



ФЛУКТУАЦИИ КОНТУРОВ РАВНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

И.С. Жукова, А.И. Саичев

В связи с задачами физики атмосферы и океана изучены статистические свойства длины контура равной концентрации пассивной примеси и полного градиента поля концентрации в хаотически движущейся несжимаемой среде. Получены выражения для статистических моментов этих величин, а также вероятностное распределение полного градиента. Показано, что моменты экспоненциально растут с течением времени, а распределение стремится к логарифмически нормальному.

Введение

Изучение статистических свойств плотности пассивной примеси в турбулентных средах важно, например, для анализа загрязнения окружающей среды и привлекает большое внимание исследователей (см., например, [1–4]). В большинстве работ обычно находятся статистические средние плотности и концентрации пассивной примеси, в то время как их вероятностные свойства, необходимые для лучшего понимания процессов турбулентной диффузии, мало изучены. Хотя в несжимаемой среде отсутствуют сжатия и растяжения, ответственные за флуктуации концентрации в сжимаемой среде, при несжимаемом хаотическом движении первоначально гладкие профили концентрации пассивной примеси становятся все более изрезанными вследствие того, что первоначально близкие частицы примеси разбегаются, а далекие могут оказаться вблизи друг от друга. В итоге участки среды с сильно отличающимися концентрациями примеси могут соседствовать, приводя к резким перепадам концентрации в близких точках [5]. В данной работе подобная нарастающая пространственная изрезанность полей концентрации пассивной примеси в хаотически движущейся несжимаемой среде изучается на примере важных для приложений геометрических характеристик, в частности, длины $l(t)$ контура равной концентрации пассивной примеси.

1. Постановка задачи. Вычисление статистических средних значений

Для простоты ограничимся ниже двумерным случаем, когда компоненты поля скорости следующим образом выражаются через функцию тока $\psi(x, t)$:

$$v_1 = \partial\psi/\partial x_2, \quad v_2 = -\partial\psi/\partial x_1.$$

При статистическом анализе полей будем считать функцию тока $\psi(x, t)$ гауссовой,

статистически изотропной в пространстве и стационарной во времени с известной корреляционной функцией.

Вначале получим выражение для длины контура равной концентрации примеси $l(t)$ в форме, удобной для статистического анализа. Для этого заметим, что интеграл $l = \int \delta(f(\mathbf{x}) - C_1) |\nabla f| d^2x$ определяет длину контура равного уровня $f(\mathbf{x}) = C_1 = \text{const}$ функции $f(\mathbf{x})$. Взяв в качестве $f(\mathbf{x})$ поле концентрации пассивной примеси $f(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}, t) = c_0(\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t))$, (где $c_0(\mathbf{x})$ – начальный детерминированный профиль концентрации, а $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ – закон преобразования эйлеровых в лагранжевы координаты), получим интеграл, выражающий зависимость от времени длины замороженного в жидкость контура равной концентрации. Более точно, контура, во всех точках которого концентрация пассивной примеси всегда одинакова и равна c

$$l = \int \delta(c_0(\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)) - c) |\nabla_{\mathbf{x}} c| d^2x. \quad (1)$$

Входящий в (1) градиент поля концентрации можно представить в виде

$$\nabla_{\mathbf{x}} c = \mathbf{e}_1 [\partial c_0 / \partial y_1] j_{11} + (\partial c_0 / \partial y_2) j_{21} + \mathbf{e}_2 (\partial c_0 j_{12} / \partial y_1 + \partial c_0 j_{22} / \partial y_2), \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – орты эйлеровой системы координат, а j_{km} – компоненты тензора перехода от лагранжевых координат к эйлеровым

$$j_{km} = \partial Y_k(\mathbf{x}, t) / \partial x_m, \quad k, m = 1, 2.$$

Эти компоненты можно выразить через компоненты тензора перехода от эйлеровых к лагранжевым координатам

$$J_{km}(\mathbf{y}, t) = \partial X_k(\mathbf{y}, t) / \partial y_m,$$

продифференцировав очевидное векторное тождество $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t), t)$ по x_1 и x_2 и разрешив полученные уравнения относительно j_{km}

$$j_{11} = J_{22}/J, \quad j_{22} = J_{11}/J, \quad j_{12} = -J_{12}/J, \quad j_{21} = -J_{21}/J. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2) и приняв во внимание, что в рассматриваемом случае несжимаемой среды $J = 1$, получим

