



## МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СДВИГА В СИЛЬНО СЖАТОМ КРИСТАЛЛЕ

*Е.В. Розенфельд*

Предложена простая механическая модель, в которой две сдвиговые волны, распространяющиеся в идеальном безграничном кристалле в одном направлении, при столкновении (обгоне) в результате взаимодействия между собой могут вместе отражаться назад.

### Введение

На рубеже пятидесятих–шестидесятих годов была обнаружена весьма необычная особенность сдвиговых колебаний, распространяющихся в сильно деформированных кристаллах [1,2]. Эксперименты проводились на сильно сжатых толстых пластинах, к поверхности которых прикладывалась периодически изменяющаяся внешняя сила с постоянной амплитудой, возбуждающая сдвиговые колебания. Оказалось, что амплитуда этих вынужденных колебаний на поверхности резко возрастает при некоторых частотах, то есть возникают какие-то резонансы. Специально проведенные дополнительные эксперименты показали, что наблюдаемые резонансы имеют следующие принципиальные особенности:

- резонансы эти возникают только в моно- или поликристаллических, но не в аморфных твердых телах;
- резонансные частоты лежат в звуковой области (единицы килогерц) и никак не связаны с размерами системы, то есть резонансы эти не являются следствием интерференции волн, отраженных от межфазных границ в системе;
- для возникновения такого типа резонансов направление осциллирующей внешней силы должно быть касательным к поверхности кристалла (сдвиговые осциллирующие напряжения);
- одновременно по нормали к этой поверхности должно быть приложено постоянное сжимающее внешнее напряжение, величина которого близка к пределу упругости.

Иными словами, в работах [1,2] и последовавших за ними было показано, что существует целый набор частот с характерной величиной порядка 1 кГц, при которых в системе плотно сжатых атомных плоскостей (и только при наличии кристаллической структуры и сильного сжатия!) возникновение сдвиговых деформаций значительно облегчается.

Проведенные в то время попытки связать обнаруженное явление с какими-то собственными частотами кристалла (библиографию можно найти в [3]) к

успеху не привели – характерные фононные частоты и частоты колебаний дислокаций на много порядков выше. Единственное объяснение этого явления, давшее правильный порядок величины резонансных частот, предложил Фицджеральд [3]. Он построил весьма необычную теорию, связывающую открытый им эффект с дифракцией на кристаллической решетке волн Л. де Бройля, возникающих при колебаниях атомов. Дальнейшего развития его исследования, однако, не получили, и вскоре интерес к этому вопросу был утрачен. Насколько нам известно<sup>1</sup>, в последнее время новые экспериментальные исследования на эту тему (давшие примерно такие же результаты) проводились только в группе В.А. Бархатова.

Возникновение открытого Фицджеральдом резонанса можно было бы очень просто объяснить, если бы в однородном полубесконечном кристалле существовал механизм, заставляющий идущую от поверхности сдвиговую волну частично отражаться и возвращаться назад к поверхности<sup>2</sup>. Далее все происходило бы в точности так же, как при отражении волны от какого-то препятствия. Резонанс возникал бы при совпадении на поверхности фаз колебаний отраженных волн с фазой колебаний вынуждающей силы. Однако, насколько нам известно, не существует ни одной теории, в которой возникали бы подобного рода отражения волн в однородной среде. Нашей задачей является доказательство принципиальной возможности существования такого типа отражений.

С этой целью ниже рассматривается распространение по кристаллу не обычных периодических во времени и пространстве волн, а простейших предельно локализованных сдвиговых возбуждений. Условия, при которых такие возбуждения могут существовать, и некоторые их особенности рассмотрены в первом разделе работы. Во втором разделе проведено исследование парных столкновений таких возбуждений, результаты которого обсуждаются в третьем разделе.

Подчеркнем, что в работе всего лишь построена очень простая и весьма специфическая нелинейная механическая модель, в которой указанного типа отражения оказываются возможными. Этот результат, естественно, не является объяснением открытого Фицджеральдом резонанса, и возможность его использования для такого объяснения отнюдь не очевидна. Тем не менее, модель настолько проста, а поведение ее настолько необычно, что полученные результаты, нам кажется, могут представлять и самостоятельный интерес.

## 1. Модель

Рассмотрим произвольную атомную плоскость, движущуюся в кристалле как целое около своего положения равновесия. Если вектор ее сдвига  $\delta\mathbf{r}$  параллелен самой этой плоскости, то потенциал  $V$ , в котором она движется, оказывается периодической функцией лишь двух переменных:  $V(\delta\mathbf{r} + k\mathbf{a} + n\mathbf{b}) = V(\delta\mathbf{r})$ . Здесь  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – векторы решетки в рассматриваемой плоскости, а  $k$  и  $n$  – произвольные целые числа. Ограничившись сдвигами только в одном каком-то определенном направлении, скажем, параллельном оси  $y$ , и обозначив период решетки в этом направлении через  $b$ , можно записать просто  $V(y) = V(y + nb)$ .

Такой одномерный случай впервые исследовался Френкелем и Конторовой [4]. Кроме периодического потенциала  $V(y) \sim \sin^2(\pi y/b)$  (потенциал ФК), в котором движется каждый из составляющих плоскость атомов, Френкель и Конторова рассматривали еще и взаимодействие между атомами внутри плоскости. Это позволило им исследовать возникновение статических отклонений от периодичности – сгущений и разрежений атомов внутри плоскости. Мы намерены рассмотреть другую, более простую задачу – исследовать динамику атомной

<sup>1</sup> Сообщение В.А. Бархатова в частной беседе.

