



## ВЫНУЖДЕННАЯ ФАЗОВАЯ синхронизация цепочки хаотических осцилляторов

*А.И. Фомин, Т.Е. Вадивасова, О.В. Сосновцева, В.С. Анищенко*

Численно исследуется вынужденная частотно-фазовая синхронизация цепочки однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера. Синхронизирующий гармонический сигнал подается на первый осциллятор цепочки. Определена область синхронизации на плоскости параметров «частота воздействия – коэффициент связи», в которой исследованы особенности динамического режима цепочки.

### Введение

В настоящее время в нелинейной динамике внимание исследователей все больше переключается от маломерных нелинейных систем к изучению ансамблей, состоящих из большого количества элементов, объединенных локальной или глобальной связью. Интерес к динамике ансамблей связан с их большой теоретической и практической значимостью, с одной стороны, и все возрастающими возможностями компьютерного моделирования, с другой. Цепочки и решетки, состоящие из элементов с локальной связью, служат дискретными аналогами активных распределенных сред [1–3]. Кроме того, различного рода ансамбли нелинейных подсистем интересны и сами по себе, так как широко распространены в природе и технике. Системы взаимосвязанных осцилляторов служат моделями многих физических [4–6], химических [7] и радиотехнических систем [8–10]. Особенно широкое распространение ансамбли осцилляторов нашли при математическом моделировании биологических объектов, таких как нейронные сети, тонкие мембраны, взаимодействующие популяции и др. [11–14].

В основе многих механизмов самоорганизации ансамблей осцилляторов лежит явление синхронизации колебаний парциальных систем, составляющих ансамбль. Теория синхронизации, первоначально развитая для квазигармонических осцилляторов [7,15–17], была обобщена на широкий круг систем, включая хаотические [18–26] и даже стохастические [27,28] системы. Для хаотических осцилляторов различают полную синхронизацию, соответствующую полному совпадению колебаний парциальных систем [19,22], обобщенную синхронизацию, означающую топологическую эквивалентность парциальных колебаний [21,26], и частотно-фазовую (синхронизацию по Гюйгенсу), проявляющуюся в захвате мгновенных фаз и характерных частот хаотических колебаний [20,23–25,29].

Исследования фазовой синхронизации в ансамблях взаимодействующих периодических осцилляторов с различными типами связи начали проводиться достаточно давно, но до настоящего времени не утратили своей актуальности [7,8,30–35]. В последнее время появилось много работ, посвященных изучению

ансамблей хаотических осцилляторов [1–3,9,10,36–43]. В ансамблях хаотических систем обнаружены все те эффекты синхронизации, которые ранее были установлены для двух взаимодействующих хаотических осцилляторов: полная синхронизация (в однородных ансамблях [10,39,40]), обобщенная синхронизация [21] и частотно–фазовая синхронизация [42,43].

Естественно ожидать, что, подобно вынужденной синхронизации одного хаотического осциллятора гармоническим внешним воздействием [23,25,29], можно наблюдать вынужденную синхронизацию в виде захвата частот и фаз в ансамбле хаотических осцилляторов. При этом вынуждающая сила может быть приложена к какому–то одному элементу ансамбля. В данной работе исследуется цепочка хаотических осцилляторов Ресслера с однонаправленной связью «вниз по потоку» (то есть на данный осциллятор оказывает воздействие только предыдущий осциллятор). Цепочка осцилляторов с однонаправленным взаимодействием может рассматриваться как модель активной среды в случае, когда связь между элементами среды определяется наличием потока, а диффузией можно пренебречь. Все осцилляторы исследуемой цепочки полагаются идентичными (однородная цепочка). Рассматривается фазовая синхронизация осцилляторов цепочки внешним гармоническим воздействием, подаваемым на первый элемент.

### 1. Исследуемая модель

Исследуемая модель представляет собой цепочку хаотических осцилляторов Ресслера в форме записи, обсуждаемой в работе [43],

