – по второму. В результате первого удвоения орбита теряет устойчивость в направлении, трансверсальном к антисимметричному подпространству. В ее окрестности вне антисимметричного подпространства рождается устойчивая орбита удвоенного периода. В результате второго удвоения седловая орбита теряет устойчивость в тангенциальном к подпространству направлении. Она становится репеллером, и в ее окрестности, внутри антисимметричного подпространства рождается седловая орбита удвоенного периода. На рис. 1 линии первого удвоения обозначены: l_{id}^1 – для орбиты периода 1, l_{id}^2 – для орбиты периода 2 и l_{id}^4 – для орбиты периода 4, а линии вторых удвоений (штриховые линии): l_{sd}^1 – для орбиты периода 1, l_{sd}^2 – для орбиты периода 4 и l_{sd}^4 – для орбиты периода 2. Затем, при изменении параметров появившиеся внутри антисимметричного подпространства седловые орбиты становятся устойчивыми через субкритические бифуркации вил. Линии этих бифуркаций обозначены соответственно l_{p}^2 , l_{p}^4 . Таким образом, на плоскости параметров в области между линиями l_{p}^1 и l_{id}^1 существует устойчивая противофазная орбита периода 1, между линиями l_{p}^2 и l_{id}^2 – устойчивая противофазная орбита периода 2, между линиями l_{p}^4 и l_{id}^4 – устойчивая противофазная орбита периода 4. Бифуркации орбит более высокого периода нами не рассматривались, но можно предположить, что они происходят подобным образом. Следовательно, до перехода к хаосу на плоскости параметров существуют полосы устойчивости для противофазных периодических орбит, все более и более сужающиеся с ростом периода орбиты. Эти области разделены полосами неустойчивости для тех же орбит.

Похожий бифуркационный сценарий наблюдался в ряде систем для случая синфазной синхронизации [11, 12]. Однако в случае синфазной синхронизации бифуркации удвоения внутри симметричного подпространства предшествовали бифуркациям удвоения в трансверсальном направлении. Вследствие этого:

- области устойчивости синфазных орбит не разделялись областями трансверсальной неустойчивости;

- в результате каскада удвоений внутри симметричного подпространства, при большой связи в симметричном подпространстве формировался хаотический аттрактор.

Таким образом, численные исследования динамики системы в антисимметричном подпространстве и бифуркационный анализ периодических орбит, участвующих в каскаде бифуркаций удвоения периода, показали, что в системе существуют противофазные периодические движения с любым конечным периодом. Области существования этих колебаний на плоскости параметров сужаются при увеличении периода орбиты. Противофазные хаотические колебания в ходе исследования обнаружены не были.

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о возможности существования противофазной синхронизации хаоса в системе. Для решения этой задачи удобнее перейти к новым переменным

$$u=(x+y)/2, \quad v=(x-y)/2.$$

Запишем полусумму и полуразность уравнений системы (1)

$$(x_{n+1}+y_{n+1})/2=1/2(f(x_n)+f(y_n)), \quad (3)$$

$$(x_{n+1}-y_{n+1})/2=1/2((1-2\gamma)(f(x_n)-f(y_n))). \quad (4)$$

Полагаем, что изображающая точка находится в окрестности антисимметричного подпространства:

$$x=(x-y)/2+\Delta x, y=(y-x)/2+\Delta y,$$

где Δx и Δy малы. В этом случае можно разложить $f(x)$ и $f(y)$ в ряд Тейлора в окрестности $(x-y)/2$, ограничившись линейными членами разложения

$$f(x)=f[(x-y)/2]+f'[(x-y)/2][x-(x-y)/2],$$

$$f(y)=-f(-y)=-f[(x-y)/2]-f'[(x-y)/2][-y-(x-y)/2].$$

Подставив полученные соотношения в (3),(4), получим

$$u_{n+1}=f'(v_n)u_n, \quad (5)$$

$$v_{n+1}=(1-2\gamma)f(v_n). \quad (6)$$

В новых переменных вектор $(1;0)$ направлен перпендикулярно антисимметричному подпространству, а вектор $(0;1)$ – тангенциально к нему. Уравнение (6) задает движение внутри антисимметричного подпространства. Независимость этого уравнения от переменной u отражает факт инвариантности антисимметричного подпространства относительно оператора эволюции исходной системы (1). В отличие от случая синфазной синхронизации [6], форма синхронных колебаний

зависит от коэффициента связи γ . Для определения устойчивости колебаний внутри антисимметричного подпространства (для возмущений, направленных тангенциально) можно ввести «тангенциальный показатель Ляпунова»

$$\Lambda_1=\lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{n=1}^N \ln|(1-\gamma)f'(v_n)|. \quad (7)$$

На рис. 2 представлена зависимость тангенциального показателя Ляпунова от коэффициента связи при фиксированном значении параметра $a=3.8$ и построена соответствующая бифуркационная диаграмма режимов внутри антисимметричного подпространства.