<sup>2</sup> Существенно, что механизм этот должен действовать только при наличии сильного сжатия.

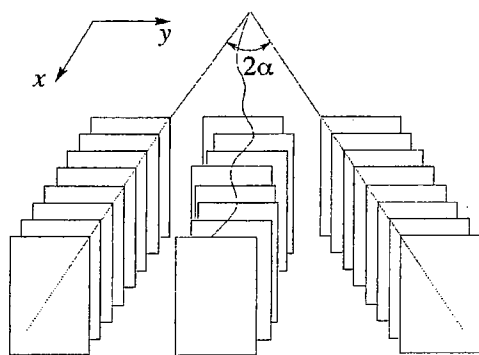
плоскости, движущейся как целое, без возникновения в ней отклонений от периодичности. Решение этой задачи для потенциала ФК хорошо известно, но физике процесса, который мы намерены рассматривать, больше соответствует иная зависимость  $V(y)$ .

По-видимому, первое, что должно отличать систему сильно сжатых атомных плоскостей от обычного кристалла – это резко нелинейная зависимость возвращающей силы от величины сдвига. Учитывая характерные особенности потенциала межатомного взаимодействия, естественно полагать, что хотя малые сдвиги могут происходить относительно легко, при увеличении амплитуды сдвига сопротивление должно резко возрастать<sup>3</sup>. Это означает, что возле каждого своего положения равновесия плоскость оказывается в потенциальной яме с относительно пологим дном, но значительно более крутыми, чем в потенциале ФК, стенками.

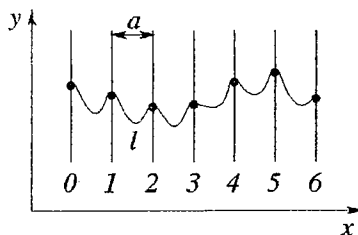
Предельно упрощая эту ситуацию, рассмотрим случай прямоугольной потенциальной ямы. Это соответствует выбору для потенциала взаимодействия между атомами приближения твердых шаров. Если межатомные расстояния в плоскости достаточно велики, такая плоскость может свободно двигаться между положениями, в которых ее атомы соприкасаются с атомами из соседних плоскостей. Естественно, в этом случае нет никакой необходимости учитывать периодичность  $V(y)$  – смещение любой плоскости относительно соседней не может превышать половины межатомного расстояния в направлении  $y$ . В дальнейшем это максимальное относительное смещение соседних плоскостей обозначим через  $h$ .

Таким образом, мы рассматриваем сильно сжатый кристалл как «гармошку» в определенных пределах свободно скользящих друг относительно друга плоскостей. Возможные конфигурации такой «гармошки» изображены на рис. 1, а. Все состояния, в которых сдвиги соседних плоскостей не превышают  $h$ , обладают одинаковой энергией, и плоскости могут располагаться любым образом между двумя крайними положениями, характеризующимися углом сдвига  $\alpha = \arctg(h/a)$ .

Естественно, в этом случае нет никакой необходимости учитывать явно кристаллическую атомную структуру, и каждая плоскость может рассматриваться как одно тело и характеризоваться единственной координатой. В результате мы приходим к следующей простейшей модели. Рассмотрим систему параллельных эквидистантных проволок (канцелярские счеты), на каждой из которых надета единственная бусинка. Все бусинки одинаковы, имеют массу  $m$  и движутся по проволокам без трения. Каждая пара соседних бусинок связана невесомой нерастяжимой нитью длиной  $l > a$  (рис. 1, б). Тогда проекция соединяющего соседние бусинки вектора на направление проволок (ось  $y$ ) по



а



б

Рис. 1. а – «гармошка» расположенных на расстояниях  $a$  друг от друга в направлении оси  $x$  атомных плоскостей; соседние плоскости не могут смещаться друг по отношению к другу более, чем на  $h$  в направлении оси  $y$ ,  $\alpha = \arctg(h/a)$ . б – моделирующие атомные плоскости одинаковые бусинки на эквидистантных проволоках связаны одинаковыми нерастяжимыми нитями длиной  $l$

<sup>3</sup> Фактически мы предполагаем здесь, что упаковка атомов в решетке достаточно плотная и каждый атом рассматриваемой плоскости «втискивается» сжимающей силой в промежутки между атомами соседних плоскостей.

модулю не превышает  $h=(l^2-a^2)^{1/2}$ . Если проволоки имеют номера  $n=0,1,2,\dots$ , как на рис. 1, б, то координаты бусинок связаны условиями

$$x_n = na, \quad |y_n - y_{n\pm 1}| < h. \quad (1)$$

Представим себе теперь, что мы толкнули бусинку с номером  $n=0$  и она приобрела скорость  $v$ , направленную, скажем, вверх ( $v>0$ ). Поскольку трение отсутствует, эта бусинка будет двигаться с постоянной скоростью до тех пор, пока нить, соединяющая ее с бусинкой с номером  $n=1$ , не натянется. Так как массы всех бусинок одинаковы, а  $y$ -компонента импульса в такой системе сохраняется, бусинки при натяжении соединяющей их нити обмениваются импульсами. Следовательно, спустя время  $\tau_{0,1}=(y_1+h-y_0)/v$  бусинка с  $n=0$  остановится, а с  $n=1$  начнет двигаться со скоростью  $v$ . Далее, в момент  $\tau_{1,2}=\tau_{0,1}+(y_2+h-y_1)/v=(y_2+2h-y_0)/v$  первая бусинка остановится, а начнет двигаться вторая и т.д. Это означает, что по системе идет сдвиговая волна, после прохождения которой координаты бусинок оказываются