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + C \sin \omega_{ex} t, \\
 \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + \alpha y_1, \\
 \dot{z}_1 &= \beta + z_1(x_1 - \mu), \\
 \dot{x}_j &= -\omega_j y_j - z_j + g(x_{j-1} - x_j), \\
 \dot{y}_j &= \omega_j x_j + \alpha y_j, \\
 \dot{z}_j &= \beta + z_j(x_j - \mu), \quad j = 2, 3, \dots, m,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $j$  – номер осциллятора цепочки (дискретная пространственная координата),  $m$  – длина цепочки. Граничные условия соответствуют свободным концам цепочки. Параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  определяют динамический режим, одинаковый для всех элементов цепочки. Выбранные нами значения  $\alpha=0.2$ ,  $\beta=0.2$ ,  $\mu=4.0$  соответствуют колебаниям парциальных осцилляторов в режиме спирального хаоса [44,45]. Параметры  $\omega_j$  управляют характерными частотами осцилляторов. Параметр  $g$  регулирует степень связи элементов. В отличие от случая, рассмотренного в [43], в данной работе связь является однонаправленной, частоты парциальных систем полагаются одинаковыми ( $\omega_j=\omega_1=0.924$ ,  $j=1,2,\dots,m$ ), а на первый осциллятор цепочки действует гармоническая вынуждающая сила с амплитудой  $C$  и частотой  $\omega_{ex}$ . Начальные состояния всех ячеек выбирались близкими к однородным, но со слабым случайным отклонением от однородности. Длина исследуемой цепочки  $m$  была ограничена пятьюдесятью осцилляторами, что обусловлено быстродействием используемых компьютеров.

Мгновенные амплитуды  $\rho_j$  и фазы  $\Phi_j$  хаотических колебаний вводились с помощью замены переменных

$$\begin{aligned}
 x_j &= \rho_j \cos \Phi_j, \\
 y_j &= \rho_j \sin \Phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Средние частоты парциальных осцилляторов рассчитывались как

$$\langle \omega_j \rangle = (1/T) \lim_{T \rightarrow \infty} |\Phi_j(t_0+T) - \Phi_j(t_0)|, \quad j=1,2\dots m. \quad (3)$$

Время  $T$  в численных экспериментах, разумеется, является ограниченным, но оно должно быть достаточно велико. В проведенных нами экспериментах время  $T$  выбиралось в пределах  $10^5 \div 2 \cdot 10^5$  безразмерных единиц, что соответствует приблизительно  $16 \cdot 10^3 \div 32 \cdot 10^3$  оборотам фазовой траектории вокруг седло-фокуса.

## 2. Область фазового захвата

В отсутствие внешнего сигнала средняя частота всех хаотических осцилляторов, вычисляемая по формуле (3), была одинакова и равна  $\omega_0 \approx 0.9981$ . Частота главного максимума в спектре мощности хаотических колебаний осцилляторов в пределах точности численного эксперимента совпадает со средней частотой  $\omega_0$ . Воздействуя на первый элемент цепочки гармоническим сигналом с частотой  $\omega_{ex}$ , близкой к  $\omega_0$ , и вводя связь между элементами, можно наблюдать явление вынужденной частотно-фазовой синхронизации цепочки хаотических осцилляторов. Захват фазы хаотических колебаний  $j$ -го осциллятора диагностировался на основе выполнения условия

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |\Phi_j(t) - \Phi_{ex}(t)| < \infty, \quad (4)$$

где  $\Phi_{ex} = \omega_{ex} t$  – фаза воздействия, а  $\Phi_j(t)$  определяется в соответствии с (2). Захват мгновенной фазы  $\Phi_j(t)$  одновременно сопровождается захватом средней частоты колебаний  $j$ -го осциллятора:  $\langle \omega_j \rangle = \omega_{ex}$ . Отношение частот определяет число вращения для каждого осциллятора цепочки

$$\Theta_j = \langle \omega_j \rangle / \omega_{ex}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

В численных экспериментах мы считали элемент цепочки с номером  $j$  синхронизованным, если для него выполнялось условие  $|\Theta_j - 1| \leq \epsilon$ , где погрешность  $\epsilon$  полагалась равной  $10^{-4}$ .

Рассмотрим, как происходит синхронизация элементов цепочки при вариации параметров  $\omega_{ex}, g$  и фиксированном значении амплитуды воздействия  $C=0.1$ . При данном значении  $C$  область синхронизации первого осциллятора в пределах указанной погрешности есть  $\omega_{ex} \in [0.9823; 1.0168]$ . Области синхронизации остальных осцилляторов определяются значением параметра связи  $g$ . Границы областей для разных  $j \geq 2$  располагаются так близко, что их невозможно достоверно различить в пределах точности численных экспериментов. Вид области синхронизации цепочки из 50-ти осцилляторов на плоскости управляющих параметров  $\omega_{ex}, g$  представлен на рис. 1. Сплошной линией обозначены границы глобальной синхронизации (то есть синхронизации всех элементов цепочки), штриховой линией отмечены границы синхронизации первого элемента. Вопрос о том, имеется ли область захвата при любом, сколь угодно малом, значении связи  $g$  или существует порог синхронизации [25], в настоящей работе специально не исследовался. Если такой порог существует, то при выбранных значениях параметров он неразличимо мал, поэтому на рис. 1 область синхронизации выглядит опирающейся своим острым концом на ось абсцисс. Зависимость числа вращения  $\Theta_j$  от параметра  $\omega_{ex}$  при фиксированном значении связи для осциллятора с любым номером  $j$  характеризуется наличием горизонтального участка (ступеньки), соответствующей значению  $\Theta_j=1$  (рис. 2). Рис. 3 иллюстрирует переход цепочки длиной  $m=50$  к режиму синхронизации. На рисунке представлены