Уравнение (5) определяет движение в нормальном направлении к антисимметричному подпространству. Параметр связи не входит в него явным образом, однако зависимость от v_n предполагает неявную зависимость от коэффициента связи. Нулевое решение уравнения (5) $u=0$ соответствует противофазным колебаниям. Устойчивость этого решения определяет устойчивость противофазных колебаний к трансверсальным возмущениям. Эта устойчивость определяется «трансверсальным показателем Ляпунова»

$$\Lambda_{\perp}=\lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{n=1}^N \ln|f'(v_n)|. \quad (8)$$

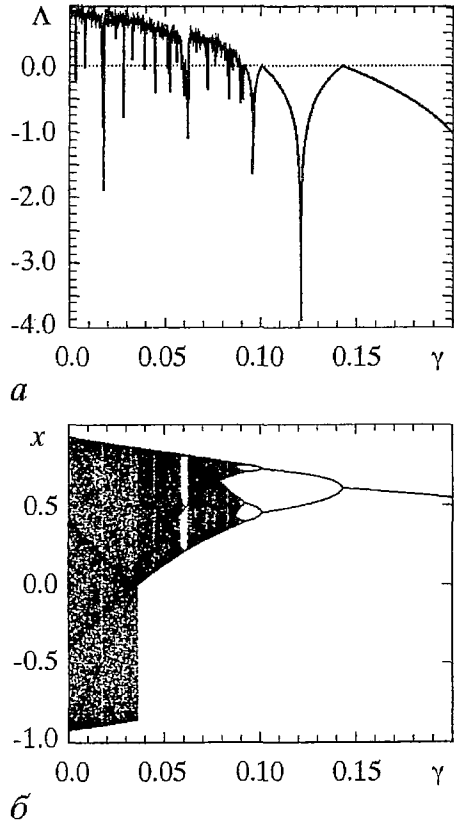


Рис. 2. Тангенциальный показатель Ляпунова (а) и бифуркационная диаграмма (б) для режимов в антисимметричном подпространстве в зависимости от значений коэффициента связи γ при $a=3.8$

Из выражений (7) и (8) видно соотношение между тангенциальным и трансверсальным показателями Ляпунова:

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\parallel} - \ln|1 - 2\gamma|. \quad (9)$$

В наших исследованиях мы ограничиваемся случаем малых положительных γ ($0 \leq \gamma \leq 0.5$). При этом $\ln|1 - 2\gamma| \leq 0$ и, следовательно,

$$\Lambda_{\perp} \leq \Lambda_{\parallel}.$$

Следствием данного соотношения является тот факт, что на плоскости параметров линии потери устойчивости в трансверсальном направлении идут ниже линий потери устойчивости в тангенциальном направлении. Выше линии перехода к хаосу в антисимметричном подпространстве формируется хаотическое предельное множество, тангенциальный показатель Ляпунова для которого всегда больше нуля. При этом, согласно соотношению (9), трансверсальный показатель Ляпунова также больше нуля. Поэтому противофазные хаотические колебания в системе диффузионно связанных отображений не могут быть трансверсально устойчивыми. Режим противофазной самосинхронизации хаоса в них не существует.

Управляемая синхронизация

Для того чтобы стабилизировать изначально неустойчивый режим противофазной синхронизации хаоса, можно использовать дополнительную обратную связь. Добавим в правую часть первого уравнения системы (1) слагаемое обратной связи вида $r(f(x_n) + f(y_n))$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \gamma[f(y_n) - f(x_n)] + r(f(x_n) + f(y_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \gamma[f(x_n) - f(y_n)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Данное воздействие выбрано таким образом, чтобы при достижении целей управления, то есть режима противофазной синхронизации, дополнительное слагаемое обращалось в нуль. Вследствие этого управляющее воздействие оказывает влияние не на форму противофазных колебаний, а только на их устойчивость по отношению к трансверсальным возмущениям.