$$y'_k = y_{k+1} + h \operatorname{sign} v. \quad (2)$$

Возможность использования здесь термина «волна» требует специального обсуждения. В обычной линейной цепочке бусинки связаны пружинками, и после толчка одной бусинки полученный ей импульс начинает постепенно распределяться между все возрастающим числом соседних бусинок, что приводит к возникновению обычной волны. В предлагаемой модели импульс не «расплывается», а передается соседней бусинке целиком, так что в любой момент движется лишь одна-единственная бусинка, на которой и локализовано рассматриваемое сдвиговое возбуждение. Поскольку все бусинки, через которые это возбуждение прошло, поднимаются или опускаются в соответствии с (2), продвижение этого возбуждения совершенно аналогично распространению приливной волны. Везде в дальнейшем термин «волна» используется именно в этом смысле – «приливная волна».

Поскольку столкновения (натяжения нитей) между  $k$ -й и  $(k-1)$ -й бусинками будут происходить в моменты

$$\tau_{k-1,k} = (y_k + kh - y_0)/v, \quad (3)$$

средняя скорость распространения волны на участке между бусинками с  $n=0$  и  $n=k$  равна

$$V_k = ka/\tau_{k-1,k} = [va/h]/[1 + (y_k - y_0)/(kh)]. \quad (4)$$

Отсюда ясно видно, что скорость распространения волны очень сильно зависит от начальных координат бусинок. В частности, если в начальный момент все они находятся на одном уровне, то скорость волны  $V=(a/h)v$ . Если же в начальный момент  $y_{k+1}=y_k+h$ , как в крайне правой части рис. 1, а, то скорость распространения волны сдвигов «вверх» становится вдвое меньше, так как каждая бусинка теперь должна пройти до столкновения путь не  $h$ , а  $2h$ . Скорость же волны сдвигов «вниз» в этом случае стремится к бесконечности.

Совершенно ясно, что до тех пор пока все бусинки, кроме одной, покоятся, волна в такой системе, начав распространяться в одном каком-то направлении, сама изменить это направление не может. Ситуация, однако, становится не столь тривиальной, если во взаимодействии вступают две соседние бусинки, одновременно движущиеся с разными скоростями. Это произойдет, если вслед за первой волной мы запустим вторую, распространяющуюся с большей скоростью, или если две волны мы запустим навстречу друг другу. В следующем разделе рассмотрены различные варианты исхода таких «парных столкновений» волн.

## 2. Парные столкновения волн

Ясно, что в случае волн, идущих навстречу друг другу, они встретятся при любых направлениях и величинах скоростей бусинок. Однако догонит ли выпешдшую раньше волну 1 следующая за ней волна 2, зависит от конфигурации системы и скоростей бусинок в волнах  $v_1$  и  $v_2$ , соответственно. Если направления этих скоростей совпадают, то есть  $v_1 v_2 > 0$ , то, чтобы вторая волна догнала первую, необходимо и достаточно выполнение условия  $|v_1| < |v_2|$ . Если же направления скоростей бусинок противоположны,  $v_1 v_2 < 0$ , то при любых соотношениях их модулей волна 2 может догнать, а может и не догнать волну 1 – все зависит от исходной конфигурации системы.

В дальнейшем всегда полагаем, что все необходимые для столкновения волн условия выполнены. Четыре различных типа парных столкновений волн мы рассмотрим по отдельности. При этом будем использовать следующие предположения и обозначения:

- волны всегда взаимодействуют на проволоках с номерами  $k$  и  $k+1$ ;
- волна 1 всегда приходит на  $(k+1)$ -ю проволоку раньше, чем волна 2 на  $k$ -ю.

Промежуток времени  $\delta t < 2h/|v_1|$  между этими моментами определяет «начальную фазу» столкновения волн;

- волна 2 всегда распространяется в положительном направлении оси  $x$ , а бусинки в ней всегда движутся вверх,  $v_2 > 0$ ;

- момент передачи  $k$ -й бусинке импульса  $mv_2$  от  $(k-1)$ -й считается моментом начала отсчета времени  $t=0$ . Ордината  $k$ -й бусинки в этот момент считается началом отсчета по оси  $y$ :  $y_k(t=0) \equiv 0$ . С учетом предыдущего предположения отсюда также следует  $y_{k-1}(t=0) \equiv h$ ;

- во всех четырех случаях моменты отражения и прохождения волн обозначены одинаково –  $\tau_r$  и  $\tau_p$ , соответственно.

По-видимому, имеет смысл отметить здесь также, что результат тройного или более сложного столкновения не может быть в этой модели сведен к последовательности независимых парных столкновений.

**2.1. Лобовое столкновение волн,  $v_1 v_2 > 0$ .** В момент начала столкновения координаты и скорости бусинок связаны следующими соотношениями (рис. 2):

$$y_{k+1}(0) = y_{k+2}(0) - h + v_1 \delta t < h. \quad (5)$$

Если скорости  $v_1$  и  $v_2$  не слишком сильно отличаются друг от друга,  $k$ -я и  $(k+1)$ -я бусинки вместе движутся вверх, и расстояние между ними растет медленно. В результате еще до того, как соединяющая их нить натянется и они обменяются импульсами, они передадут свои импульсы обратно  $(k-1)$ -й и  $(k+2)$ -й бусинкам, от которых их и получили. Это означает, что обе волны отразятся от места столкновения обратно в моменты, соответственно,

$$\tau_r^{(1)} = 2h/v_1 - \delta t, \quad \tau_r^{(2)} = 2h/v_2. \quad (6)$$

Если же скорости  $v_1$  и  $v_2$  отличаются достаточно сильно, обмен импульсами между  $k$ -й и  $(k+1)$ -й бусинками в момент