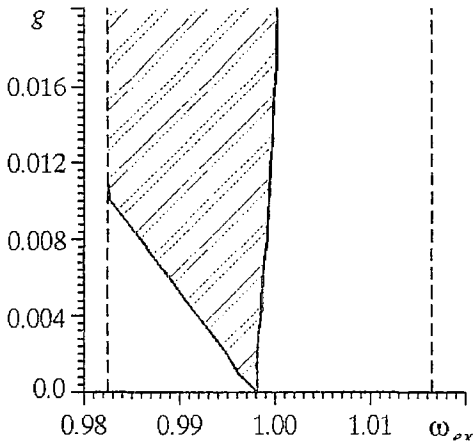


Рис. 1. Границы области синхронизации хаотических колебаний на плоскости управляющих параметров для осцилляторов цепочки с номерами  $j \geq 2$  (сплошная линия). Штриховой линией отмечены границы синхронизации первого элемента цепочки ( $j=1$ )

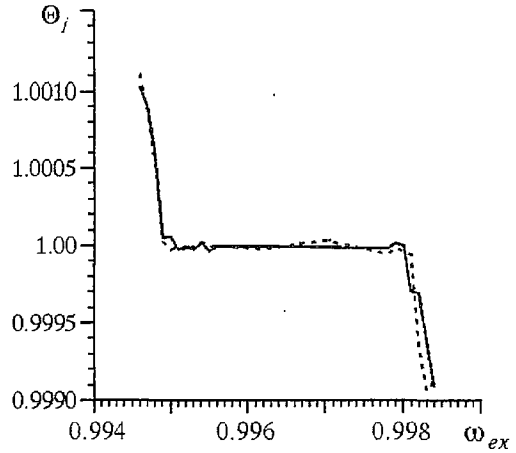


Рис. 2. Зависимость числа вращения  $\Theta_j$  от частоты воздействия  $\omega_{ex}$  для осцилляторов с номерами  $j=2$  (сплошная линия) и  $j=10$  (пунктир) при значении параметра связи  $g=0.002$

кривые зависимости числа вращения от номера осциллятора в цепочке, полученные при фиксированном значении частоты воздействия  $\omega_{ex}=0.992$  и различных значениях параметра связи  $g$ . Можно видеть, что синхронизация происходит практически одновременно для всех пятидесяти элементов цепочки.

Рассмотрим, как эффект синхронизации исследуемой цепочки зависит от

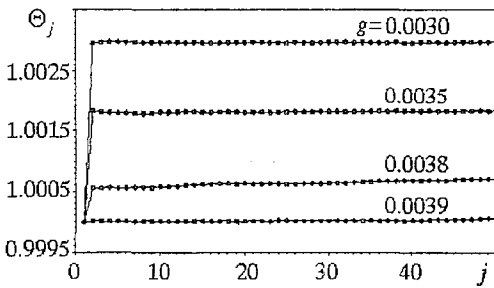


Рис. 3. Зависимости числа вращения от номера осциллятора в цепочке, полученные при  $\omega_{ex}=0.992$  для различных значений параметра связи  $g$

амплитуды вынуждающей силы  $C$ . При фиксированном значении частоты воздействия  $\omega_{ex}$ , отличном от значения  $\omega_0$ , глобальная синхронизация цепочки на частоте  $\omega_{ex}$  возможна, если только произошел захват частоты первого осциллятора. Соответствующее значение амплитуды  $C$  в силу однонаправленного характера связи не зависит от значения  $g$ . Синхронизация всех последующих осцилляторов (с номерами  $j \geq 2$ ) происходит, как уже отмечалось, практически одновременно при значении параметра связи  $g$ , которое слабо зависит от амплитуды  $C$ . На рис. 4 представлена область глобальной синхронизации цепочки на частоте вынуждающей силы  $\omega_{ex}=0.992$  при вариации параметров  $g$  и  $C$ .