Перейдя к новым переменным u и v , запишем линеаризованные уравнения

$$u_{n+1} = (1+r)f'(v_n)u_n, \quad (11)$$

$$v_{n+1} = (1-2\gamma)f(v_n) + rf'(v_n)u_n. \quad (12)$$

В случае противофазных колебаний $u_n = 0$ и уравнение (12) переходит в уравнение (6). Из уравнения (11) определяется трансверсальный показатель Ляпунова для системы с управлением

$$\Lambda_{\perp \text{ управ.}} = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/N \sum_{n=1}^N \ln|(1+r)f'(v_n)| \quad (13)$$

или

$$\Lambda_{\perp \text{ управ.}} = \Lambda_{\perp} + \ln|1+r|. \quad (14)$$

Выбирая r достаточно близким к минус единице, можно сделать трансверсальный показатель Ляпунова сколь угодно малым и, следовательно, сделать противофазный режим устойчивым.

На рис. 3, а построена зависимость трансверсального показателя Ляпунова от управляющего параметра r . Значения других параметров системы

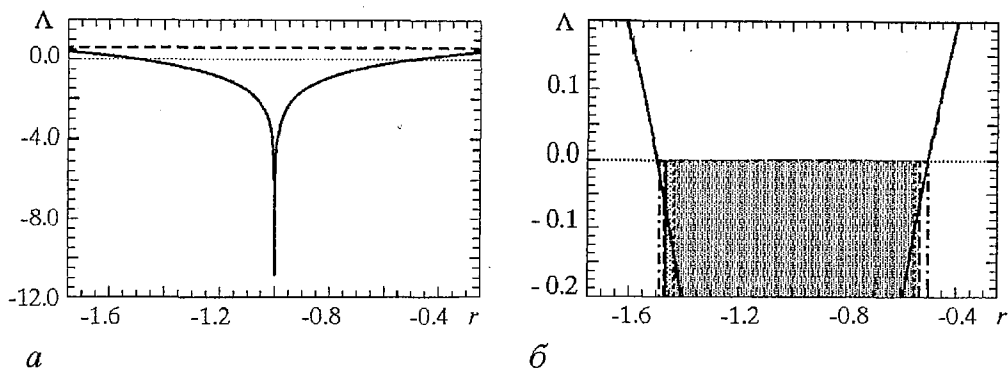


Рис. 3. *a* – зависимость трансверсального показателя Ляпунова от параметра управления при $a=3.8$, $\gamma=0.04$. Штриховая линия – значения тангенциального показателя Ляпунова. *б* – фрагмент рисунка в увеличенном масштабе с нанесенными областями управляемой синхронизации при различных уровнях шума: 0.0 (---); $1 \cdot 10^{-4}$ (---); $1 \cdot 10^{-3}$ (---)

соответствуют (при $r=0$) режиму несинхронного объединенного хаотического аттрактора, $a=3.8$, $\gamma=0.04$. Для перехода от несинхронного хаоса к режиму противофазной синхронизации использовалась следующая процедура управления. Выбирались указанные выше значения параметров, соответствующие режиму несинхронного хаоса (рис. 4, *a*), и начальные значения из бассейна притяжения хаотического аттрактора. В каждый момент времени отслеживалась близость изображающей точки к антисимметричному подпространству. Для этого величина $\rho=|x+y|$ сравнивалась с выбранным пороговым значением δ . Если $\rho > \delta$, то изображающая точка находится далеко от антисимметричного подпространства и управление не включается. Если $\rho \leq \delta$, то изображающая точка находится в малой окрестности антисимметричного подпространства и управляющее воздействие включается. При этом, если выбранное значение r попадает в диапазон, где $\Lambda_{\text{управ.}} < 0$, хаотическое множество внутри антисимметричного подпространства становится устойчивым к трансверсальным возмущениям и траектория втягивается в антисимметричное подпространство. Управляющее воздействие в этом случае стремится к нулю. В наших численных экспериментах значение δ выбиралось равным 0.01 . На рис. 4 представлены фазовые портреты системы без управления (*a*), с управлением (*в*, *д*), а также соответствующие им временные реализации *и* (*б*, *з*, *е*). При отсутствии управления траектория равномерно покрывает область, по форме близкую к квадрату $[-1;1] \times [-1;1]$ (*a*). Хаотический аттрактор соответствует режиму объединенного хаоса. При введении управляющего воздействия на указанной области начинает прорисовываться диагональ $x=-y$ (*в*). Во временной реализации появляются интервалы синхронного поведения (*з*). Наконец, если мы выбираем коэффициент r таким, что трансверсальный показатель Ляпунова становится отрицательным, система переходит к режиму полностью синхронного хаоса. Хаотический аттрактор при этом представляет собой одноленточный аттрактор, сформированный около одной из неподвижных точек C_{10} или C_{20} . На рис. 3, *б* представлены интервалы параметра r , обеспечивающие управляемую синхронизацию, при различных уровнях шума. Усилению шума соответствует более темный цвет области. При полном отсутствии шума область управляемой синхронизации полностью совпадает с интервалом параметра r , где трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен. При добавлении шума зона управляемости сужается к центру.