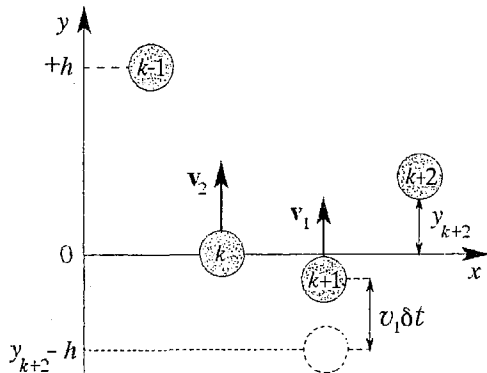


Рис. 2. Начальные положения и скорости бусинок при лобовом столкновении,  $v_1 v_2 > 0$

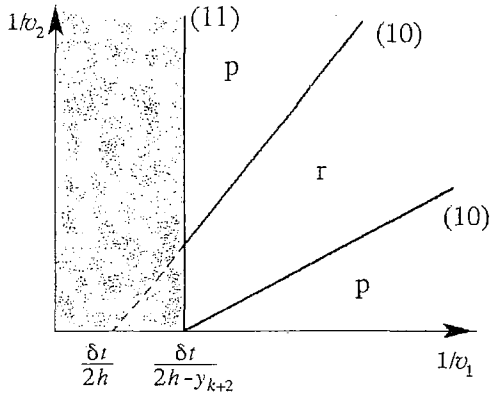


Рис. 3. Диаграмма, поясняющая зависимость исхода столкновения встречных волн от скоростей бусинок  $v_1$  и  $v_2$  в них при  $v_1 v_2 > 0$ . В областях, где выполняются оба неравенства, (10) и (11), происходит отражение (r) обеих волн. В областях, где (11) выполнено, а (10) – нет, волны проходят (p) друг сквозь друга. В скобках около линий, разделяющих различные области диаграммы, приведены номера соответствующих этим линиям формул

моменты

$$\tau_{(1)p} = 2h/v_1 + (1 - v_2/v_1)\tau_{ch}, \quad \tau_{(2)p} = 2h/v_2 + (1 - v_1/v_2)\tau_{ch} - v_1 \delta t / v_2. \quad (9)$$

Таким образом, столкновение встречных волн с одинаковыми направлениями скоростей бусинок имеет два возможных исхода. Если промежуток времени  $\tau_{ch}$  (7) превышает хотя бы один из промежутков (6), то есть если выполнено условие

$$[1 - y_{k+2}(0)/(2h)]/v_1 - \delta t/(2h) < 1/v_2 < [2h/y_{k+2}(0)][1/v_1 - \delta t/(2h)], \quad (10)$$

то обе волны отражаются от места столкновения в моменты (6). Если это условие не выполнено, волны проходят друг сквозь друга и в моменты (9) покидают место столкновения. Поясняющая эти выводы диаграмма приведена на рис. 3. Отметим, что из последнего неравенства в (5) следует ограничение

$$1/v_1 > \delta t/[2h - y_{k+2}(0)]. \quad (11)$$

Только при этом условии столкновение волн происходит именно на  $k$ -й и  $(k+1)$ -й проволоках.

**2.2. Лобовое столкновение волн,  $v_1 v_2 < 0$ .** Начальные условия столкновения определяются неравенствами

$$y_{k+1}(0) = y_{k+2}(0) + h - |v_1| \delta t, \quad |v_1| \delta t - 2h < y_{k+2}(0) < 0 \quad (12)$$

(рис. 4). Последнее условие гарантирует, что волна 1 не успеет перейти с  $(k+1)$ -й на  $k$ -ю проволоку до прихода туда волны 2. Ясно, что в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем пункте, здесь волны не могут покинуть место столкновения до того, как  $k$ -я и  $(k+1)$ -я бусинки обменяются импульсами в момент

$$\tau_{ch} = [2h + y_{k+2}(0) - |v_1| \delta t] / (v_2 + |v_1|). \quad (13)$$

Теперь  $k$ -я бусинка движется вниз со скоростью  $v_1$ , а  $(k+1)$ -я – вверх со скоростью  $v_2$ . Если бы им ничто не препятствовало, то спустя время  $T$  (8)

$$\tau_{ch} = [y_{k+2}(0) + v_1 \delta t - 2h \Theta(v_1 - v_2)] / (v_2 - v_1) \quad (7)$$

происходит раньше, чем хотя бы одна из волн успеет отразиться. Теперь  $k$ -я бусинка движется со скоростью  $v_1$  и на достижение уровня  $2h$  и передачу импульса  $(k-1)$ -й бусинке ей потребуется время  $(2h - v_2 \tau_{ch})/v_1$ . Аналогично  $(k+1)$ -я бусинка, движущаяся со скоростью  $v_2$ , достигнет уровня  $y_{k+2}(0) + h$  и передаст свой импульс  $(k+1)$ -й бусинке спустя время  $[2h - v_1(\tau_{ch} + \delta t)]/v_2$ . Ясно, что хотя бы один из этих промежутков меньше, чем период

$$T = 2h/|v_2 - v_1| \quad (8)$$

между последовательными взаимодействиями  $k$ -й и  $(k+1)$ -й бусинок. Следовательно, второй обмен импульсами произойти уже не успеет и, «пройдя друг сквозь друга» в момент  $\tau_{ch}$  (7), волны покидают область взаимодействия в

расстояние между ними снова достигло бы  $h$ , и они опять обменялись бы импульсами. Однако в этот момент либо  $k$ -я бусинка должна иметь ординату  $y_k < 0$ , либо  $(k+1)$ -я — ординату  $y_{k+1} > h$ . Ни то, ни другое невозможно: в момент прохождения уровня  $y=0$   $k$ -я бусинка отдает свой импульс  $mv_1$   $(k-1)$ -й, а  $(k+1)$ -я свой импульс  $mv_2$  отдает  $(k+2)$ -й еще до того, как достигнет уровня  $y=h > y_{k+2}(0)+h$  (см. (12)).