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} c &= |\nabla_{\mathbf{y}} c_0| (\mathbf{e}_1 J_1 + \mathbf{e}_2 J_2), \\ J_1(\mathbf{y}, t, \theta_0) &= J_{22} \cos \theta_0 - J_{21} \sin \theta_0, \\ J_2(\mathbf{y}, t, \theta_0) &= J_{11} \sin \theta_0 - J_{12} \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $|\nabla_{\mathbf{y}} c_0|$ – начальный модуль градиента концентрации в точке \mathbf{y} , а θ_0 – угол между осью y_1 и начальным направлением градиента.

Еще одной полезной характеристикой пространственного поведения как поля концентрации, так и хаотически движущейся несжимаемой жидкости может служить интеграл

$$A(t) = \int \delta(c_0 \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t) - c) (\nabla_{\mathbf{x}} c)^2 d^2x, \quad (5)$$

который назовем полным градиентом поля концентрации. Чтобы пояснить физический смысл величины $A(t)$ заметим, что интеграл в (5) равен криволинейному интегралу по упомянутой выше кривой равной концентрации от модуля градиента поля концентрации

$$A(t) = \oint_{l(t)} |\nabla_{\mathbf{x}} c| dl.$$

Укажем геометрический смысл последнего интеграла. Согласно стандартному определению, среднее значение градиента на данном контуре

$$|\nabla c|_{l(t)}^{\text{ave}} = 1/l(t) \oint_{l(t)} |\nabla_x c| dl.$$

Таким образом, введенный нами выше полный градиент (5) равен среднему градиенту, умноженному на длину контура,

$$A(t) = l(t) |\nabla c|_{l(t)}^{\text{ave}}.$$

Заметим еще, что модуль градиента $|\nabla c| = (\mathbf{n} \cdot \nabla_x c)$ равен скалярному произведению градиента на вектор внутренней нормали \mathbf{n} к контуру $l(t)$. По физической терминологии, это скалярное произведение называют потоком векторного поля (в данном случае поля ∇c) внутрь контура. Внутренней мы здесь считаем нормаль, направленную в сторону увеличения концентрации $c(\mathbf{x}, t)$. Согласно формуле Грина в двумерной среде данный контурный интеграл равен двойному интегралу от дивергенции векторного поля

$$A(t) = \int_S \Delta_x c d^2x,$$

взятому по (многосвязной в общем случае) области S , внутри которой $c(\mathbf{x}, t) > c$.

Статистические характеристики интегралов типа (1), (5) удобно изучать, перейдя в интегралах от эйлеровых к лагранжевым переменным интегрирования. Покажем это на примере полного градиента $A(t)$ (5). После перехода к интегрированию по лагранжевым переменным y с помощью отображения $\mathbf{x} = \mathbf{X}(y, t)$ получим

$$A(t) = \int \delta(c_0(y) - c) (\nabla_x c)^2 d^2y. \quad (6)$$

Будем, как обычно, считать начальную концентрацию $c_0(y)$ детерминированной. Кроме того, для удобства положим ее (радиально) цилиндрически симметричной функцией $c_0(r)$, зависящей только от расстояния до начала лагранжевой системы координат $r = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$ и монотонно спадающей с ростом r . Тогда интеграл (6) преобразуется к виду

$$A(t) = 1/|\nabla_y c_0| \oint_{L_r} (\nabla_x c)^2 dl, \quad (7)$$

где интегрирование ведется по окружности L_r с центром в начале лагранжевой системы координат и радиусом r_0 , который является корнем уравнения $c_0(r) = c$. Подставив в (7) выражение для градиента