В ряде работ, исследующих механизмы разрушения полной синфазной синхронизации хаоса в симметрично связанных системах с удвоениями периода [3 – 6], было показано, что потеря синхронизации происходит по определенному сценарию. Разрушение хаотической синхронизации сопровождается явлениями пузырения хаотического аттрактора (bubbling attractor), которое заключается в

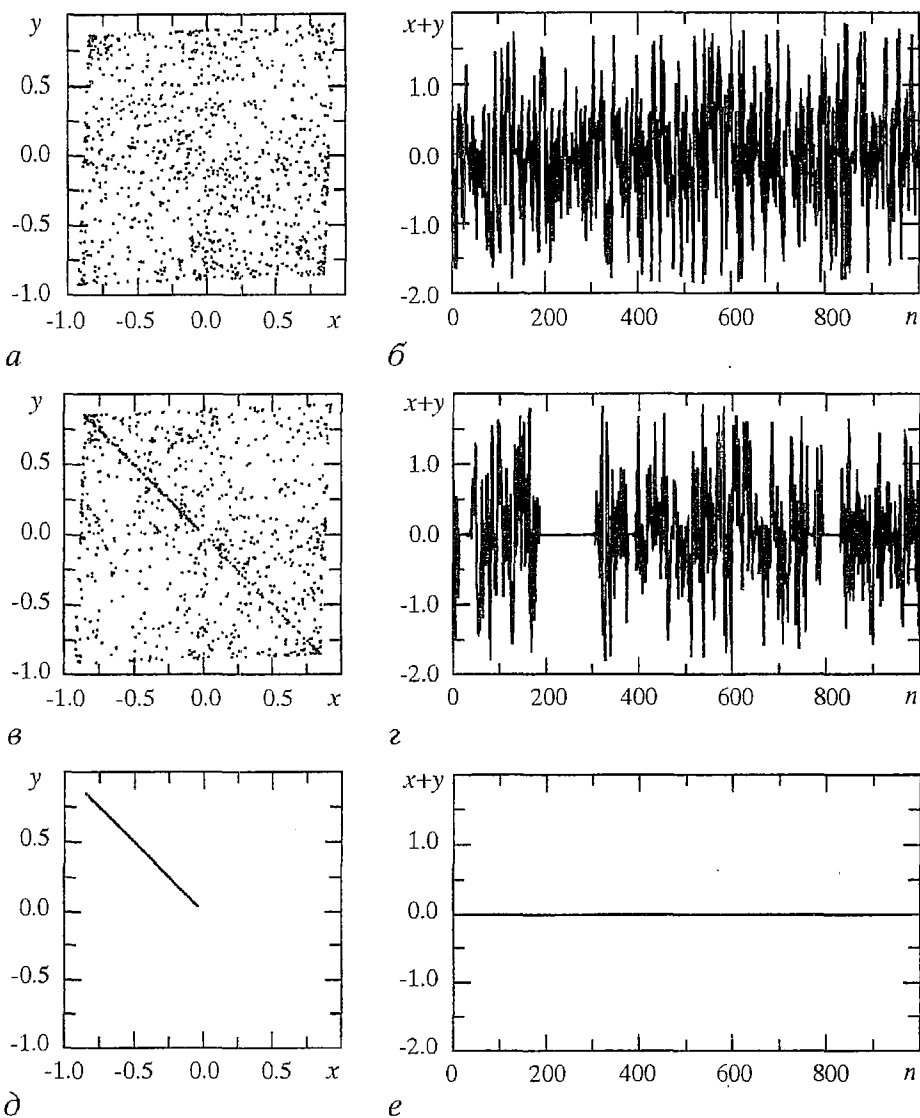


Рис. 4. Фазовые портреты и временные реализации колебаний при отсутствии управления $r=0$ (а, б), при частичном управлении $r=-0.48$ (в, з) и в режиме управляемой синхронизации $r=-0.5$ (д, е)