Таким образом, единственным возможным в этом случае исходом столкновения волн является прохождение их друг сквозь друга. Волны покидают область столкновения в моменты

$$\tau_p^{(1)} = [2h + y_{k+2}(0)]/|v_1| - \delta t, \quad \tau_p^{(2)} = [2h + y_{k+2}(0)]/v_2. \quad (14)$$

**2.3. Столкновение волн при обгоне,  $v_1 v_2 > 0$ .** Координаты и скорости бусинок в начальный момент столкновения связаны условиями

$$y_{k+1}(0) = v_1 \delta t - h, \quad v_2 > v_1, \quad v_1 \delta t - 2h < y_{k+2}(0) < 0. \quad (15)$$

(рис. 5). Ясно, что последнее условие полностью запрещает отражение волны 2 назад. Поэтому возможны лишь два варианта развития событий. Первый, тривиальный случай, когда  $(k+1)$ -я бусинка передаст свой импульс  $(k+2)$ -й еще до взаимодействия с  $k$ -й, интереса не представляет. В этом случае волна 1 просто «ускользает» от взаимодействия, которое откладывается на более поздний момент. Взаимодействие происходит лишь если выполняется более жесткое чем (15) условие

$$-2h + v_1 v_2 \delta t / (v_2 - v_1) < y_{k+2}(0) < 0. \quad (16)$$

При выполнении этого условия  $k$ -я и  $(k+1)$ -я бусинки обмениваются импульсами в момент

$$\tau_{ch} = v_1 \delta t / (v_2 - v_1). \quad (17)$$

после чего в момент

$$\tau_p^{(2)} = [2h + y_{k+2}(0)]/v_2, \quad (18)$$

волна 2 проходит вперед, на  $(k+2)$ -ю проволоку. Волна 1 последует за ней (то есть  $k$ -я бусинка передаст свой импульс  $(k+1)$ -й и т.д.) в момент

$$\tau_p^{(1)} = [2h + y_{k+2}(0)]/v_1 - \delta t. \quad (19)$$

Если к этому моменту  $(k+2)$ -я бусинка еще не передала свой импульс  $(k+3)$ -й, то есть волна 2 еще не ушла дальше вперед, у нас снова движутся две соседние бусинки. Однако взаимодействовать они не смогут, так как для этого  $(k+2)$ -я бусинка должна была бы подняться на высоту более чем  $2h$  от своего начального положения. Таким

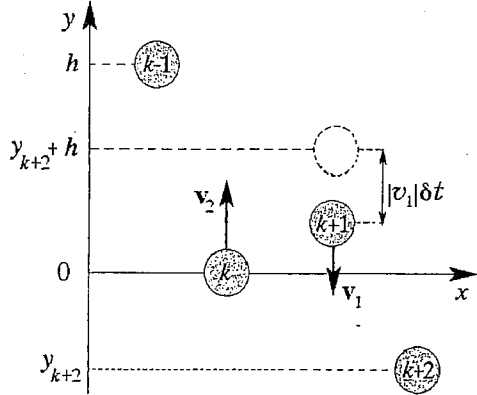


Рис. 4. Начальные положения и скорости бусинок при лобовом столкновении,  $v_1 v_2 > 0$

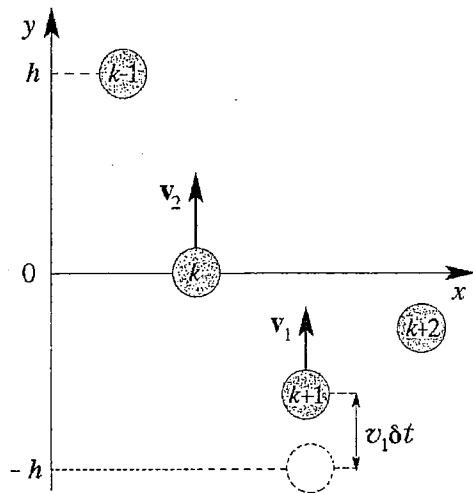


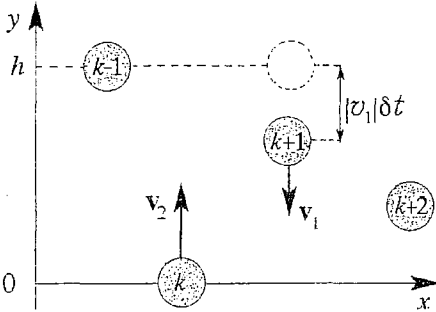
Рис. 5. Начальные положения и скорости бусинок при обгоне,  $v_1 v_2 > 0$

образом, простой обгон является единственным и окончательным результатом столкновения волн в этих условиях.