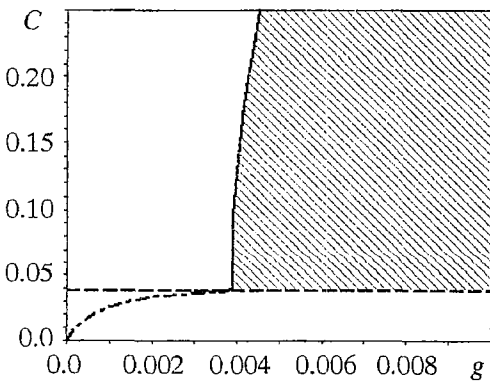


Рис. 4. Область глобальной синхронизации цепочки (отмечена штриховкой) на плоскости параметров  $g, C$  при частоте воздействия  $\omega_{ex}=0.992$ . Горизонтальная штриховая линия – граница синхронизации первого осциллятора на частоте  $\omega_{ex}$ ; сплошная линия – граница синхронизации всех последующих осцилляторов цепочки на частоте  $\omega_{ex}$ ; штрихпунктирная линия – граница синхронизации осцилляторов цепочки на частоте первого осциллятора  $\langle \omega_1 \rangle \neq \omega_{ex}$

Она ограничена двумя линиями: строго горизонтальной (штриховая) и почти вертикальной (сплошная). Горизонтальная линия соответствует синхронизации первого осциллятора, а почти вертикальная – синхронизации всех последующих осцилляторов цепочки на частоте  $\omega_{ex}$ . Штрихпунктирной линией на рисунке отмечена граница синхронизации всех осцилляторов цепочки на частоте первого осциллятора  $\langle \omega_1 \rangle$ , которая при  $C \neq 0$  уже не совпадает с  $\omega_0$ , но еще не захвачена частотой воздействия.

### 3. Характеристики динамического режима цепочки в области фазового захвата

В рассматриваемой цепочке без внешнего воздействия (случай  $C=0$ ) реализуется грубый пространственно однородный хаотический во времени режим колебаний, для которого  $x_j(t)=x_k(t)$ ,  $y_j(t)=y_k(t)$ ,  $z_j(t)=z_k(t)$ ,  $j,k=1,2,\dots,m$ . Воздействие на первый осциллятор цепочки приводит к возникновению неоднородности. Если  $\omega_{ex} \neq \omega_0$  и параметр связи  $g$  мал, то средняя частота первого осциллятора отличается от частот последующих осцилляторов. В области фазового захвата средние частоты всех осцилляторов цепочки равны частоте воздействия, а мгновенные фазы захвачены, то есть выполнено условие (4). Однако, полной синхронизации хаоса, означающей возникновение грубого пространственно однородного хаотического режима, не наблюдается. На рис. 5 приведены  $(x_1, x_j)$ -проекции синхронных и несинхронных колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты  $j$ . Группы рисунков (а) и (б) соответствуют режиму глобальной фазовой синхронизации цепочки на частоте воздействия  $\omega_{ex}=0.992$ . Можно отметить, что средний по времени фазовый сдвиг  $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$  между синхронными хаотическими колебаниями первого и  $j$ -го осцилляторов цепочки конечен, но при этом различен для различных  $j$ . Так, проекции для  $j=9,11,13$ , объединенные в группу (а), отражают наличие среднего фазового сдвига, близкого к  $\pm 2\pi k$ ,  $\pi/2 \pm 2\pi k$ ,  $\pi \pm 2\pi k$ ,  $k=0,1,2,3,\dots$ , соответственно. Вид проекций для  $j=42,44,47$ , приведенных в группе (б), качественно повторяет вид проекций группы (а). Такое поведение объясняется наличием монотонного роста или уменьшения (в зависимости от значения  $\omega_{ex}$ ) среднего фазового сдвига  $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$  вдоль цепочки. Проекции несинхронных колебаний, полученные при  $\omega_{ex}=1.025$ , представлены в группе (в). Они заметно отличаются от проекций синхронных колебаний.