том, что устойчивый хаотический аттрактор, располагающийся в симметричном подпространстве, в присутствии сколь угодно малого шума «вскипает» (траектория время от времени выбрасывается в сторону от симметричного подпространства) [9], и изрешечиванием его бассейна притяжения (riddled basins), когда в непосредственной близости от аттрактора появляются области из бассейнов притяжения других аттракторов [10]. Закономерным является вопрос, присутствуют ли данные явления при разрушении управляемой противофазной синхронизации хаоса. Для ответа на этот вопрос мы проследили за изменениями хаотического аттрактора при изменении коэффициента r . В ходе численного эксперимента начальные условия выбирались вблизи антисимметричного подпространства, управляющее воздействие было включено во все время исследования независимо от того, находится ли изображающая точка вблизи антисимметричного подпространства или нет. Коэффициент управления r выбирался первоначально внутри интервала, где трансверсальный показатель Ляпунова отрицателен. При значениях управляющего параметра $-1 < r < -0.525$ хаотический аттрактор, располагающийся в антисимметричном подпространстве,

является устойчивым к трансверсальным возмущениям. Первоначально выбранное возмущение затухает во времени и изображающая точка втягивается в антисимметричное подпространство. Добавление в систему малого шума (интенсивностью порядка $1 \cdot 10^{-5}$) не приводит к заметным изменениям в ее поведении. При увеличении управляющего параметра, $r > -0.525$, в системе наблюдается пузырящийся аттрактор. Хаотический аттрактор в антисимметричном подпространстве остается устойчивым к трансверсальным возмущениям, но время переходного процесса к нему становится очень большим (сотни тысяч итераций) и оно чувствительным образом зависит от выбранных начальных условий. Добавление в систему малого шума приводит к существенной перестройке фазового портрета аттрактора. Аттрактор приобретает конечную толщину. Начинаются перескоки между хаотическими множествами в окрестности точек C_{10} и C_{20} . Соответствующая пузырящемуся аттрактору временная реализация имеет характер on-off перемежаемости [13]. На рис. 5 изображены фазовые портреты