**2.4. Столкновение волн при обгоне,  $v_1 v_2 < 0$ .** Ограничения на координаты бусинок в начальный момент столкновения имеют вид

$$y_{k+1}(0) = h - |v_1| \delta t, \quad 0 < y_{k+2}(0) < v_2 \tau_{ch} \quad (20)$$

(рис. 6). Момент первого после начала столкновения обмена импульсами бусинок определяется выражением



$$\tau_{ch} = [2h - |v_1| \delta t] / (v_2 + |v_1|). \quad (21)$$

( $k+2$ )-я бусинка не может лежать выше уровня  $v_2 \tau_{ch}$ , на котором окажется  $k$ -я бусинка в этот момент, так как в противном случае еще до того ( $k+1$ )-я бусинка передала бы ей свой импульс, иначе говоря, волна I «ускользнула» бы от столкновения. Поэтому выполнение неравенства (20) гарантирует, что взаимодействие бусинок в момент (21) действительно произойдет.

Рис. 6. Начальные положения и скорости бусинок при обгоне,  $v_1 v_2 < 0$

После этого взаимодействия  $k$ -я и ( $k+1$ )-я бусинки «входят в клинч», периодически обмениваясь импульсами через время  $T$  (8) и одновременно медленно сдвигаясь вместе, как целое, со скоростью их общего центра масс  $(v_1 + v_2)/2$ . Выход из «клинча» происходит при передаче импульса какой-либо из двух до того неподвижных соседних бусинок. В данном случае оказываются, в принципе, возможными три канала рассеяния волн после столкновения. Какой единственный из них окажется открытым, зависит от величин скоростей бусинок, начальной их конфигурации и начальной фазы столкновения.

Первая возможность выхода из «клинча» возникает в промежутке между первым столкновением в момент  $\tau_{ch}$  (21) и вторым, которое должно произойти в момент  $\tau_{ch} + T$  (см. (8)):  $k$ -я бусинка, имея скорость  $v_1 < 0$ , может опуститься обратно до своего начального уровня  $y_k = 0$  (см. рис. 6). В результате импульс  $m v_1$  передается ( $k-1$ )-й бусинке, то есть волна I отражается назад. Теперь ( $k+1$ )-я бусинка движется вверх со скоростью  $v_2$ , а  $k$ -я застыла ниже ( $k+2$ )-й (см. (20)). В результате вслед за первой назад отражается и вторая волна. Эти отражения происходят в моменты

$$\tau_r^{(1)} = 2h/|v_1| - \delta t, \quad \tau_r^{(2)} = 2h/v_2, \quad (22)$$

если только  $k$ -я бусинка действительно достигает уровня  $y_k = 0$ .

Нетрудно показать, что к моменту второго своего взаимодействия в «клинче» бусинки должны были бы находиться на уровнях

$$y_k(\tau_{ch} + T) = 2\Delta h - |v_1| v_2 \delta t / (v_2 + |v_1|), \quad y_{k+1}(\tau_{ch} + T) = y_k(\tau_{ch} + T) + h, \quad (23)$$

где

$$\Delta h = T(v_2 + v_1)/2 = h(v_2 - |v_1|)/(v_2 + |v_1|). \quad (24)$$

$\Delta h$  — смещение центра масс бусинок за время между двумя столкновениями в «клинче»  $T$ . Из (23) ясно, что отражение назад первой, а за ней и второй волн в моменты (22) будет происходить только при выполнении условия

$$v_2 - |v_1| < v_2 |v_1| \delta t / (2h) \quad \text{или} \quad 1/v_2 > 1/v_1 - \delta t / (2\pi). \quad (25)$$



Совместное выполнение неравенств (20) и (25) возможно только если  $y_{k+2}(0) < h$ . В противном случае  $(k+1)$ -я, а потому и  $k$ -я бусинка не смогут достичь уровня  $y=0$ .

Если скорость  $v_2$  достаточно велика, так что (25) не выполняется, выход из «клинка» происходит по-другому. Теперь к моменту  $\tau_{ch}+T$  второго столкновения  $(k+1)$ -я бусинка находится уже выше уровня  $h$  (см. (23)), так что если  $(k+2)$ -я бусинка расположена не слишком высоко,

$$0 < y_{k+2}(0) < 2\Delta h - |v_1|v_2\delta t/(v_2+|v_1|), \quad (26)$$

импульс  $mv_2$  будет передан ей еще до второго столкновения «клинка». Это означает, что происходит простой обгон: сначала волна 2, а за ней и волна 1 проходят дальше вперед. Если  $(k+2)$ -я бусинка лежит выше, так что  $(k+1)$ -я бусинка не сможет достичь уровня  $y_{k+2}(0)+h$  после первого столкновения «клинка», она сможет достичь его после третьего, пятого или какого-либо еще нечетного  $(2n_p+1)$  столкновения, когда она поднимется до высоты

$$y_{k+1}[\tau_{ch} + (2n_p+1)T] = 2(n_p+1)\Delta h + h - |v_1|v_2\delta t/(v_2+|v_1|). \quad (27)$$

Моменты перехода волны 2 с  $(k+1)$ -й на  $(k+2)$ -ю проволоку и волны 1 с  $k$ -й на  $(k+1)$ -ю определяются условиями

$$\tau^{(1)}_p = [2(n_p+1)h - y_{k+2}(0)]/|v_1| - \delta t, \quad \tau^{(2)}_p = [2(n_p+1)h + y_{k+2}(0)]/v_2, \quad (28)$$

а число столкновений в «клинке» до обгона – условием

$$2n_p\Delta h - |v_1|v_2\delta t/(v_2+|v_1|) < y_{k+2}(0) < 2(n_p+1)\Delta h - |v_1|v_2\delta t/(v_2+|v_1|) \quad (29)$$

или, что то же,

$$n_p = \langle [y_{k+2}(0) + |v_1|v_2\delta t/(|v_1|+v_2)]/\Delta h \rangle. \quad (30)$$

Угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  здесь означают целую часть числа.