На рис. 6 представлены зависимости  $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$  от  $j$ , полученные для различных значений частоты  $\omega_{ex}$  и параметра связи  $g$ . Можно видеть (рис. 6, а, б), что начиная со второй ячейки, средний фазовый сдвиг с ростом  $j$  изменяется практически линейно. Это свидетельствует о том, что вдоль цепочки распространяется бегущая волна, длина которой может быть определена как

$$\Lambda = 2\pi(j-1) / \langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle. \quad (6)$$

С ростом  $g$  фазовый сдвиг вдоль пространственной координаты  $j$  изменяется медленнее, соответственно длина волны возрастает. Таким образом, длиной волны  $\Lambda$  можно управлять, меняя коэффициент связи  $g$  и частоту воздействия  $\omega_{ex}$ . Для любого фиксированного  $g$  можно подобрать значение частоты воздействия (оно будет близко к  $\omega_0$ ) так, что средний фазовый сдвиг  $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$  будет практически одинаковым для всех осцилляторов цепочки, начиная со второго (рис. 6, в). Однако хаотические колебания цепочки и в этом случае не будут полностью пространственно однородными, так как  $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle \neq 0$ . Соответствующие проекции колебаний на плоскость  $x_1, x_j$  для нескольких различных значений пространственной координаты  $j$  представлены на рис 7.

Режим хаотической динамики элементов цепочки диагностировался как по виду фазовых проекций, так и с помощью ляпуновских характеристических

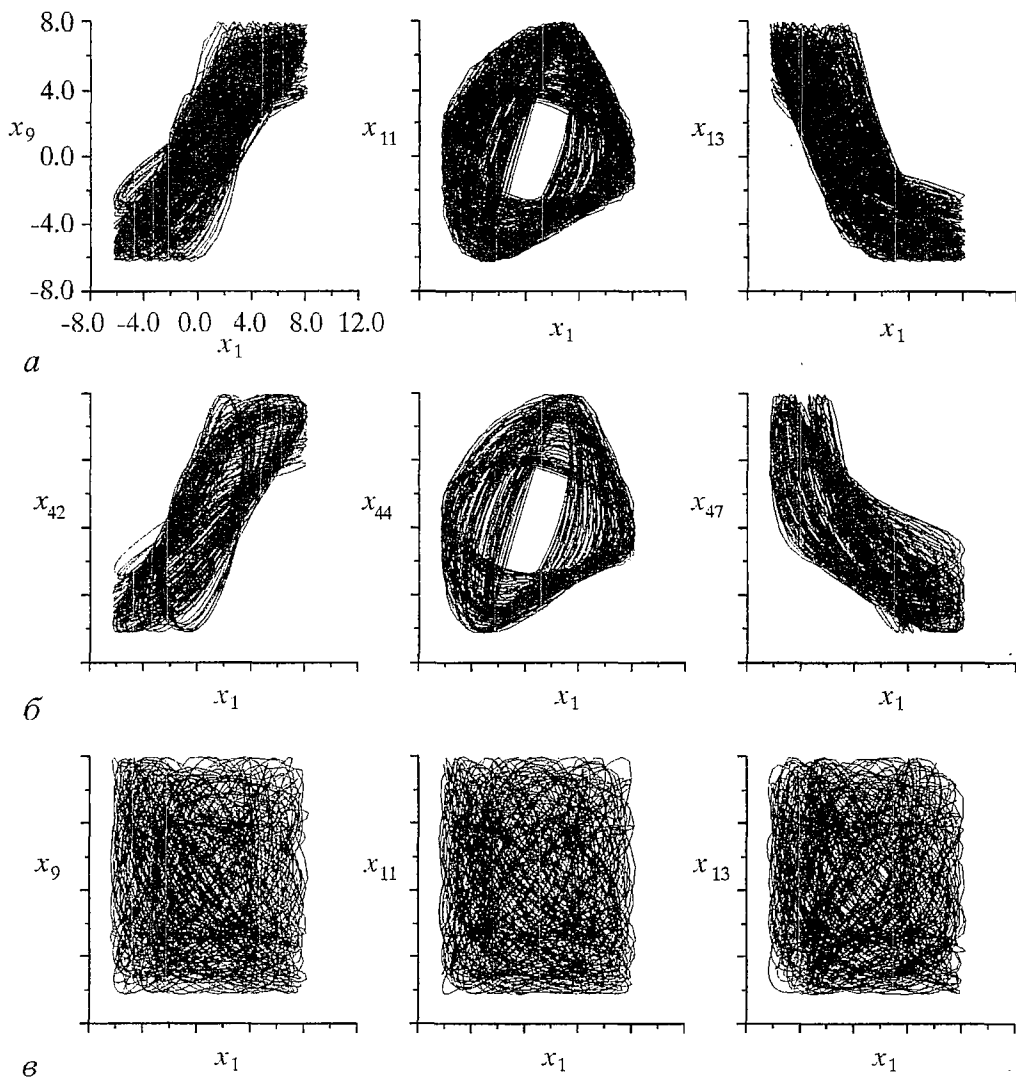


Рис. 5. Проекция синхронных (группы (а) и (б)) и несинхронных (группа (в)) колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты  $j$ , полученные при  $C=0.1$ ,  $g=0.006$