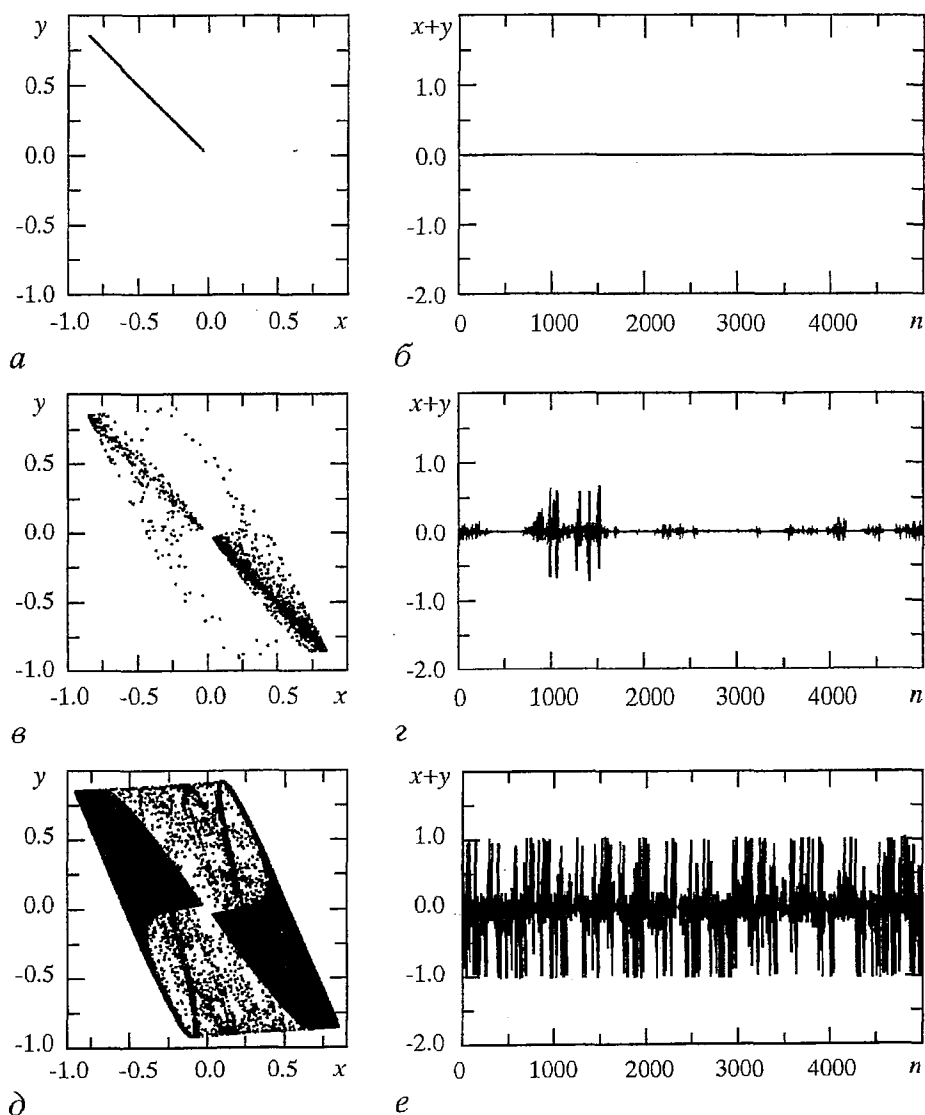


Рис. 5. Фазовые портреты и временные реализации в отсутствие шума (*а, б*) и при добавлении малого шума в систему (*а, г*). На рис. *д, е* представлен аттрактор, сформированный в результате бифуркации прорыва

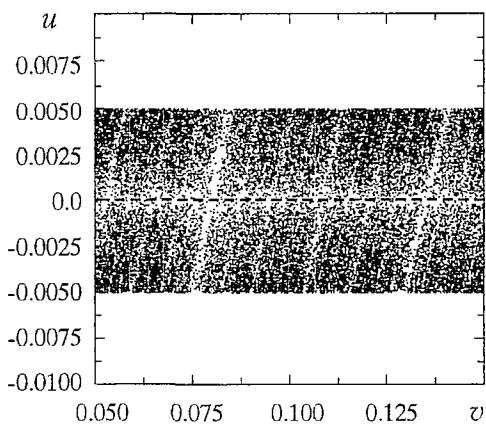


Рис. 6. Фрагмент бассейна притяжения хаотического аттрактора из антисимметричного подпространства при $r=-1.485$. Черным цветом обозначены точки, относящиеся к бассейну аттрактора на бесконечности

трансформируется в хаотическое седло [14]. Синхронные колебания перестают наблюдаться в системе как при наличии шума, так и при его отсутствии. Хаотический аттрактор имеет фазовый портрет, сходный с портретом пузырящегося аттрактора (рис. 5, д). Явления изрешечивания бассейна притяжения аттрактора из антисимметричного подпространства при разрушении режима синхронизации не наблюдалось. При изменении управляющего параметра в сторону уменьшения, при $r < -1.46$ также наблюдается переход от грубого устойчивого режима противофазной синхронизации к пузырящемуся аттрактору. Затем, при $r < -1.472$ бассейн притяжения хаотического аттрактора, располагающегося в антисимметричном подпространстве, изрешечивается областями из бассейна притяжения аттрактора на бесконечности. На рис. 6 представлен фрагмент бассейна притяжения хаотического аттрактора в антисимметричном подпространстве (белый цвет) с вкрапленными в него областями из бассейна притяжения аттрактора на бесконечности (черный цвет). Для большей наглядности область построена в координатах (v, u) , антисимметричное подпространство ($u=0$) обозначено штриховой линией. Результаты получены для значений параметров $a=3.8$, $\gamma=0.04$, $r=-1.485$. Несмотря на кажущееся обилие черных точек, точек из бассейна притяжения хаотического аттрактора в рассматриваемом регионе гораздо больше.