Еще один возможный канал рассеяния открывается, если  $(k+2)$ -я бусинка расположена слишком высоко, и, соответственно,  $n_p$  слишком велико. Действительно, волна 2 сможет пройти вправо (обгон) только в промежутках между последовательными нечетным и четным столкновениями «клинка». В промежутках же между четным и нечетным столкновениями  $(k+1)$ -я бусинка движется вниз и в силу (20) не может передать свой импульс  $(k+2)$ -й бусинке. В это время, однако, движущаяся вверх  $k$ -я бусинка может достичь уровня  $2h$ , что приведет к отражению волны 2, а за ней и волны 1 назад. Это произойдет после  $2(n_r+1)$ -го столкновения «клинка» в моменты, соответственно

$$\tau^{(1)}_r = 2h(n_r+1)/|v_1| - \delta t, \quad \tau^{(2)}_r = 2h(n_r+2)/v_2, \quad (31)$$

где

$$n_r = \langle (2h+v_2\delta t)|v_1|/[\Delta h(|v_1|+v_2)] \rangle. \quad (32)$$

То, какой именно выход из «клинка» реализуется в действительности, определяется соотношением между  $n_p$  и  $n_r$ . Если  $n_r \geq n_p$ , происходит простой обгон (28). В противном случае сначала волна 2, а за ней и волна 1 отражаются назад в моменты (31). Подчеркнем здесь, что формулы (22) отнюдь не являются частным случаем формул (31) и описывают совершенно иной процесс: волны 1 и 2 отражаются назад в противоположном порядке. На рис. 7, а, б приведены диаграммы, поясняющие эти выводы.

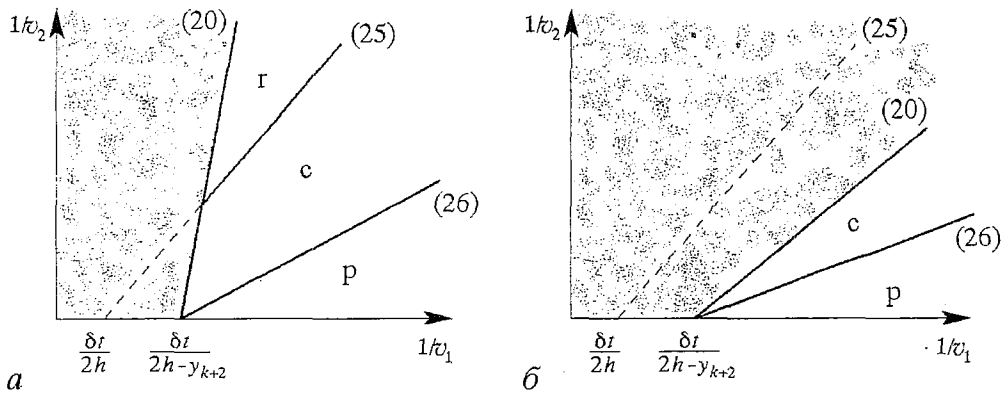


Рис. 7. Диаграммы, поясняющие зависимость исхода столкновения волн при обгоне от скоростей бусинок  $v_1$  и  $v_2$  в них при  $v_1 v_2 < 0$ :  $y_{k+2}(0) < h$  (а);  $y_{k+2}(0) > h$  (б). В области, где выполняются оба неравенства, (20) и (25), происходит отражение (r) сначала волны 1, а за ней и волны 2 в моменты (22). В области, где (20) выполнено, а (25) – нет, происходит либо простой обгон (p) после первого взаимодействия (см. (28) при  $u_p = 0$ ), либо бусинки входят в более длительный «клинч» (c) (см. (27)–(32)). В скобках около линий, разделяющих различные области диаграммы, приведены номера соответствующих этим линиям формул

### 3. Обсуждение результатов

Полученные выше результаты, естественно, не могут быть напрямую использованы для объяснения возникновения резонансов, о которых говорилось во введении. Дело в том, что для запуска одной волны сдвига внешняя сила должна действовать на поверхность тела в течение очень короткого времени. В эксперименте же к поверхности приложена периодическая сила, и можно сказать, что сдвиговые волны при этом идут вглубь тела сплошным потоком. Такая ситуация требует отдельного рассмотрения, результаты которого только и могут сравниваться с экспериментом или использоваться для его объяснения.

В этом смысле полученные в настоящей работе результаты могут рассматриваться только как промежуточные. Однако, по нашему мнению, они могут представлять и самостоятельный интерес по следующим трем основным причинам.

Во-первых, поведение рассмотренных в работе сдвиговых волн во многих отношениях напоминает поведение солитонов. Действительно, они меняют скорость своего распространения в зависимости от состояния среды (конфигурации бусинок) и распространяются, не «расплываясь». При столкновениях они могут проходить друг сквозь друга с некоторым запозданием, но не меняясь. В принципе, возможен распад сдвиговой волны на две, распространяющиеся в противоположных направлениях. Это произойдет, если обе соседние с движущейся неподвижные бусинки окажутся на одном уровне.