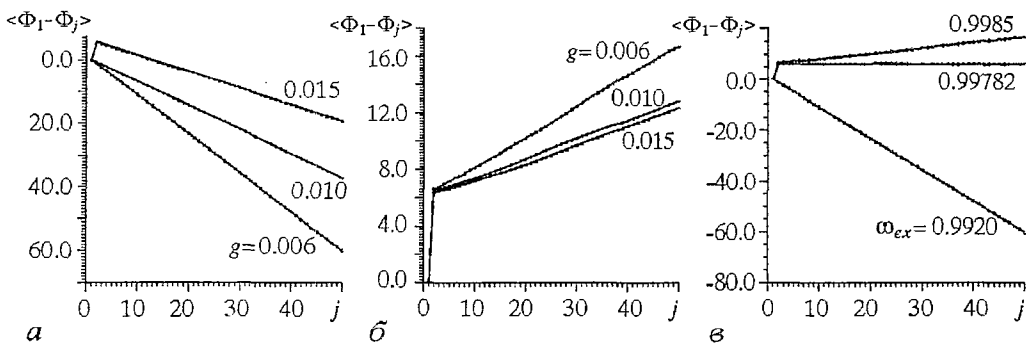


Рис. 6. Зависимости средней разности фаз  $\langle \Phi_1(t) - \Phi_j(t) \rangle$  от  $j$  при различных значениях параметра связи  $g$  и фиксированной частоте воздействия  $\omega_{ex}$ : а - 0.992; б - 0.9985; в - при фиксированном значении  $g=0.006$  и различных  $\omega_{ex}$

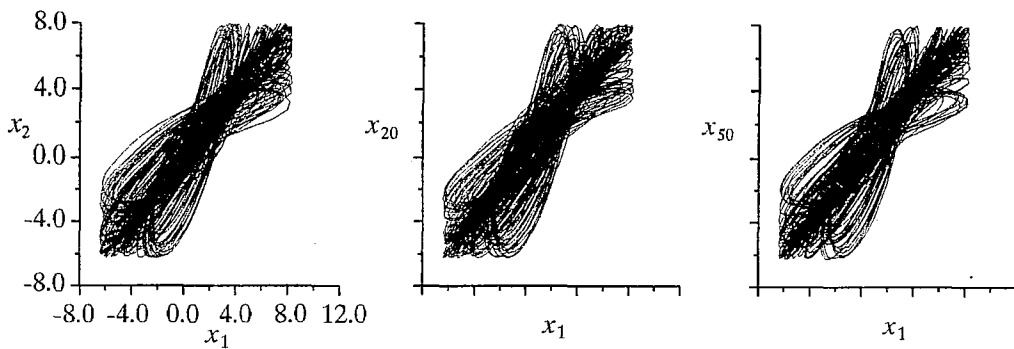


Рис. 7. Проекции колебаний для нескольких различных значений пространственной координаты  $j$ , полученные при  $C=0.1$ ,  $g=0.006$ ,  $\omega_{ex}=0.99782$

показателей. В случае однонаправленной связи элементов цепочки, каждый последующий элемент можно рассматривать отдельно как неавтономный осциллятор, находящийся под воздействием сложного сигнала. Таким образом, совокупный спектр ляпуновских характеристических показателей (спектр ЛХП) разбивается на парциальные спектры показателей, вносимых отдельными элементами цепочки. Наличие положительного показателя в спектре первого осциллятора уже обеспечивает хаотическое поведение всех последующих осцилляторов. Они, в свою очередь, могут добавлять в совокупный спектр ЛХП свои положительные показатели (режим гиперхаоса), а могут и не добавлять (в случае полной или обобщенной синхронизации [20,21,26]). При выбранных значениях параметров в исследуемой цепочке наблюдается режим гиперхаоса как в случае частотно-фазовой синхронизации всех элементов, так и вне области синхронизации. Каждый элемент цепочки добавляет свой положительный характеристический показатель в совокупный спектр ЛХП. В области синхронизации всех элементов цепочки в совокупном спектре ЛХП кроме  $m$  положительных показателей имеется  $2m$  отрицательных и только один нулевой показатель, связанный с периодическим сигналом воздействия.