$$\nabla_x c = |\nabla_y c_0| g \mathbf{n},$$

где $g(y, t) = |\nabla_x c| / |\nabla_y c_0|$ – относительное изменение величины градиента, а $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \cos \theta + \mathbf{e}_2 \sin \theta$ – единичный вектор, описывающий флуктуации направления вектора градиента с течением времени, и перейдя к интегрированию по углу θ_0 ($dl = r d\theta_0$), получим

$$A(t) = A_0 G,$$

где $A_0 = l_0 |\nabla_y c_0|$ – начальный полный градиент, $l_0 = 2\pi r_0$ – начальная длина выбранного контура равной концентрации, а безразмерная величина

$$G(t) = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} g^2(y, t, \theta_0) |_{y=r_0 \mathbf{n}} d\theta_0 \quad (8)$$

характеризует относительное изменение во времени полного градиента концентрации вдоль выбранного контура.

Аналогичное выражение для текущей длины этого контура имеет вид

$$l(t) = l_0 \Omega,$$

где

$$\Omega(t) = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} g(y, t, \theta_0) |_{y=r_0} d\theta_0 \quad (9)$$

– относительное изменение длины контура.

Используя формулы (8) и (9), а также выражение [5] для моментов функции $g(t)$

$$\langle g^n \rangle = \exp[n(n+2)Bt],$$

в котором коэффициент B определяется равенством

$$\int_{-\infty}^0 \langle \psi(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{s}, t + \tau) \rangle d\tau = \dots + B/8(s_1^2 + s_2^2)^2 - \dots,$$

где s_1, s_2 – компоненты вектора \mathbf{s} , можно показать, что в диффузионном приближении [6–8]

$$\langle G \rangle = \langle g^2 \rangle = \exp(8Bt),$$

$$\langle \Omega \rangle = \langle g \rangle = \exp(3Bt).$$

Отметим, что подобный экспоненциальный рост статистических средних значений процессов G и Ω в реальной ситуации будет ограничен влиянием молекулярной диффузии.

К сожалению, совпадают только статистические средние случайных процессов G и g^2 (а также Ω и g). Другие их статистические характеристики, например, вероятностные распределения, могут существенно отличаться. Продемонстрируем это на примере пары G и g^2 . Из работы [5] следует, что случайная величина g^2 имеет логарифмически нормальное распределение, согласно которому вероятность попадания g^2 в интервал $(0, 1)$ больше нуля, хотя и быстро стремится к нулю с ростом t . Напротив, случайная величина G не может принимать значений, меньших единицы. Покажем это, подставив в (8) выражение $g^2 = J_1^2 + J_2^2$, следующее из формул (4), и считая для простоты, что радиус окружности, по которой ведется интегрирование в (8), очень мал, так что все компоненты тензора J_{km} можно считать не зависящими от переменной интегрирования. После интегрирования получим

$$G = 1/2(J_{11}^2 + J_{22}^2 + J_{12}^2 + J_{21}^2). \quad (10)$$

С учетом условия несжимаемости жидкости $J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 1$ равенство (10) можно переписать в виде

$$G = 1 + 1/2[(J_{11} - J_{22})^2 + (J_{12} + J_{21})^2],$$

откуда следует, что всегда выполняется неравенство $G \geq 1$, даже если случайное поле g^2 с отличной от нуля вероятностью принимает значения меньшие единицы. Таким образом, более адекватно свойства полей пассивной примеси описываются их вероятностными характеристиками, анализом которых мы займемся далее.