Здесь необходимо подчеркнуть, что и формирование, и распространение сдвиговых волн и солитонов определяется существенно различными физическими причинами. Единственное, что их объединяет – принципиально нелинейный характер взаимодействий в среде, в которой они существуют. Отсутствие «расплывания» волны в рассматриваемой модели связано просто с тем, что в промежутках между столкновениями бусинки движутся свободно, а остальные особенности – следствие выполнения закона сохранения импульса. Поэтому причина возникновения многих сходных черт в поведении сдвиговых волн и обычных солитонов нам представляется отнюдь не очевидной. Для прояснения этого вопроса, возможно, могло бы представить значительный интерес рассмотрение усложненного варианта модели, когда дно прямоугольной потенциальной ямы оказывается не плоским. В этом случае движение сдвигового возбуждения по цепочке сопровождается постепенным уменьшением скорости

вследствие излучения обычных линейных или нелинейных – в зависимости от формы дна – волн.

Во-вторых, также интересной особенностью сдвиговых волн в этой модели является наличие в их поведении специфических черт, не свойственных, насколько нам известно, никаким обычным солитонам. Прежде всего, это зависимость характера исхода столкновения от определяющих его количественных параметров – скоростей бусинок в сталкивающихся волнах, начальной фазы столкновения и начальной конфигурации бусинок. В двух из четырех рассмотренных в предыдущем разделе типов парных столкновений, в зависимости от соотношения этих параметров, сталкивающиеся волны могут либо проходить друг сквозь друга, либо отражаться от места столкновения (см. п. 2.1 и 2.4). Другой необычной особенностью этой модели является возможность *отражения назад* обеих волн, двигавшихся до столкновения вперед (см. п. 2.4). Именно такого типа процессы могут являться причиной возникновения обсуждавшихся во введении резонансов.

Здесь стоит обсудить еще одно не совсем обычное явление, которое может возникнуть в этой ситуации. В соответствии с результатами, приведенными в п. 2.4, в зависимости от начальных условий столкновения волны 1 и 2 могут отражаться назад в различном порядке. Ясно, что в одном из этих двух случаев волна, ушедшая назад раньше, будет иметь меньшую скорость. В результате через некоторое время волны должны будут снова столкнуться. Это означает, что наряду с «клинчем» двух бусинок на соседних проволоках в такой модели оказывается возможным и более или менее продолжительный «клинч» двух волн.

В связи с этим уместно упомянуть третью особенность поведения сдвиговых волн, которая может, видимо, представлять значительный интерес при компьютерном моделировании такой системы. С одной стороны, при заданных начальных параметрах исход любого парного столкновения определен достаточно простым алгоритмом. С другой стороны, в некоторых случаях процесс не является устойчивым, так как слабое изменение начальных условий может качественно изменить его исход. Особенно отчетливо эта тенденция проявляется в наиболее естественной конфигурации цепочки, когда в исходном состоянии все бусинки находятся примерно на одном уровне, а скорости обеих волн близки. Следовательно, при наличии в цепочке многих распространяющихся волн, испытывающих парные столкновения, здесь появляется возможность хаотизации динамики системы.

В заключение имеет смысл обсудить очень простой способ вычисления времен окончания столкновений (формулы (6), (9), (14), (18), (19), (22), (28), (31)), который может оказаться полезным при компьютерном моделировании. Представим себе, что в момент взаимодействия между ними две бусинки не только обмениваются импульсами, но и сами одновременно меняются местами. Поскольку все бусинки мы считаем одинаковыми, это никак не отражается на ходе столкновения волн. Однако теперь оказывается, что, скажем, бусинка, движущаяся вверх со скоростью  $v_2$ , после каждого столкновения с бусинкой, движущейся со скоростью  $v_1$ , не просто перескакивает на соседнюю проволоку, но и смещается по оси  $y$  на  $\pm h$ . При этом смещение происходит вниз, если  $v_2 > v_1$ , и вверх – в противоположном случае. Следовательно, на то, чтобы подняться с уровня  $y_1$  до уровня  $y_2 > y_1$ , испытав при этом  $n$  столкновений, бусинка затратит время  $t = (y_2 - y_1 \pm nh) / v_2$ . Совершенно аналогично обстоит дело и с бусинкой, движущейся со скоростью  $v_1$ . Именно этим простым обстоятельством объясняется схожесть всех формул для  $\tau_p^i$ ,  $\tau^i$  с формулой (3).

Автор благодарен В.А. Бархатову за привлечение его внимания к этой теме и за всестороннюю поддержку работы, а также С.А. Зыкову и А.Б. Борисову за полезные обсуждения и интерес к работе.

## Библиографический список

1. *Fitzgerald E.R.* Mechanical resonance dispersion in metals at audio frequencies // *Phys. Rev.* 1957. Vol. 108. P. 690.
2. *Fitzgerald E.R.* Mechanical resonance dispersion in crystalline polymers at audio frequencies // *J. Chem. Phys.* 1957. Vol. 27. P. 1180.
3. *Fitzgerald E.R.* Particle waves and deformation in crystalline solids // N. Y. – London – Sydney, International Publishers, Division of John Wiley and Sons, 1968.
4. *Френкель Я. И.* Введение в теорию металлов // М.–Л., 1950. С. 358–366.

*Институт физики металлов  
Уральского отделения РАН*

*Поступила в редакцию 13.06.2000  
после доработки 5.09.2000*

## SHEAR PROPAGATION MODEL IN STRONGLY COMPRESSED CRYSTAL

*E.V. Rosenfeld*

Simple mechanical model is proposed for shear waves propagated in ideal unlimited crystal. Two waves propagating in the same direction can reflect back together in this model due to interaction between them.



*Розенфельд Евгений Владимирович* – родился в Екатеринбурге (1948). Окончил Уральский государственный университет (1971, кафедра теоретической физики). С этого времени работает в отделе теоретической физики Института физики металлов Уральского отделения РАН. Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук (1978). Основные работы – по физике магнетизма.