Заключение

В работе была рассмотрена управляемая противофазная синхронизация хаоса в связанных кубических отображениях. Построены области устойчивости регулярных синхронных режимов. Найдена связь между тангенциальным и трансверсальным показателями Ляпунова. Показано, что в любых дискретных отображениях с диффузионной связью собственная противофазная синхронизация хаоса невозможна. На примере связанных кубических отображений продемонстрирован способ управляемой противофазной хаотической синхронизации для подобных систем. Установлено, что добавление в систему дополнительного слагаемого обратной связи может стабилизировать противофазные хаотические колебания в ограниченной области значений управляющего параметра. При выходе из этой области происходит разрушение режима синхронизации, сопровождающееся в одном случае (при $r > -1$) явлением пузыряния хаотического аттрактора и завершающееся бифуркацией прорыва, в

другом случае (при $r < -1$) – явлением пузырения аттрактора, а затем изрепечиванием его бассейна притяжения. Бифуркационные механизмы указанных явлений пока не вполне ясны и требуют дальнейших исследований.

Работа была поддержана грантом РФФИ 00–02–17512 и Фондом развития гражданских исследований (CRDF, грант № REC–006).

Библиографический список

1. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of theoretical physics. 1983. Vol. 9. P. 32.
2. Afraimovich V.S., Verichev N.N., Rabinovich M.I. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems // Radiofizika. 1986. Vol. 29. P. 1050.
3. Astakhov V., Shabunin A., Kapitaniak T., Anishchenko V. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79. P. 1014.
4. Astakhov V., Hasler M., Kapitaniak T., Shabunin A., Anishchenko V. Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 5620.
5. Kapitaniak T., Maistrenko Y. Riddling bifurcations in coupled piecewise linear maps // Physica D. 1998. Vol. 126. P. 18.
6. Астахов В.В., Шабунин А.В., Анищенко В.С. Механизмы разрушения хаотической синхронизации в системе связанных кубических отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Vol. 7. P. 3.
7. Cao L.-Y., Lai Y.-C. Antiphase synchronism in chaotic systems // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 58. P. 382.
8. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
9. Ashvin P., Buescu J., Stewart I. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 193. P. 126.
10. Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Venkataramani S.C. Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. P. 55.
11. Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.П., Селезнев Е.П. Мультистабильные состояния в диссипативно связанных Фейгенбаумовских системах // Письма в ЖТФ. 1989. Vol. 15. P. 60.
12. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L. Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. Journal of Bifurcation and Chaos. 1995. Vol. 5. P. 1677.
13. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On-off intermittency: a mechanism for bursting // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 279.
14. Ashvin P., Buescu J., Stewart I. From attractors to chaotic saddle: a tale of transverse instability // Nonlinearity. 1996. Vol. 9. P. 703.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 7.04.2000
после доработки 14.06.2000

CONTROLLED ANTIPHASE CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN COUPLED CUBIC MAPS

V.V. Astakhov, A.V. Shabunin, P.A. Stalmakhov, A.V. Klimshin

Antiphase synchronization is studied in interacting chaotic systems with symmetric coupling. A system of two diffusively coupled cubic maps is chosen as a model. Motion in symmetric subspace are investigated. Conditions of stability for antiphase oscillations

are obtained. We considered the controlled antiphase chaotic synchronization and process of synchronization loss with the parameter decreasing.



Астахов Владимир Владимирович – окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1983) и доктора (1999) физико–математических наук. Работает доцентом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос, синхронизация и управление хаосом. Имеет более 50 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.

E-mail: astakhov@chaos.ssu.runnet.ru

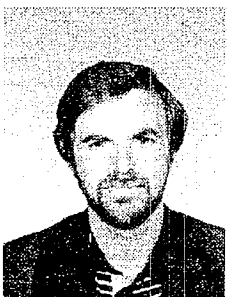


Шабунин Алексей Владимирович – родился в Саратове (1966). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности радиофизика (1990). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук (1998) по синхронизации и управлению хаосом в связанных колебательных системах. Доцент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний и динамический хаос. Автор 18 опубликованных работ.

E-mail: alexey@chaos.ssu.runnet.ru



Стальмахов Петр Андреевич – родился в Саратове (1979). Окончил Физико–технический лицей №1 (1996). В настоящее время – студент 5–го курса Саратовского государственного университета. Область научных интересов – теория динамического хаоса, синхронизация хаоса.



Климшин Александр Викторович – окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Ассистент кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Область научных интересов – теория колебаний.