2. Вероятностные свойства параметров контура равной концентрации

Обратимся теперь к рассмотрению статистических свойств процесса G . Нетрудно показать, что в лагранжевой системе координат случайные поля J_1, J_2 (4) удовлетворяют следующей системе стохастических уравнений:

$$\begin{cases} dJ_2/dt = \delta J_2 - \beta J_1, & J_1(\mathbf{y}, t=0, \theta_0) = \cos \theta_0, \\ dJ_1/dt = -\delta J_2 + \gamma J_1, & J_2(\mathbf{y}, t=0, \theta_0) = \sin \theta_0. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь использованы обозначения

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t) / (\partial x_1 \partial x_2), \quad \beta(\mathbf{x}, t) = \partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t) / \partial x_2^2, \quad \gamma(\mathbf{x}, t) = \partial^2 \Psi(\mathbf{x}, t) / \partial x_1^2.$$

Введем вспомогательные функции

$$C = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} g^2 \cos 2\theta d\theta_0,$$

$$S = 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} g^2 \sin 2\theta d\theta_0$$

и перейдем от (11) к системе стохастических дифференциальных уравнений для G , C , S

$$1/2 dG/dt = \mu S - \delta C, \quad G(0) = 1,$$

$$1/2 dC/dt = \nu S - \delta G, \quad C(0) = 0,$$

$$1/2 dS/dt = \mu G - \nu C, \quad S(0) = 1,$$

где

$$\nu = 1/2(\gamma + \beta), \quad \mu = 1/2(\gamma - \beta).$$

Переходя к полярным координатам R и φ при помощи равенств $C = R \cos \varphi$, $S = R \sin \varphi$, получим следующую систему уравнений:

$$1/2 dG/dt = (\mu \sin \varphi - \delta \cos \varphi) R, \quad G(0) = 1, \quad (12a)$$

$$1/2 dR/dt = (\mu \sin \varphi - \delta \cos \varphi) G, \quad R(0) = 0, \quad (12б)$$

$$1/2 R d\varphi/dt = (\mu \cos \varphi + \delta \sin \varphi) G - \nu R, \quad \varphi(0) = 0. \quad (12в)$$

Уравнения (12a) и (12б) имеют решения

$$G = \operatorname{ch} Z(t), \quad R = \operatorname{sh} Z(t),$$

где произвольные процессы $Z(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют системе двух уравнений

$$dZ/dt = 2(\mu \sin \varphi - \delta \cos \varphi), \quad Z(0) = 0,$$

$$d\varphi/dt = 2(\mu \cos \varphi + \delta \sin \varphi) \operatorname{cth} Z - 2\nu, \quad \varphi(0) = 0.$$

Используя методику, приведенную в работе [5], можно показать, что одноточечное вероятностное распределение $w(z, t) = \langle \delta(Z(t) - z) \rangle$ случайного процесса $Z(t)$ удовлетворяет в диффузионном приближении уравнению

$$\partial w / \partial \tau + \partial (\operatorname{cthz} w) / \partial z = \partial^2 w / \partial z^2, \quad w(z, t) = \delta(z), \quad (13)$$

где $\tau = 4Bt$ — безразмерное время. Из (13) следует, что статистически эквивалентный процесс $Z(\tau)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dZ/d\tau = \operatorname{cth} Z + \xi(\tau),$$

а соответствующий процесс $G(\tau)$ — решением уравнения

$$dG/d\tau = G + \xi(\tau)(G^2 - 1)^{1/2}, \quad G(0)=1,$$

где $\xi(\tau)$ – гауссов белый шум с корреляционной функцией

$$\langle \xi(\tau)\xi(\tau') \rangle = 2\delta(\tau - \tau').$$

Следовательно, распределение вероятности процесса G

$$f(u, t) = \langle \delta(G(t) - u) \rangle = \langle \delta(\text{ch}Z - u) \rangle$$

подчиняется уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова

$$\partial f / \partial \tau = (\partial(u^2 - 1) / \partial u) \partial f / \partial u, \quad f(u, t=0) = \delta(u-1). \quad (14)$$

В частности, из (14) следует, что моментные функции процесса G удовлетворяют цепочке уравнений

$$d\langle G^n \rangle / d\tau = n(n+1)\langle G^n \rangle - n(n-1)\langle G^{n-2} \rangle.$$

Например, средний квадрат процесса G и его третий момент равны соответственно

$$\langle G^2 \rangle = 1/3(1 + 2\exp(6\tau)),$$

$$\langle G^3 \rangle = 1/5(2\exp(12\tau) + 3\exp(2\tau)).$$

Решение уравнения (14) может быть выражено через функции Лежандра $P_{-1/2+i\mu}(u)$ ($\mu \geq 0$) [9, 10], являющиеся решением уравнения Лежандра

$$(\partial(u^2 - 1) / \partial u)(\partial P_{-1/2+i\mu}(u) / \partial u) = -(\mu^2 + 1/4)P_{-1/2+i\mu}(u)$$

и имеющие интегральное представление

$$P_{-1/2+i\mu}(u) = (2\text{ch}(\mu\pi) / \pi) \int_0^\infty (\cos(\mu\theta) / (2(u + \text{ch}(\theta\tau)))^{1/2} d\theta, \quad \mu \geq 0. \quad (15)$$

Умножая обе части уравнения (14) на функцию Лежандра и интегрируя дважды по переменной u в пределах от 1 до ∞ , получим простое дифференциальное уравнение

$$d\bar{f}(\mu, \tau) / d\tau = -(\mu^2 + 1/4)\bar{f}(\mu, \tau) \quad (16)$$

для образа \bar{f} преобразования Фурье – Лежандра. Решение уравнения легко найти, используя начальные условия, соответствующие начальным условиям уравнения (14),

$$\bar{f}(\mu, \tau) = \exp[-(\mu^2 + 1/4)\tau].$$

Выполнив обратное преобразование Фурье – Лежандра, получим решение исходного уравнения (14) в форме

$$f(u, \tau) = \int_0^\infty \mu \text{th}(\pi\mu) \exp[-(\mu^2 + 1/4)\tau] P_{-1/2+i\mu}(u) d\mu$$

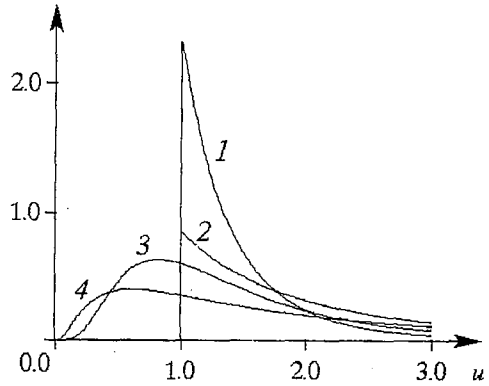
или, используя выражение (15), в такой форме

$$f(u, \tau) = \exp[-\tau/4 + \pi^2/(4\tau)] / (2(2\pi\tau)^{1/2}) \int_0^\infty \{\exp[-\theta^2/(4\tau)] \text{sh}\theta \sin(\pi\theta/(2\tau))\} / (u + \text{ch}\theta)^{3/2} d\theta.$$

На рисунке представлен график вероятностного распределения $f(u, \tau)$ относительного изменения во времени полного градиента плотности вдоль выбранного контура вместе с графиком логнормальной плотности вероятности

$$f_{g^2}(u, \tau) = (1/(2u(\pi\tau)^{1/2})) \exp[-(\ln^2(u \exp(-\tau)))/(4\tau)]$$

Рис. 1, 2 – вероятностное распределение f и 3, 4 – плотность вероятности f_{g^2} квадрата величины градиента в различные моменты времени τ : 1, 3 – 0.2; 2, 4 – 0.5



квадрата величины градиента g^2 . Как видно из рисунка, вероятностные распределения величин G и g^2 существенно различны при малых временах τ , в то время как при больших τ и $u > 1$ данные распределения практически совпадают.

В заключение получим выражение для моментной функции величины G .

$$\Theta(\lambda, \tau) = \int_1^{\infty} f(u, \tau) \exp(-\lambda u) du.$$

В нашем случае

$$\Theta(\lambda, \tau) = \exp(-\tau) - (\lambda/(2\tau))^{1/2} \exp(-\lambda - \tau/4 + \pi^2/(4\tau)) \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp[-\theta^2/(4\tau) + 2\lambda \operatorname{ch}^2(\theta/2)] \sin(\pi\theta/(2\tau)) \operatorname{sh}\theta [1 - \Phi((2\lambda)^{1/2} \operatorname{ch}(\theta/2))] d\theta,$$

где

$$\Phi(z) = 2/\pi^{1/2} \int_0^z \exp(-t^2) dt.$$

Поскольку статистические моменты стохастического процесса $G(\tau)$ являются коэффициентами ряда Тейлора

$$\Theta(\lambda, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n / n! \langle G^n \rangle,$$

то, используя формулу

$$1/(\pi\tau)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp(-\theta^2/(4\tau)) \sin(\pi\theta/(2\tau)) \operatorname{sh}(\beta\theta) d\theta = \exp(\beta^2\tau - \pi^2/(4\tau)) \sin(\beta\pi),$$

можно получить выражения для $\langle G \rangle$, $\langle G^2 \rangle$ и $\langle G^3 \rangle$, приведенные выше.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS № 97-11134, гранта РФФИ № 00-02-16167, гранта «Ведущие научные школы России» № 00-15-96619, а также гранта Королевской академии наук Швеции.

Библиографический список

1. Csanady G.T. Turbulent diffusion in the environment. Boston: Reidel. 1980.
2. Careta A., Sagues F., Ramirez-Piscina L., Sancho J.M. Effective diffusion in a stochastic velocity field // J. Stat. Phys. 1993. Vol. 71. P. 235.
3. Crisanty A., Vulpiani A. On the effects of noise and drift on diffusion in fluids // J. Stat. Phys. 1993. Vol. 70. P.197.
4. Докучаев В.П. Метод дисперсионных соотношений для средней концентрации в теории турбулентной диффузии пассивной примеси // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 2. С. 275.
5. Жукова И.С., Саичев А.И. О вероятностных свойствах градиента плотности хаотически движущейся несжимаемой среды // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 5. С.597.

6. *Кляцкин В.И.* Статистическое описание диффузии пассивной примеси в случайном поле скоростей // УФН. 1994. Т. 164, № 5. С. 531.

7. *Saichev A.I., Woyczynski W.A.* Distribution of passive tracers in randomly moving media. In: Stochastic Models in Geosystems, IMA volumes, NY: Springer-Verlag 1996. P. 43.

8. *Avellaneda M., Majda A.* Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport // Comm. Math. Phys. 1990. Vol. 131. P. 38.

9. *Papanicolaou G.C.* Wave propagation in one-dimensional random medium // SIAM J. Appl. Math. 1971. Vol. 21. P. 13.

10. *Kesten H., Papanicolaou G.C.* A limit theorem for turbulent diffusion // Comm. Math. Phys. 1979. Vol. 65. P. 97.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 26.08.2000

FLUCTUATIONS OF CONTOURS OF PASSIVE TRACER EQUAL CONCENTRATION IN TURBULENT MEDIUM

Saichev A.I., Zhukova I.S.

In view of problems of atmosphere and ocean physics, statistical properties of contours length of passive tracer equal concentration and of the concentration field total gradient in chaotically moving incompressible medium are studied. Expressions for statistical moments of these processes and also the probability distribution of total gradient are derived. It is shown that moments grow exponentially in time and distribution tends to logarithmically normal one.



Жукова Ирина Семеновна – родилась в Горьком (1965), окончила радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1987). В настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ. Опубликовала 15 научных статей в области радиофизики.



Саичев Александр Иванович – родился в Горьком (1946), окончил Горьковский государственный университет в 1969 году. С момента окончания и по настоящее время работает на радиофизическом факультете ННГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ИГУ (1975) и доктора физико-математических наук в НИРФИ (1982) по специальности радиофизика и электроника. Соавтор двух монографий: «Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии», «Distributions in the physical and engineering sciences». Опубликовал 140 научных статей в области радиофизики. Лауреат Государственной премии РФ (1997). Член редакционной коллегии журнала «Известия вузов. Радиофизика». Член Российского акустического общества. Член Американского общества прикладной математики (SIAM).