### Выводы

Проведенные численные эксперименты выявили эффект вынужденной частотно-фазовой синхронизации цепочки хаотических осцилляторов с однонаправленной диффузионной связью. Показана возможность управления частотными характеристиками динамического режима цепочки с помощью локального периодического воздействия. Установлено существование области глобального фазового захвата цепочки произвольной длины на плоскости управляющих параметров «частота воздействия – коэффициент связи». Можно отметить, что аналогичные результаты были получены авторами также для цепочки периодических осцилляторов Ван дер Поля и цепочки отображений окружности (в обоих случаях связь элементов была также однонаправленной). Предварительные расчеты показывают, что включение влияния последующих элементов цепочки на предыдущие может значительно затруднить наблюдение эффекта фазового захвата для достаточно длинных цепочек. Однако этот случай нуждается в дальнейшем специальном исследовании.

*Данная работа частично поддержана грантом Фонда гражданских исследований и развития США (CRDF) и Министерства образования РФ, а также ONR № REC-006 (Contract № N68171-00-M-5430) и РФФИ (№ 00-02-17512).*

## Библиографический список

1. *Garopov–Grekhov A.V., Rabinovich M.I.* Dynamic chaos in ensembles of structures and spatial development of turbulence in unbounded systems/ Ed. W.Ebeling. N.Y.: Springer, 1986.
2. *Kaneko K.* Spatiotemporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // *Physica D.* 1989. Vol. 32. P. 60.
3. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 10–12. С. 1079.
4. *Winful H.G., Rahman L.* Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers// *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65, № 13. P. 1575.
5. *Braiman Y., Linder J.F., Ditto W.L.* Taming spatiotemporal chaos with disorder // *Nature.* 1995. Vol. 378. P. 465.
6. *Braiman Y., Ditto W.L., Wiesenfeld K., Spano M.L.* Disorder-enhanced synchronization // *Phys. Lett A.* 1995. Vol. 206. P. 54.
7. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
8. *Малафеев В.М., Полякова М.С., Романовский Ю.М.* О процессе синхронизации в цепочке автогенераторов, связанных через проводимость // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1970. Т. 13, вып.6. С. 936.
9. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР.* 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
10. *Belykh V.N., Verichev N.N., Kocarev L.J., Chua L.O.* On chaotic synchronization in a linear array of Cua's circuits // *J. of Circuits, Systems, and Computers.* 1993. Vol. 3, № 2. P. 579.
11. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
12. *Murray J.D.* Mathematical biology. Heidelberg: Springer, 1989.
13. *Modelling the dynamics of biological systems / Eds E.Mosekilde and O.G. Mouritsen.* Berlin: Springer, 1995.
14. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Сильверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суэцк М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *УФН.* 1996. Т. 166, № 4. С. 365.
15. *Van der Pol B.* Theory of the amplitude of free and forced triode vibration // *Radio Rev.* 1920. Vol. 1. P. 701.
16. *Андронов А.А., Витт А.А.* К теории захватывания Ван дер Поля // *Собр. тр. А.А.Андропова.* М.: Изд-во АН СССР, 1956.
17. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
18. *Fujisaka H., Yamada Y.* Stability theory of synchronized motions in coupled oscillators systems // *Progr. Theor. Phys.* 1983. Vol. 69. P. 32.
19. *Pikovsky A.S.* On the interaction of strange attractors // *Z. Phys. B.* 1984. Vol. 55. P. 149.
20. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ.* 1988. Т. 14, вып.6. С. 569.
21. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах// *Изв. вузов. Радиофизика.* 1986. Т. 29, № 9. С. 1050.
22. *Pecora L. and Carroll T.* Synchronization of chaotic systems// *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 64. P. 821.
23. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos// *Int. J. of Bif. and Chaos.* 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
24. *Rosenblum M., Pikovsky A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
25. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving// *Physica D.* 1997. Vol. 104. P. 219.



26. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in unidirectionally coupled chaotic system // *Phys.Rev.E.* 1995. Vol. 51. P. 980.
27. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49. P. 3484.
28. *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский–Гайер Л.* Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // *УФН.* 1999. Т. 169, № 1. С. 7.
29. *Vadivasova T.E., Balanov A.G., Sosnovtseva O.V., Postnov D.E., Mosekilde E.* Synchronization in driven chaotic systems: diagnostics and bifurcations // *Phys. Lett. A.* 1999. Vol. 253. P. 66.
30. *Aizawa Y.* Synergetic approach to the phenomena of mode-locking in nonlinear systems // *Progr. Theor. Phys.* 1976. Vol. 56, № 3. P. 703.
31. *Ermentrout G.B., Kopell N.* Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators // *SIAM J. Math. Anal.* 1984. Vol. 15. P. 215.
32. The presence of native frequency distribution and external noises // *Physica D.* 1984. Vol. 11. P. 212.
33. *Ermentrout G.B., Troy W.C.* Phaselocking in a reaction-diffusion system with a linear frequency gradient // *SIAM J. Appl. Math.* 1986. Vol. 39. P. 623.
34. *Matthews P.C., Mirollo R.E., Strogatz S.H.* Dynamics of a large system of coupled nonlinear oscillators // *Physica D.* 1991. Vol. 51. P. 293.
35. *Osipov G.V., Sushchik M.M.* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58, № 6. P. 7198.
36. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // *Письма в ЖТФ.* 1983. Т. 9, вып.2. С. 94.
37. *Kaneko K.* Clustering, coding, switching, hierarchical ordering and control in a network of chaotic elements // *Physica D.* 1990. Vol. 41. P. 137.
38. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И.* Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фрейгенбаумовских системах // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1991. Т. 34, № 1. С. 35.
39. *Belykh V.N., Mosekilde E.* One-dimensional map lattice: Synchronization, bifurcations, and chaotic structures // *Phys. Rev. E.* 1996. Vol. 54, № 4. P. 3196.
40. *Pecora L.M.* Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems // *Phys. Rev.E.* 1998. Vol. 58, № 1. P. 347.
41. *Kocarev L., Paralitz U.* Synchronizing spatiotemporal chaos in coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77, № 11. P. 2206.
42. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators // *Europhys. Lett.* 1996. Vol. 34, № 3. P. 16.
43. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55. P. 2353.
44. *Arneodo A., Collet P., Tresser C.* Possible new strange attractors with spiral structure // *Commun. Math. Phys.* 1981. Vol. 79. P. 573.
45. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
после доработки

18.05.2000  
21.08.2000

## EXTERNAL PHASE SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC OSCILLATORS CHAIN

*A.I. Fomin, T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva, V.S. Anishchenko*

External synchronization of a chain of chaotic Rössler' oscillators with unidirectional coupling is studied numerically. Synchronizing harmonic signal is applied to the first oscillator of chain. The region of synchronization is obtained on the plane of pa-

rameters «external frequency – coupling». Peculiarities of dynamical regimes of the chain in this region are analyzed.



*Фомин Антон Игоревич* – родился в 1976 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1998). Работает инженером–программистом на ЗАО «САЗ». Учится в заочной аспирантуре кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – динамика ансамблей нелинейных осцилляторов, распределенных сред и их дискретных аналогов; эффекты синхронизации ансамблей периодических и хаотических осцилляторов.



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), доцент, кандидат физико–математических наук. В настоящее время – докторант кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы сосредоточены в области нелинейной динамики: эффекты синхронизации в ансамблях хаотических осцилляторов, явление фазовой мультистабильности взаимодействующих хаотических систем, свойства различных типов нерегулярных аттракторов, статистические характеристики динамического хаоса, роль флуктуаций в нелинейных системах и др. Автор более 40 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



*Сосновцева Ольга Владимировна* – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Защитила кандидатскую диссертацию (1996). Неоднократно работала за рубежом: в Германии, Дании и Южной Корее. В настоящее время является докторантом кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Научные интересы – явления самоорганизации в ансамблях нелинейных хаотических и стохастических систем; особенности синхронизации хаотической динамики и стохастических процессов. Имеет около 30 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



*Анищенко Вадим Семенович* – родился в 1943 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1966), защитил диссертацию на звание кандидата физико–математических наук (1970) и доктора физико–математических наук (1986). С 1988 года заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики СГУ. С 1979 и по настоящее время работает в области исследования нелинейной динамики и стохастических процессов в нелинейных системах. Является автором более 300 научных работ, среди которых 7 монографий на русском и английском языках и 4 учебника. Неоднократно читал лекции в ведущих вузах Германии в качестве приглашенного профессора. Член–корреспондент РАЕН, Заслуженный деятель науки РФ (1995), Соросовский профессор, Лауреат премии Фонда Александра Гумбольдта (1999).

E–mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru